МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1987

УДК 539.375

# ОБ ЭФФЕКТЕ УЧЕТА ОДНОСТОРОННИХ СВЯЗЕЙ В ВЕРШИНЕ ТРЕЩИНЫ

КОЛТОН Л. Г.

Для оценки погрешности, вызываемой неучетом односторонних ограничений на поверхности трещины, лежащей на границе раздела двух сред, сравниваются решения модельной задачи о деформации упругой полуплоскости $x_2>0$, закрепленной на части границы $|x_1|>l$, под действием равномерно распределенной на отрезке $|x_1|<l$ вертикальной силы при отсутствии и наличии односторонних связей на этом отрезке. Решение первой задачи имеет в вершинах трещины осциллирующую особенность, которая приводит к проникновению верхнего берега трещины в нижнюю полуплоскость. Решение второй задачи, как доказано, содержит один участок контакта с проскальзыванием в каждой вершине трещины, а напряжения в вершинах имеют корневую особенность. Однако вне некоторой окрестности точек $|x_1|=l$ оба решения близки, а производные от упругой энергии по длине трещины в обоих случаях практически совпадают.

Влияние односторонних связей в вершине трещины, расположенной на границе различных сред, обсуждалось в [1–6]. Впервые предположение о том, что в вершине содержится сплошной участок проскальзывания, высказано в [3, 4, 6], где строились решения задач, схожих с рассматриваемой.

**1. Постановка и решение модельной задачи с односторонними связями.** Пусть на жестко заделанную по линии $\{x_2=0,\ |x_1|>l\}$ однородную полуплоскость $\{x_2\geqslant 0\}$ действует на отрезке $\{x_2=0,\ |x_1|<l\}$ вертикальная сила постоянной плотности $T>0$. Граничные условия задачи с односторонними связями на этом отрезке для перемещений $(u_1,\ u_2)$ и напряжений $\sigma_{ij}$ $(i,\ j=1,\ 2)$ имеют вид

$$u_1=0,\quad u_2=0,\quad |x_1|>l \tag{1.1}$$

$$\sigma_{12}=0,\quad u_2\geqslant 0,\quad \sigma_{22}\leqslant -T,\quad u_2(\sigma_{22}+T)=0,\quad |x_1|<l \tag{1.2}$$

Дальше разыскивается решение с конечной упругой энергией.

Введем следующие обозначения. Пусть $\lambda$, $\mu$ – константы Ламе, $\nu$ – коэффициент Пуассона

$$\begin{gathered}\varkappa=3-4\nu=(\lambda+3\mu)/(\lambda+\mu)\\ \sigma_{11}{}^{\infty}=\lambda/\mu,\quad \sigma_{22}{}^{\infty}=(\lambda+2\mu)/\mu,\quad \sigma_{12}{}^{\infty}=0\\ u_2{}^0(\eta,\ \xi)=(\lambda+2\mu)/(\mu Tl)\,u_2(x,\ y)+\xi\\ u_1{}^0(\eta,\ \xi)=(\lambda+2\mu)/(\mu Tl)\,u_1(x,\ y)\\ \sigma_{ij}{}^0(\eta,\ \xi)=(\lambda+2\mu)/(\mu T)\,\sigma_{ij}(x,\ y)+\sigma_{ij}{}^{\infty}\\ (\eta,\ \xi)=(x,\ y)/l\end{gathered} \tag{1.3}$$

Рассмотрим аналитические в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ $(z=\eta+i\xi)$ функции Колосова – Мусхелишвили $\Phi(z)$, $\Sigma(z)$ [7]:

$$\begin{gathered}2\mu\partial/\partial\eta(u_1{}^0+iu_2{}^0)=\varkappa\Phi+\overline{\Sigma}+(\bar z-z)\,\Phi\\ \sigma_{22}{}^0-i\sigma_{12}{}^0=\Phi-\overline{\Sigma}+(\bar z-z)\,\overline{\Phi}'\end{gathered} \tag{1.4}$$

*Теорема.* Единственное решение задачи (1.1), (1.2) содержит участки контакта с проскальзыванием $a<|x_1|<l$. При $|x_1|<a$ трещина раскрыта. Решение выражается по формулам (1.3), (1.4) через функции $\Phi$, $\Sigma$, которые определяются следующими соотношениями:

$$\Phi(z)={}^1/{}_2(1+\lambda/\mu)(z^2+q^2)(1-z^2)^{-1/2}\exp\{\Psi(z)\} \tag{1.5}$$

$$\Sigma(z)={}^1/_4(1+\lambda/\mu)^2\varkappa(z^2+q^2)(1-z^2)^{-1}\Phi^{-1}(z)=$$
$$={}^1/_2(1+\lambda/\mu)\varkappa(1-z^2)^{-1/2}\exp\{-\Psi(z)\}$$

Аналитическая в верхней полуплоскости функция $\Psi$ и вещественные параметры $a$, $q$ однозначно определяются из решения задачи Гильберта ($\Psi(z)$ непрерывна):

$$2\operatorname{Re}\Psi(\eta)=-\ln(\eta^2+q^2),\quad |\eta|>1 \tag{1.6}$$
$$2\operatorname{Im}\Psi(\eta)=2\pi\operatorname{sign}\eta,\quad 1>|\eta|>a^\circ$$
$$2\operatorname{Re}\Psi(\eta)=-\ln((\eta^2+q^2)/\varkappa),\quad a^\circ>|\eta|$$
$$\Psi(z)=-\ln z+i\pi/2+o(z^{-1}),\quad |z|\to\infty,\quad a^\circ=a/l \tag{1.7}$$

*Доказательство.* Функция $\Psi$ может быть выражена через интегралы типа Коши следующим образом:

$$\Psi(z)=z/(\pi i)h(z)g(z)\qquad h(z)=((z^2-1)/(z^2-a^{\circ 2}))^{1/2} \tag{1.8}$$
$$g(z)=-\int_0^{a^\circ}\frac{\ln((t^2+q^2)/\varkappa)\,dt}{|h(t)|(t^2-z^2)}-\int_1^\infty\frac{\ln(t^2+q^2)\,dt}{|h(t)|(t^2-z^2)}+$$
$$+2\pi\int_{a^\circ}^1\frac{dt}{|h(t)|(t^2-z^2)}$$

Условия (1.7) дают систему уравнений для нахождения параметров $a^\circ$, $q$:

$$F_1(a^\circ,q)=-\int_0^{a^\circ}\frac{\ln((t^2+q^2)/\varkappa)\,dt}{|h_1(t)|}+\int_1^\infty\frac{\ln(t^2+q^2)\,dt}{|h_1(t)|}-2\pi\int_{a^\circ}^1\frac{dt}{|h_1(t)|}=0$$
$$F_2(a^\circ,q)=\int_0^{a^\circ}\frac{\ln((t^2+q^2)/\varkappa)\,dt}{|h(t)|}+\int_1^\infty\frac{\ln((t^2+q^2)/t^2)\,dt}{|h(t)|}- \tag{1.9}$$
$$-2\pi\int_{a^\circ}^1\frac{dt}{|h(t)|}+2\int_1^\infty(|h^{-1}(t)|-1)\ln t\,dt+2=0$$

Здесь $h_1(z)$ — аналитическая в верхней полуплоскости функция $h_1(z)=((z^2-1)(z^2-a^{\circ 2}))^{1/2}$. Докажем разрешимость системы (1.9). Поскольку функция $f(z)=\ln((z-iq)/\varkappa)-i\pi/2$ удовлетворяет на вещественной оси равенствам $2\operatorname{Re}f(\eta)=\ln((\eta^2+q^2)/\varkappa)$, $2\operatorname{Im}f(\eta)=i\operatorname{sign}(2\operatorname{arctg}\times(q/\eta)-\pi)$ и $\Psi(z)\sim\ln(z/\varkappa)-i\pi/2$ при $|z|\to\infty$, то для нее справедливо представление, аналогичное (1.8):

$$f(z)=\frac{z}{\pi i}h(z)\left\{\int_0^{a^\circ}\frac{\ln((t^2+q^2)/\varkappa)\,dt}{|h(t)|(t^2-z^2)}+\right.$$
$$\left.+\int_1^\infty\frac{\ln((t^2+q^2)/\varkappa)\,dt}{|h(t)|(t^2-z^2)}-\int_{a^\circ}^1\frac{\pi-2\operatorname{arctg}(q/t)}{|h(t)|(t^2-z^2)}dt\right\}$$

Так как функция $f(z)$ ограничена в точках $z=\pm a$, то

$$-\int_0^{a^\circ}\frac{\ln((t^2+q^2)/\varkappa)\,dt}{|h_1(t)|}+\int_1^\infty\frac{\ln((t^2+q^2)/\varkappa)\,dt}{|h_1(t)|}-$$
$$-\int_{a^\circ}^1\frac{\pi-2\operatorname{arctg}(q/t)}{|h_1(t)|}dt=0$$

и, следовательно, первое уравнение системы (1.9) может быть преобразовано:

$$F_1(a^\circ, q) = \ln \varkappa \int\limits_1^\infty \frac{dt}{|h_1(t)|} - \int\limits_{a^\circ}^1 \frac{\pi + 2\,\mathrm{arctg}\,(q/t)}{|h_1(t)|}\,dt = 0$$

В силу монотонности по $a^\circ$ входящих в это выражение интегралов при любом $q$ существует единственное $a^\circ(q)$, такое, что $F_1(a^\circ(q), q)=0$, причем $F_1(a^\circ, q)<0$ при $a<a^\circ(q)$ и $F_1(a^\circ, q)>0$ при $a>a^\circ(q)$. Функция $a^\circ(q)$ возрастает. Для величины $\varepsilon=1-a^\circ(q)$ при всех допустимых $\varkappa$, $q$ справедлива оценка $\varepsilon=1-a^\circ<10^{-3}$. Частные производные функции $F_2(a^\circ, q)$ равны

$$(\partial F_2/\partial a^\circ)\,(a^\circ, q) = -a^\circ F_1(a^\circ, q)$$

$$\frac{\partial F^2}{\partial q}(a^\circ, q) = 2q \int\limits_0^{a^\circ} \frac{dt}{|h(t)|\,(t^2+q^2)} + 2q \int\limits_1^\infty \frac{dt}{|h(t)|\,(t^2+q^2)}$$

Следовательно, $\partial/\partial q(F(a^\circ(q), q)>0$, $\max F_2(a^\circ, q)=F_1(a^\circ(q), q)$ при $a^\circ\in(0, 1)$. При больших значениях $q$ при всех $a^\circ$ функция $F_2(a^\circ, q)$ положительна. Видно, что $a^\circ(0)=1$, $F_1(1, 0)=0$ при $\varkappa=1$, а следовательно, $F_2(a^\circ, 0)\leqslant 0$. Функция $F_2(a^\circ, q)$ при фиксированных $a^\circ$, $q$ линейно убывает при изменении параметра $\varkappa$, поэтому при всех $\varkappa\in(1, 3]$ $F_2(a^\circ, 0)\leqslant 0$. Тем самым функция $F_2(a^\circ(q), q$ монотонно возрастает при изменении $q$ и меняет знак при $q\in[0, \infty)$. Следовательно, существует единственное решение уравнения $F_2(a^\circ(q), q)=0$, а значит, и системы (1.9).

Малость $\varepsilon$ позволяет выписать приближенное решение системы (1.9) с точностью до величин порядка $\varepsilon$:

$$\ln \varkappa \ln(8/\varepsilon) \approx \pi(\pi + 2\,\mathrm{arctg}\,q), \quad q \approx \ln(\varkappa/\pi) \tag{1.10}$$

При численном решении системы (1.9) вычислялись индексы различных кривых в плоскости $(\varepsilon, q)$ [8]. Оказалось, что относительная погрешность формулы (1.10) при всех $\varkappa$ не превосходит $10^{-3}$. Результаты расчетов приведены ниже:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varkappa$ | 3,0 | 2,6 | 2,2 | 1,8 | 1,4 | 1,2 | 1,1 | 1,0 |
| $\varepsilon$ | $15\cdot10^{-5}$ | $14\cdot10^{-6}$ | $41\cdot10^{-7}$ | $57\cdot10^{-9}$ | $20\cdot10^{-14}$ | $34\cdot10^{-25}$ | $12\cdot10^{-46}$ | 0 |
| $q\cdot10^2$ | 35 | 30 | 25 | 19 | 11 | 6 | 3 | 0 |

В силу (1.7), (1.5) функции $\Phi(z)$, $\Sigma(z)$ непрерывны всюду, кроме точек $z=\pm1$, где имеют корневые особенности. Асимптотика на бесконечности $\Phi(z)$ и $\Sigma(z)$ имеет вид $\Phi(z)={}^1/_2(1+\lambda/\mu)+o(z^{-1})$; $\Sigma(z)=-\varkappa/2\times$ $\times(1+\lambda/\mu)+o(z^{-1})$, поэтому из (1.3) и (1.4) следует, что решение $(u_1, u_2)$ обладает конечной упругой энергией.

При $\mathrm{Im}\, z=0$ функции $\Phi(z)$, $\Sigma(z)$ удовлетворяют граничным условиям

$$\varkappa\Phi(\eta)+\overline{\Sigma}(\eta)=0, \quad |\eta|>1, \quad \mathrm{Im}\,\Phi(\eta)=\mathrm{Im}\,\Sigma(\eta)=0$$

$$1>|\eta|>a^\circ, \quad \Phi(\eta)-\overline{\Sigma}(\eta)=0, \quad a^\circ>|\eta|$$

Следовательно, выполняется условие (1.1). На отрезке $|x_1|<l$ имеют место соотношения $\sigma_{12}=0$, $u_2=0$, $1>|x_1|>a$, $\sigma_{12}=0$, $\sigma_{22}=-T$, $a>|x_1|$.

Докажем неравенство

$$u_2\geqslant 0, \quad a>|x_1| \tag{1.11}$$

Из формул (1.4), (1.5), (1.8) следует, что на отрезке $|\eta|<a^\circ$:

$$2\mu\frac{\partial u_2{}^\circ}{\partial\eta} = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\varkappa}\,(\varkappa+1)}{\sqrt{1-\eta^2}}\sqrt{\eta^2+q^2}\,\sin\left(\frac{\pi}{2}+\mathrm{arctg}\,(q/\eta)\right) - \Psi_1(\eta)$$

$$\Psi(z) = \frac{z}{\pi}h(z)\left\{\ln\varkappa\int\limits_1^\infty |h^{-1}(t)|\frac{dt}{t^2-z^2} - \int\limits_{a^\circ}^1 |h^{-1}(t)|\left(\pi+\mathrm{arctg}\,(q/t)\frac{dt}{t^2-z^2}\right)\right\}$$

Выделим из $\Psi$ члены, не равные нулю при $z=a^\circ$. При этом учтем, что в силу (1.7) выражение в фигурных скобках обращается в нуль в точке $z=a^\circ$:

$$\Psi_1(z)=\frac{1}{2}\left(\pi+2\operatorname{arctg}\frac{q}{a^\circ}\right)\frac{z}{a^\circ}-\frac{z}{\pi}h_1(z)\left\{\ln\varkappa\int_1^\infty\frac{|h_1^{-1}(t)|\,dt}{t^2-z^2}-\right.$$
$$\left.-\int_{a^\circ}^1\left(\pi\left(1-\frac{t}{a^\circ}\right)+2\operatorname{arctg}\frac{q}{t}-\frac{t}{a^\circ}\operatorname{arctg}\frac{q}{a^\circ}\right)|h_1^{-1}(t)|\frac{dt}{t^2-z^2}\right\}$$

Оценивая интегралы, получаем $(\eta>0)$:

$$0\leqslant\pi/2+\operatorname{arctg}(q/\eta)-\Psi_1(\eta)\leqslant\pi/2(1-\eta/a^\circ)+\operatorname{arctg}(q/\eta)-$$
$$-\eta/a^\circ\operatorname{arctg}(q/a^\circ)+\eta\ln\varkappa/\sqrt{2\pi}\{\ln(\sqrt{(1-\eta)/\varepsilon}+\sqrt{(a^\circ-\eta)/\varepsilon}+1-\sqrt{a^\circ}\}$$

откуда следует что $\partial u_2/\partial\eta<0$ при $\eta\in(p,\ a^\circ)$, где $p=\max(0,\ 1-\varepsilon/2\exp\times\times(2\pi^2/\ln\varkappa))$. Из оценки (1.10) получаем, что $p=0$ при всех $\varkappa$, следовательно

$$\partial u_2^\circ/\partial\eta<0,\quad \eta\in(0,\ a^\circ) \tag{1.12}$$

Так как $u_2(a)=0$, то вследствие (1.12) неравенство (1.11) справедливо при $x_1\in(0,\ a)$, а в силу четности $u_2$ и на всем промежутке $|x_1|<a$. Аналогично доказывается, что $\sigma_{22}\leqslant-T$, $l>|x_1|>a$.

Таким образом, построенное решение удовлетворяет граничному условию (1.2), что завершает доказательство.

Отметим, что существует по крайней мере счетное множество других энергетических решений $u_i^{(k)}$, $\sigma_{ij}^{(k)}$, $a^{(k)}$ $(k=2,\ 3,\ldots)$, удовлетворяющих граничным условиям $\sigma_{12}^{(k)}=0$, $u_2^{(k)}=0$, $1>|x_1|>a^{(k)}$; $\sigma_{12}^{(k)}=0$, $\sigma_{22}^{(k)}=-T$, $|a^{(k)}|>x_1$ и не имеющих особенностей в точках $x_1=\pm a^{(k)}$. Эти решения получаются аналогично построенному выше заменой второго равенства (1.6) на $2\operatorname{Im}\Psi(\eta)=2\pi k\operatorname{sign}\eta$, $1>|\eta|>a^{(k)}/l$ $(k=2,\ 3,\ldots)$. Эти решения не удовлетворяют неравенствам (1.2): $u_2^{(k)}\geqslant0$, $\sigma_{22}^{(k)}\leqslant-T$, $|x_1|<l$.

**2. Исследование построенного решения.** Сравним решение $(u_1,\ u_2)$, определяемое формулами (1.3), (1.4), (1.5), с решением аналогичной задачи без односторонних связей при $|x_1|<l$:

$$\sigma_{12}=0,\quad \sigma_{22}=-T \tag{2.1}$$

Решение задачи (1.1), (2.1) выражается по формулам (1.3), (1.4) через функции [1, 2]:

$$\Phi^*(z)=-i/2(1+\lambda/\mu)(z-iq^*)(1-z^2)^{-1/2}P(z)$$
$$\Sigma^*(z)=-i/2(1+\lambda/\mu)(z+iq^*)(1-z^2)^{-1/2}P(z) \tag{2.2}$$
$$q^*=\ln(\varkappa/\pi),\quad P(z)=((z+1)/(z-1))^{iq^*/2}$$

Функции $\Phi(z)$, $\Sigma(z)$ (1.5), (1.8) представимы в виде

$$\Phi(z)=\Phi_1(z)R(z),\quad \Sigma(z)=\Sigma_1(z)R^{-1}(z) \tag{2.3}$$
$$\Phi_1(z)=-i/2(1+\lambda/\mu)(z-iq)(1-z^2)^{-1/2}P(z)$$
$$\Sigma_1(z)=-i/2(1+\lambda/\mu)(z+iq)(1-z^2)^{-1/2}P(z)$$
$$R(z)=\exp(r(z))$$

$$r(z)=-\frac{zh(z)}{\pi i}\int_1^{a^\circ}\left(q^*\ln\frac{1-t}{1+t}+\pi+2\operatorname{arctg}(q|t)\right)\frac{|h_1^{-1}(t)|\,dt}{t^2-z^2}$$

$$h(z)=((z^2-1)/(z^2-a^{\circ 2}))^{1/2}$$

Для функции $r(z)$ справедлива оценка $|r(z)|\leqslant Cz|h^{-1}(z)|\varepsilon\ln\varepsilon$, где константа $C$ не зависит от $\varepsilon$. Сравнивая формулы (2.2) и (2.3), видим, что вне некоторой окрестности вершин трещины решения задач (1.1), (1.2) и (1.1), (2.1) близки. Расчеты показали, что при $|z-1|>50\varepsilon$ относительная погрешность не превышает $10^{-2}$. Ниже приведены значения производных вертикального смещения верхнего берега трещины при $\varkappa=3$, $W^i=\sqrt{1-\eta^2}\partial u_2{}^\circ/\partial\eta$; $i=1$ соответствует решению задачи (1.1), (1.2), $i=2$ — решению задачи (1.1), (2.1), $i=3$ — асимптотическим формулам

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $0{,}1\,(a^\circ-\eta)/\varepsilon$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 |
| $-W^1$ | 4,45 | 5,09 | 5,67 | 6,16 | 6,52 | 6,72 |
| $-W^2$ | 4,49 | 5,12 | 5,68 | 6,16 | 6,52 | 6,72 |
| $-W^3$ | 4,46 | 5,11 | 5,70 | 6,24 | 6,64 | 6,97 |

Пользуясь малостью $\varepsilon$, можно выписать приближенные выражения для функций $\Phi(z)$, $\Sigma(z)$, справедливые при $|1-z|\sim\varepsilon$. Для этого достаточно сделать замену переменной $\omega=(z-a^\circ)/\varepsilon$ и отбросить малые по $\varepsilon$ члены в формулах (1.5), (1.8):

$$\begin{gathered}\Phi(z)\approx\Phi_2(\omega)=((1+\lambda/\mu)/2)\varkappa^{1/2}((1+q^2)/2)^{1/2}(\varepsilon\omega)^{-1/2}Q(\omega)\\ \Sigma(z)\approx\Sigma_2(\omega)=((1+\lambda/\mu)/2)\varkappa^{1/2}((1+q^2)/2)^{1/2}(\varepsilon\omega)^{-1/2}Q(\omega)\\ Q(\omega)=((\sqrt{\omega}+\sqrt{\omega-1})/(\sqrt{\omega}-\sqrt{\omega-1}))^{iq^*/2}\end{gathered}\tag{2.4}$$

При численных расчетах выяснилось, что до $\omega\sim100$ (т. е. там, где уже точны формулы (2.2)) выражения (2.4) имеют относительную погрешность, не превышающую $10^{-2}$. Об этом свидетельствуют приведенные ранее значения $W^i$ и приводимые ниже значения нормальных напряжений на участке контакта при $\varkappa=3$, $s^i(\eta)=\sqrt{1-\eta^2}\sigma_{22}{}^\circ(\eta)$; $i=1$ соответствует решению задачи (1.1), (1.2), $i=3$ — асимптотическим формулам (2.4):

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(\eta-a^0)/\varepsilon$ | 0,001 | 0,01 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 |
| $s^{-2}$ | −0,0413 | −0,1287 | −0,5975 | −0,8870 | −1,155 | −1,456 | −2,072 |
| $s^3$ | −0,0406 | −0,1286 | −0,5976 | −0,8871 | −1,155 | −1,457 | −2,072 |
| $s^1/s^3$ | 1,017 | 0,999 | 0,999 | 0,999 | 0,999 | 0,999 | 1,000 |

Отметим, что формулы (2.4) соответствуют однородному растяжению полубесконечной трещины с проскальзыванием на участке (0, 1) [3]. В вершине трещины функции $\Phi(z)$, $\Sigma(z)$ имеют корневую особенность $\Phi(z)\sim\Sigma(z)\sim-i/2(1+\lambda/\mu)((1+q^2)/2)^{1/2}(z-1)^{-1/2}$, что, естественно, соответствует особенности типа сцепление — проскальзывание

$$2\mu(u_1{}^\circ+iu_2{}^\circ)(\eta)=-\frac{\lambda+\mu}{\mu}\left(\frac{1+q^2}{2}\right)^{1/2}\times\begin{cases}0, & \eta>1\\ (1-\eta)^{-1/2}, & \eta<1\end{cases}$$

$$(\sigma_{22}{}^\circ-i\sigma_{12}{}^\circ)(\eta)=\frac{1}{2}\frac{\lambda+\mu}{\mu}\left(\frac{1+q^2}{2}\right)^{1/2}\times\begin{cases}i(1+\varkappa)(\eta-1)^{-1/2}, & \eta>1\\ (1-\varkappa)(1-\eta)^{-1/2}, & \eta<1\end{cases}$$

Приближенные функции $\Phi_2(\omega)$, $\Sigma_2(\omega)$ ((2.4)) асимптотически эквивалентны функциям $\Phi(z)$, $\Sigma(z)$ при $z\to1$. Производная упругой энергии $J(l)$ по длине трещины, вычисленная для решения исходной задачи (1.1), (1.2), равна [9]:

$$dJ/dl=T^2l\pi(1+q^2)(\lambda+\mu)/((\lambda+2\mu)\mu)$$

Решение задачи без учета односторонних связей (1.1), (2.1) имеет в точках $x_1=\pm l$ осциллирующую особенность порядка $(1+iq^*)/2$. Производная от энергии $dJ^*/dl$ в этом случае совпадает с $dJ/dl$ с точностью до замены $q$ на $q^*$ [1], и вследствие (1.10) относительная погрешность производной от энергии мала.

Таким образом, показано, что на решение задачи вне малой окрестности вершины трещины, а также на производную от упругой энергии по длине трещины наличие односторонних ограничений практически не оказывает влияния; напряженное состояние в окрестности зоны контакта нужно определить по формуле (2.4).

Автор благодарит Б. А. Шойхета и А. А. Храпкова за постановку задачи и полезные обсуждения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Салганик Р. Л.* О хрупком разрушении склеенных тел.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 5, с. 957—962.
2. *England A. H.* A crack between dissimilar media.— Trans. ASME. Ser. E, J. Appl. Mech., 1965, v. 32, No. 2, p. 400—402.
3. *Симонов И. В.* Динамика трещины отрыва-сдвига на границе раздела двух упругих материалов.— Докл. АН СССР, 1983, т. 271, № 1, с. 65—68.
4. *Comninou M.* The iterface crack.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1977, v. 44, No. 4, p. 631—636.
5. *Malyshev B. M., Salganic R. L.* The strength of adhesive joints using the theory of crack.— Intern. J. Frack. Mech., 1965, v. 1, No. 2, p. 114—128.
6. *Симонов И. В.* Об установившемся движении трещины с участками проскальзывания и отрыва по границе раздела двух упругих материалов.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 3, с. 482—489.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966, 707 с.
8. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971. 239 с.
9. *Качанов Л. М.* Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974, 311 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
10.VI.1985