МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1987

УДК 539.375

АНАЛИЗ РАВНОВЕСИЯ ПЛОСКОЙ ТРЕЩИНЫ С УЧЕТОМ ОБРАЗОВАНИЯ В ОБЛАСТЯХ НАЛЕГАНИЯ ЗОН СКОЛЬЖЕНИЯ И СЦЕПЛЕНИЯ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

ГОЛЬДШТЕЙН Р. В., ЖИТНИКОВ Ю. В.

Рассмотрена трехмерная квазистатическая задача о равновесии плоской трещины-разреза в упругой среде под действием системы объемных сил, изменяющихся в процессе их приложения. В областях налегания берега трещины взаимодействуют по закону сухого трения Кулона. В этом случае в зонах налегания в зависимости от изменения нагрузки могут возникать три характерные области: область скольжения и области сцепления двух типов: в одних скачок смещения отличен от нуля, а в других — отсутствует. В процессе нагружения происходит эволюция этих областей в зависимости от характера изменения внешней нагрузки. Проанализировано асимптотическое поведение решения в окрестности границ характерных типов областей для касательного скачка смещения. Показано, что решение вблизи границ этих областей должно быть несингулярным. При построении решения в классе функций, неограниченных вблизи указанных границ, критерием, определяющим их положение, является условие отсутствия сингулярности. Установлены условия начала процесса скольжения поверхностей трещины, перехода их в состояние сцепления, а также единственность решения при заданном способе нагружения.

Трехмерные задачи о трещинах с условиями трения при наличии двух характерных областей в зоне контакта (области скольжения и сцепления с нулевым скачком смещения) рассматривались в [1–3], а в [4] изучалась асимптотика вблизи этих границ. В рамках плоской задачи теории упругости поведение разреза с трением между берегами при сложном нагружении изучалось в [5, 6], а при наличии трех характерных областей в зоне налегания — в [7, 8].

1. Постановка задачи. Рассмотрим равновесие линейно-упругого изотропного пространства с трещиной, занимающей область в плоскости $x_3=0$, под действием системы объемных сил, изменяющихся в процессе их приложения, как функция параметра θ. В областях налегания поверхности трещины взаимодействуют по закону сухого трения Кулона: $F_{3i}=\rho\sigma V_i/V$, где V — коэффициент трения, $\sigma(x_1, x_2, \theta)\geqslant 0$ — давление, $V_i=\partial U_i/\partial\theta$ — скорость скольжения, $U_i=U_i^+-U_i^-$ — скачок смещения ($i=1, 2$), $V=(V_1^2+V_2^2)^{1/2}$, θ — параметр нагружения (в выражении для силы трения стоит знак плюс, так как скачок смещения отсчитывается от верхней поверхности трещины-разреза).

Исходная задача разбивается на две: симметричную и антисимметричную относительно плоскости $x_3=0$. В первом случае вдоль плоскости Ω возникает скачок нормального смещения, а во втором — касательного [2]. Такое представление имеет место, несмотря на нелинейность задачи, и связано с тем, что нормальные и сдвиговые компоненты скачка смещения не вызывают в плоскости Ω соответственно сдвиговых и нормальных напряжений.

После этого исходная задача решается последовательно. В первой задаче определяется область налегания и распределение на ней нормального напряжения $\sigma_{33}^{\pm}(x_1, x_2, \theta)$ в зонах контакта.

Предположим, что эта задача решена и $\sigma_{33}^{\pm}(x_1, x_2, \theta)$ известно. Во второй задаче при заданном распределении нормального напряжения $\sigma_{33}^{\pm}(x_1, x_2, \theta)$ находятся области сцепления (обозначим ее G, $V_i=0$, $(x_1, x_2)\in G$) и скольжения (обозначается G_1, $V_i\neq 0$, $(x_1, x_2)\in G_1$), а также распределение касательных напряжений. Следует отметить, что область сцепления G здесь может быть двух типов: $u_i=0$ и $u_i\neq 0$.

Краевые условия на плоскости Ω имеют вид

$$u_i(x_1, x_2, \theta)=u_i^+-u_i^-=u_i^0(x_1, x_2, \theta), \quad (x_1, x_2)\in G \tag{1.1}$$

$$\sigma_{3i}^\pm=\rho\sigma V_i/V, \quad (x_1, x_2)\in G_1 \quad (i=1, 2)$$

$$(\sigma_{31}^2+\sigma_{32}^2)^{1/2}\leqslant\rho\sigma, \quad (x_1, x_2)\in\Omega, \quad x_3\to\pm0$$

где u_i^0 — скачок смещения в области G, определяемый предысторией нагружения. Вне области Ω внешние нагрузки заданы распределением объемных сил с плотностью $\rho(x_1, x_2, \theta)$, антисимметричных относительно плоскости $x_3=0$ и изменяющихся как функция параметра θ.

При решении краевой задачи (1.1) удобно перейти от системы внешних нагрузок к краевым условиям на плоскости Ω. Для этого найдем распределение напряжений $-\sigma_{3i}^0(x_1, x_2, \theta)$ в сплошном теле в области, занимаемой трещиной Ω. Затем в краевые условия для напряжений (1.1) в области Ω прибавим напряжения $-\sigma_{3i}^0(x_1, x_2, \theta)$ с противоположным знаком [2], считая, что соответствующая задача теории упругости для тела без трещины решена. После выполнения этой процедуры краевые условия (1.1) примут вид

$$u_i^+-u_i^-=u_i^0(x_1, x_2, \theta), \quad (x_1, x_2)\in G \tag{1.2}$$

$$\sigma=|\sigma_{33}^\pm(x_1, x_2, \theta)|\geqslant0, \quad (x_1, x_2)\in\Omega$$

В (1.2) напряжения изменяются как функции параметра θ. Будем предполагать, что смещение является непрерывной функцией координат (x_1, x_2). В дальнейшем индекс 3 будет опускаться.

2. Свойства сдвиговой задачи. Рассмотрим краевую задачу (1.2). В этом случае в области налегания возможно возникновение трех характерных областей: области скольжения и двух типов областей сцепления: в одних скачок смещения отличен от нуля, а в других равен нулю.

Возникновение трех характерных областей связано с тем, что на трещине давление σ и касательное напряжение σ_i^0 изменяются в процессе нагружения [1, 8]. Наличие областей с фиксированным скачком смещения обусловливает «память» о процессе нагружения.

Для описания возможных режимов нагружения введем понятие траектории нагружения как некоторой кривой в трехмерном пространстве $(\sigma_1^0, \sigma_2^0, \rho\sigma)$. Рассмотрим теперь условие, определяющее начало скольжения в области контакта. При заданном скачке смещения на плоскости Ω напряжения определяются известными соотношениями [9]. В области сцепления имеет равенство $\sigma_i=\sigma_i^0+F_i$, где F_i — сила трения. В силу неравенства $(F_1^2+F_2^2)^{1/2}\leqslant\rho\sigma$ приходим к необходимому условию в области сцепления при решении краевой задачи (1.2)

$$[(\sigma_1-\sigma_1^0)^2+(\sigma_2-\sigma_2^0)^2]^{1/2}\leqslant\rho\sigma \tag{2.1}$$

В левой части (2.1) стоят функции внешних напряжений и скачка смещений на трещине. Запишем условие (2.1) в виде $\sigma_0^2+\tau^2-2\sigma_0\tau\cos\gamma\geqslant\rho^2\sigma^2$, где γ — угол между векторами σ_i и σ_i^0, $\sigma_0=(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^{1/2}$, $\tau=((\sigma_1^0)^2+(\sigma_2^0)^2)^{1/2}$. Это неравенство можно разрешить следующим образом: $\tau\geqslant\sigma_0(\cos\gamma+(\beta^2-\sin^2\gamma)^{1/2})$, $0\leqslant\tau\leqslant\sigma_0(\cos\gamma-(\beta^2-\sin^2\gamma)^{1/2})$, $\beta=\rho\sigma/\sigma_0$. Геометрически это означает, что конец вектора должен выйти за круг радиуса $\rho\sigma$.

Используя свойство положительности функционала упругой энергии и предполагая, что области Ω, G таковы, что решение смешанной задачи теории упругости для полупространства [9] единственно, а нагрузки σ_i^0 распределены на области непрерывно, можно доказать следующее утверждение об изменении скачка смещения на трещине при нагружении.

Утверждение 1. При нагружении твердого тела с трещиной скачок смещения $u_i(x_1, x_2, \theta)$ является непрерывно дифференцируемой функцией параметра нагружения θ.

Для доказательства сделанного утверждения проварьируем напряженное состояние. Дадим приращение внешним нагрузкам и предположим, что на трещине существует точка $(x_1^0, x_2^0)\in\Omega$, в которой выполняется неравенство $(\delta u_1^2+\delta u_2^2)^{1/2}>0$.

Представим напряженное состояние в виде суперпозиции напряженных состояний до и после вариации. Краевая задача в приращениях будет иметь вид

$$\delta u_i = \delta u_i^+ - \delta u_i^- = 0, \quad (x_1, x_2) \in G \tag{2.2}$$

$$\delta \sigma_i = \delta \sigma_i^0 + \delta F_i, \quad (x_1, x_2) \in G_1$$

Упругая энергия, соответствующая состоянию (2.2), равна [9]

$$W_{\delta u_i} = -\frac{1}{2} \int_{G_1} \delta u_i \left(\delta \sigma_i^0 - F_i^0 + \rho(\sigma + \delta\sigma) \frac{\delta u_i}{\delta u} \right) ds \tag{2.3}$$

где F_i^0 — сила трения до вариации, $ds = dx_1 dx_2$.

Обозначим $\delta\tau = (\delta\sigma_i^0 \delta\sigma_i^0)^{1/2}$, $\delta u = (\delta u_i \delta u_i)^{1/2}$, γ — угол между векторами δu_i и $\delta\sigma_i^0$, а γ_0 — угол между δu_i и F_i^0. Неравенство (2.3) примет вид

$$W_{\delta u_i} = \frac{1}{2} \int_{G_1} \delta u (\delta\tau \cos\gamma + \rho\sigma(\cos\gamma_0 - 1) - \rho\delta\sigma) ds \geqslant 0 \tag{2.4}$$

Из положительности упругой энергии следует, что в любой точке скольжения при $\delta\tau$, $\delta\sigma \to 0$ должно быть $\gamma_0 \to 0$ и $\delta u \to 0$. Предположим, что это не так и существует точка (x_1, x_2), а по непрерывности и ее ε-окрестность, где при $\delta\theta \to 0$, $\gamma_0 \to \gamma_0' \neq 0$ и $\delta u \to \delta u_0 \neq 0$. Таким образом, поскольку при $\varepsilon\theta \to 0$, $\delta\sigma_i^0 \to 0$, то стремление $\gamma_0 \to \gamma_0'$ означает, что F_i не стремится к F_i^0, т. е. имеется конечное приращение силы трения, а следовательно, и $\delta u \to \delta u_0 \neq 0$ — конечное приращение скачка смещения. И наоборот, если $\delta u \to \delta\ u_0 \neq 0$, а $\delta\sigma_i^0 \to 0$, то это возможно только, когда $\Delta F_i = F_i - F_i^0 \not\to 0$, а следовательно, $\gamma_0 \to \gamma_0' \neq 0$. В этом случае при $\delta\theta \to 0$ имеем

$$W_{\delta u_i} \simeq -\frac{1}{2} \int_{\varepsilon} \delta u \rho\sigma (1 - \cos\gamma_0') ds < 0$$

Таким образом получили, что упругая энергия отрицательна, что противоречит (2.4). Следовательно, необходимо, чтобы $\gamma_0 \to 0$. В этом случае функция $u_i(x_1, x_2, \theta)$ является непрерывно дифференцируемой функцией θ. Это означает, что приращение скачка смещения всегда направлено вдоль линии скольжения и изменяется непрерывно. Утверждение 1 доказано. Одним из его следствий является следующее

Утверждение 2. Для возникновения приращения скачка смещения $\delta u_i(x_1, x_2, \theta)$ на трещине при вариации напряжений $\delta\sigma_i^0(x_1, x_2, \theta)$, $\delta\sigma(x_1, x_2, \theta)$ необходимо, чтобы существовала точка $(x_1, x_2) \in \Omega$, для которой

$$\delta\tau(x_1, x_2, \theta) \cos\gamma \geqslant \rho\delta\sigma(x_1, x_2, \theta) \tag{2.5}$$

Действительно, упругая энергия, соответствующая состоянию (2.2), согласно доказанному утверждению и выражению (2.4) при $\delta\theta \to 0$ в главном члене равна

$$W_{\delta u_i} = \frac{1}{2} \int_{G_1} \delta u (\delta\tau \cos\gamma - \rho\delta\tau) ds \geqslant 0 \tag{2.6}$$

Для положительности упругой энергии (2.6) необходимо, чтобы существовала точка (x_1, x_2), в которой выполняется (2.5), что и доказывает утверждение 2.

Неравенство (2.5) определяет условие непрерывного изменения скачка смещения в области скольжения при нагружении. Если вдоль области скольжения при нагружении не выполняется неравенство (2.5), то в этом случае скачок смещения не изменяется, т. е. область скольжения переходит в область сцепления.

Из (2.5) также следует, что при $\delta\sigma \geqslant 0$ (увеличение нормального давления) приращение сдвигового напряжения всегда направлено в сторону скорости скольжения ($0 < \gamma < \pi/2$), а при $\pi/2 < \gamma < \pi$ необходимо, чтобы нормальное давление уменьшалось $\delta\sigma < 0$.

Наиболее просто соотношения (2.1), (2.5) выглядят для разрезов в рамках плоской задачи теории упругости. В этом случае в области скольжения $\sigma_{12}=\sigma_{12}^0+\rho\sigma\cos\gamma$, σ_{12}^0 — сдвиговое напряжение, определяемое внешней нагрузкой, $\gamma=0$ и $\gamma=\pi$ в зависимости от направления скольжения (ось x_2 нормальна линии разреза). Неравенства (2.1), (2.5) примут вид

$$|\sigma_{12}-\sigma_{12}^0|\leqslant\rho\sigma,\quad \delta\tau\cos\gamma\geqslant\rho\delta\sigma,\quad \gamma=0,\ \pi,\quad \delta\tau=|\delta\sigma_{12}| \tag{2.7}$$

Замечание. В предыдущих рассуждениях предполагалось, что заданные напряжения распределены непрерывно вдоль трещины. На основе этого были получены качественные утверждения о характере скольжения поверхностей трещины.

Рассмотрим случай действия сосредоточенных сил на поверхностях трещины. Предположим, что нормальные напряжения распределены непрерывно, а сдвиговые имеют вид $\sigma_i=\tau_i\delta(x_1)\delta(x_2)$ $(i=1,\ 2)$.

Утверждение 3. Если $\delta\tau=(\delta\tau_1^2+\delta\tau_2^2)^{1/2}>0$, то всегда существует на трещине область скольжения и направление скольжения может изменяться скачком (т. е. скорость скольжения не является непрерывной функцией параметра θ). В этом случае область $D_{\delta\tau}$, где может быть скачок смещения содержит точку приложения сосредоточенной силы: $D_{\delta\tau}\ni(0,\ 0)$ и при $\delta\tau\to0$ стягивается к ней.

Действительно, так как $\delta\tau\delta(x_1)\delta(x_2)>\rho\sigma(0,\ 0)$, то условие (2.1) не выполняется и процесс скольжения всегда имеет место.

Рассмотрим функционал упругой энергии для краевой задачи (2.2):

$$W_{\delta u_i}=-\frac{1}{2}\int\limits_{G_1}\delta u_i\delta\sigma_i\,ds=\frac{1}{2}\Big[-\delta\tau_i\delta u_i-\int\limits_{D_{\delta\tau}}\rho\,\sigma(1-\cos\gamma)\,\delta u\,ds-$$
$$-\int\limits_{G_1\setminus D_{\delta\tau}}\rho\delta u\delta\sigma\,ds\Big]\geqslant0$$

где γ — угол между δu_i и F_i, $D_{\delta\tau}$ — область, где имеет место скачок направления скольжения, $G_1\setminus D_{\delta\tau}$ — область скольжения, где скорость скольжения непрерывна. Покажем теперь, что необходимо, чтобы $D_{\delta\tau}$ стягивалась в точку. Действительно, $-\delta\tau_i\delta u_i\sim\delta\theta^2$, $\int\sigma(1-\cos\gamma)\delta u ds\sim S_{\delta\tau}\delta\theta$ (интеграл берется по области $D_{\delta\tau}$, через $S_{\delta\tau}$ обозначена ее площадь). Если $S_{\delta\tau}$ не стремится к нулю, то при $\delta\theta\to0$ получим $W_{\delta u_i}<0$, начиная с некоторого $\delta\theta^*>0$, что невозможно. Следовательно, область $D_{\delta\tau}$ стягивается к точке приложения силы при $\delta\tau>0$. Поскольку всегда $W_{\delta u_i}>0$, необходимо, чтобы $-\delta\tau_i\delta u_i-\int\delta u\delta\sigma ds>0$ (интеграл — по области $G\setminus D_{\delta\tau}$). При $\delta\sigma\geqslant0$ получим $-\delta\tau_i\delta u_i>0$, т. е. приращение смещения направлено в сторону приращения сдвиговой силы. Если же $\delta\tau=0$, то при $\delta u>0$ необходимо $\delta\sigma\leqslant0$.

Таким образом, приложение сосредоточенной сдвиговой силы отличается от случая непрерывной нагрузки как наличием скачков в направлении скольжения, так и условиями начала подвижки.

3. Условия на границе зон скольжения и сцепления. Рассмотрим краевую задачу (1.2). Установим критерий, позволяющий определить положение границ области скольжения и сцепления. Для этого проанализируем поведение решения в ее окрестности.

Введем локальную систему координат x, y, z (ось z направлена по касательной к границе области скольжения, ось y нормальна плоскости Ω, $x\leqslant0$ соответствует области сцепления). Тогда в силу (1.2) имеем при $z=0$:

$$u_\alpha^+-u_\alpha^-=u_\alpha^0(x,\ \theta),\quad x\geqslant0 \tag{3.1}$$
$$\sigma_{y\alpha}^\pm=\sigma_{y\alpha}^0+\rho\sigma V_\alpha/V;\quad \alpha=x,\ z,\quad y\to\pm0$$

Напряженное состояние в локальной системе координат будет представляться в виде суммы двух напряженных состояний — плоской деформации и антиплоского сдвига [10, 11]:

$$\mu u_z'=\mathrm{Re}\,\chi(\eta),\quad \sigma_{xz}-i\sigma_{yz}=\chi(\eta) \tag{3.2}$$

$$\sigma_x+\sigma_y=2[\Phi(\eta)+\overline{\Phi(\eta)}], \quad \sigma_y-i\sigma_{xy}=\Phi(\eta)+\Omega(\overline{\eta})+(\eta-\overline{\eta})\overline{\Phi'(\eta)}$$

$$2\mu(u_x'+iu_y')=\varkappa\Phi(\eta)-\Omega(\overline{\eta})+(\eta-\overline{\eta})\overline{\Phi'(\eta)}, \quad u_\alpha'=\partial u_\alpha/\partial x$$

$$\Omega(\eta)=\Phi(\eta)+\eta\overline{\Phi'(\eta)}+\overline{\Psi}(\eta)$$

где $\chi(\eta)$, $\Phi(\eta)$, $\Omega(\eta)$ — комплексные потенциалы [10, 11], $\varkappa=3-4\nu$, $\mu=E/2(1+\nu)$ — модуль сдвига, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

Используя (3.1), (3.2), приходим к задаче сопряжения

$$\Gamma_\alpha^+ + \Gamma_\alpha^- = -2i(\sigma_{y\alpha}^0+\rho\sigma V_\alpha/V), \quad x\leqslant 0$$

$$\Gamma_\alpha^+ - \Gamma_\alpha^- = -ig_{\alpha 0}', \quad x\geqslant 0 \tag{3.3}$$

где $g_\alpha'=dg_\alpha/dx$, $g_z=iu_z\mu$, $\Gamma_z=2\Phi(\eta)$, $\Gamma_z=\chi(\eta)$, $\Phi(\eta)=\Omega(\eta)$, $g_x=iu_x\mu/(1-\nu)$ $(\alpha=x,\ z)$. Если один из индексов — в скобках, то суммирование не производится.

Рассмотрим каноническое решение задачи (3.3) $x_0=\eta^{1/2}$, для которой $x_0^+=x_0^-$, $x\geqslant 0$; $x_0^+=-x_0^-$, $x\leqslant 0$, $y\to\pm 0$. Решение краевой задачи (3.3) в классе функций, ограниченных на бесконечности и неограниченных в точке $\eta=0$, имеет вид [12]

$$\Gamma_\alpha(\eta)=\frac{1}{2\pi i x_0(\eta)}\left[\int_{-\infty}^{0}\frac{i\sigma_{y\alpha}x_0^+\,dt}{t-\eta}-\int_{0}^{\infty}\frac{ig_{\alpha 0}'x_0^+\,dt}{t-\eta}\right]+\frac{D_\alpha}{x_0(\eta)}$$

$$g_{x0}=iu_x^0\mu/(1-\nu), \quad g_{z0}=iu_z^0\mu \tag{3.4}$$

$$\sigma_{y\alpha}=-2(\sigma_{y\alpha}^0+\rho\sigma V_\alpha/V)$$

где D_α — константа, определяемая из условий на бесконечности. Для оценки первого интеграла рассмотрим функции $w_\alpha={}^1/_2 i\sigma_{y\alpha}x_0(\eta)$, а для второго — функции $w_{1\alpha}=-{}^1/_2 ig_{\alpha 0}'x_1(\eta)$; $x_1(\eta)=\eta^{1/2}$ — в плоскости x, y разрез вдоль положительной полуоси.

С использованием обозначений

$$M_\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_{y\alpha}x_0\frac{dt}{t-\eta}, \qquad M_{1\alpha}=-\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}g_{0\alpha}'x_0\frac{dt}{t-\eta}$$

получим $(M_\alpha-w_\alpha)^+=(M_\alpha-w_\alpha)^-$ и $(M_{1\alpha}-w_{1\alpha})^+=(M_{1\alpha}-w_{1\alpha})^-$ при $y\to\pm 0$. Следовательно, функции $(M_\alpha-w_\alpha)$ и $(M_{1\alpha}-w_{1\alpha})$ — аналитические в окрестности точки $\eta=0$ и по теореме Тейлора представимы рядом.

Таким образом, вблизи точки $\eta=0$ функции $\Phi(\eta)$, $\chi(\eta)$ имеют представление

$$\Gamma_\alpha={}^1/_2 i\sigma_{y\alpha}+{}^1/_2 g_{0\alpha}'x_1(\eta)x_0^{-1}(\eta)+R_{\alpha n}(\eta)x_0^{-1}(\eta)$$

$$R_{\alpha n}(\eta)=-\sum_{k=1}^{n}A_k\eta^{k-1}\left(k-\frac{1}{2}\right)i \tag{3.5}$$

Распределение смещений и напряжений получим подставляя (3.5) в (3.2):

$$\sigma_{y\alpha}^{\pm}=\sigma_{y\alpha}^0+\rho\sigma V_\alpha/V \quad (x\leqslant 0)$$

$$\sigma_{y\alpha}^{\pm}=\sigma_{y\alpha}^0+\rho\sigma V_\alpha/V+({}^1/_2 A_{1\alpha}x^{-1/2}+{}^3/_2 A_{2\alpha}x^{1/2}+\ldots+A_{n\alpha}x^{n-3/2}(n-{}^1/_2)) \quad (x\geqslant 0) \tag{3.6}$$

$$u_\alpha(x,\theta)=u_\alpha^0(x,\theta) \quad (x\geqslant 0)$$

$$u_\alpha(x,\theta)=u_\alpha^0(x,\theta)+B_{(\alpha)}(A_{1\alpha}r^{1/2}-A_{2\alpha}r^{3/2}+\ldots+A_{n\alpha}r^{n-1/2}(-1)^{n+1}) \quad (x\leqslant 0)$$

$$B_{(x)}=2(1-\nu)/\mu, \quad B_{(z)}=2/\mu$$

Поскольку в области сцепления напряжения ограничены, то необходимо, чтобы $A_{1\alpha}=0$. В этом случае напряжения в области сцепления ограничены, а в окрестности скачок смещений и напряжения — непрерывно дифференцируемые функции [13].

Скачок смещения является непрерывно дифференцируемой функцией; следовательно, слагаемое $u_\alpha(x,\ \theta)$ при $x \geqslant 0$ в окрестности границы области скольжения определяет его значение в состоянии сцепления. Поэтому изменение скачка смещения $u_\alpha(x,\ \theta)$ в области скольжения определится разностью $u_\alpha(x,\ \theta)-u_\alpha(x,\ \theta_0)$ в (3.6) при $x \leqslant 0$. При этом случаи $\delta u_\alpha > 0$ или $\delta u_\alpha < 0$ при вариации параметра нагружения соответствуют неравенствам $A_{2\alpha}<0$ или $A_{2\alpha}>0$. В этом случае $\sigma_{y\alpha}=\sigma_{y\alpha}{}^0-\rho\sigma B_{(\alpha)}A_{2\alpha}/ /(B_{(x)}^2 A_{2x}{}^2+B_{(z)}^2 A_{2z}{}^2)^{1/2},\ x \leqslant 0$.

Таким образом, при построении решения в классе функций, неограниченных вблизи границ области скольжения уравнением, определяющим эту границу, является условие непрерывно дифференцируемости скачка смещения в окрестности границы («плавности смыкания»):

$$\lim_{(x,y)\to Q} u_\alpha'(x,y)=u_\alpha{}^{0\prime}(x^0,y^0), \qquad Q(x^0,y^0)\in\Gamma \tag{3.7}$$

Из полученной асимптотики и непрерывной дифференцируемости скачка смещения по θ следует, что решение не может быть по одной оси сингулярным, а по другой — регулярным и изменение смещения вдоль оси x возможно, только когда $F_z=0$, $\sigma_{yz}=\mathrm{const}$ вблизи границы зоны скольжения.

4. Теорема единственности. Докажем теорему единственности, которая утверждает, что распределение скачков смещения и скоростей поверхностей трещины-разреза в конечной точке заданной траектории нагружения единственно.

Доказательство. Будем предполагать, что области скольжения трещины-разреза таковы, что решения первой и второй задач теории упругости единственны [14]. В силу доказанного выше скачок смещения на трещине является непрерывно дифференцируемой функцией по параметру θ и непрерывной по координате $(x_1,\ x_2)$, а вблизи границы области скольжения — непрерывно дифференцируемой функцией по координатам $(x_1,\ x_2)$.

Предположим, что теорема единственности не выполняется. Это значит, что существует такое значение параметра нагружения θ_0 и точка $(x_1{}^0,\ x_2{}^0)$, а вместе с ней и ее ε-окрестность, где для одной и той же траектории нагружения имеют место различные скорости скольжения. При $\theta>\theta_0$ в ε-окрестности точки $(x_1{}^0,\ x_2{}^0)$ скорости скольжения будут различны, а следовательно будут различны и скачки смещений $\Delta u_i=\int V_i d\theta$ (интеграл берется от θ_0 до θ) в этой окрестности.

Предположим, что $\theta_0=0$, т. е. совпадает с начальным значением траектории нагружения. Напряженное состояние для двух различных случаев обозначим индексами 1 и 2: $\sigma_{ij}^{(1)},\ u_i{}^{(1)},\ V_i{}^{(1)};\ \sigma_{ij}^{(2)},\ u_i{}^{(2)},\ V_i{}^{(2)}$. Тогда на трещине $\delta\sigma_i{}^{(k)}=\delta\sigma_i{}^0+\rho\delta\sigma u_i{}^{(k)}/u^{(k)}$ $(k=1,\ 2)$ для каждого состояния. Вычтем теперь одно напряженное состояние из другого. Краевая задача в этом случае примет вид $u_i=u_i{}^{(1)}-u_i{}^{(2)},\ (x_1,\ x_2)\in L\backslash\varepsilon,\ \sigma_i= \neq\sigma_i{}^{(1)}-\sigma_i{}^{(2)}=\rho\delta\sigma(u_i{}^{(1)}/u^{(1)}-u_i{}^{(2)}/u^{(2)})$.

Упругая энергия, соответствующая этому состоянию, равна (интегрирование здесь и ниже проводится по ε-окрестности точки $(x_1{}^0,\ x_2{}^0)$):

$$W=-{}^1/_2\int(u_i^{(1)}-u_i^{(2)})\,\rho\delta\sigma(u_i^{(1)}/u^{(1)}-u_i^{(2)}/u^{(2)})\,ds=$$

$$=-{}^1/_2\int\rho\delta\sigma(u^{(1)}+u^{(2)})\,(1-\cos\gamma)\,ds<0$$

$$ds=dx_1dx_2,\quad \cos\gamma=u_i{}^{(1)}u_i{}^{(2)}/u^{(1)}u^{(2)}$$

Упругая энергия получилась меньше нуля, что говорит о невозможности двух распределений скоростей смещения при $\theta=0$.

Если же предположим, $u_i{}^{(2)}=0$, а $u_i{}^{(1)}\neq 0$ при $\theta>0$, то в этом случае $\sigma_i{}^{(1)}-\sigma_i{}^{(2)}= =\rho\delta\sigma u_i{}^{(1)}/u^{(1)}-F_i{}^{(2)}$ (второе состояние соответствует области сцепления). В этом случае получим, что упругая энергия равна

$$W=-{}^1/_2\int u_i^{(1)}(\rho\delta\sigma u_i^{(1)}/u^{(1)}-F_i^{(2)})\,ds=-{}^1/_2\int(\rho\delta\sigma-F^{(2)}\cos\gamma)\,u^{(1)}\,ds<0$$

Таким образом, в начальный момент нагружения $\theta=0$ поле смещений единственно при заданных $\delta\sigma_i{}^0$, $\rho\delta\sigma$.

Рассмотрим случай $\theta=\theta_0$, а также два напряженных состояния: $\sigma_{ij}^{(1)}$, $\sigma_{ij}^{(2)}$. В силу непрерывности скорости скольжения при $\theta=\theta_0$ совпадают для двух состояний $V_i{}^{(1)}=V_i{}^{(2)}=V_i$, а в дальнейшем отличаются, т. е. траектории движения материальной частицы в заданной точке трещины имеют общую касательную.

Разложим скачок смещения и скорости скольжения в окрестности точки $\theta=\theta_0$:

$$u_i^{(k)}=u_i(x_1,\ x_2,\ \theta_0)+V_i(x_1,\ x_2,\ \theta_0)\delta\theta+A_i^{(k)}\delta\theta^{m_k}$$

$$V_i^{(k)}=V_i+m_k A_i^{(k)}\delta\theta^{m_k-1} \tag{4.1}$$

$$V^{(k)}=V(1+m_k A_i^{(k)}V_i\delta\theta^{m_k-1}/V^2),\quad \delta\theta>0\quad (k=1,\ 2)$$

Аналогично предыдущему вычтем одно состояние из другого и составим выражение упругой энергии для нового состояния с учетом (4.1)

$$W=-{}^1/_2\int\limits_{e}\rho\sigma(u_i^{(1)}-u_i^{(2)})(V_i^{(1)}/V^{(1)}-V_i^{(2)}/V^{(2)})\,ds=-{}^1/_2\int\rho\sigma T\,ds \tag{4.2}$$

$$T=(m_1 A_i^{(1)}A_i^{(1)}\lambda\theta^{2m_1-1}+m_2 A_i^{(2)}A_i^{(2)}\delta\theta^{2m_2-1}-A_i^{(1)}A_i^{(2)}(m_1+m_2)\delta\theta^{m_1+m_2-1}-$$

$$-(A_i^{(1)}V_i)^2 m_1\delta\theta^{2m_1-1}V^{-2}+(A_i^{(1)}V_i)(A_i^{(2)}V_i)\delta\theta^{m_1+m_2-1}(m_1+m_2)V^{-2}-$$

$$-(A_i^{(2)}V_i)^2\delta\theta_{m_2}^{2m_2-1}V^{-2})V^{-1}$$

Если $m_1=m_2=m$, то выражение (4.2) примет вид

$$W=-{}^1/_2\int\rho\sigma m\delta\theta^{2m-1}D^2\sin^2\gamma\,ds<0$$

$$\cos\gamma=(A_i^{(1)}-A_i^{(2)})V_iD^{-1}V^{-1},\quad D^2=(A_i^{(1)}-A_i^{(2)})(A_i^{(1)}-A_i^{(2)})$$

Если $m_1>m_2$, то $W=-{}^1/_2\int\rho\sigma\delta\theta^{2m_1-1}m_2(A^{(2)})^2\sin^2\gamma\,ds<0$. Таким образом, получаем, что упругая энергия отрицательна.

Рассмотрим случай $u_i^{(2)}=u_i(\theta_0)$, $\theta>\theta_0$ (возникла область сцепления), а $u_i^{(1)}=u_i$ (скольжение). Аналогично предыдущему получим $W=-{}^1/_2\int\delta u(\rho\sigma-F^{(1)}\cos\gamma)\,ds<0$, где $F_i^{(1)}$ – сила трения в области сцепления, $F^{(1)}=(F_i^{(1)}F_i^{(1)})^{1/2}$.

Таким образом, предполагая, что существует значение $\theta=\theta_0$, где единственность поля скоростей не выполняется, получаем напряженное состояние, для которого упругая энергия отрицательна, что показывает невозможность существования такого напряженного состояния и неверность нашего начального предположения. Следовательно, если решение существует, то оно единственно для заданной траектории нагружения.

Следствие 1. Рассмотрим трещину-разрез Ω со скачком смещения $u_i(x_1,x_2,\theta)$ и трещину-разрез $\Omega_1\subset G$. Если при вариации нагрузки на трещине Ω_1 с заданным скачком смещения u_i в области $\Omega\backslash\Omega_1$ возникает область скольжения G_1', то вдоль ее границы существуют участки, не совпадающие с границей Ω, где решение сингулярно.

Действительно, если бы следствие 1 не выполнялось, т. е. граница области скольжения была бы не сингулярна, то не выполнялась бы и теорема единственности.

Следствие 2. Для того чтобы область скольжения G_1 при вариации внешних нагрузок расширялась ($\delta G_1\equiv G_1$), необходимо и достаточно, чтобы при вариации нагрузок и фиксировании границы области G_1 существовали ее участки, на которых коэффициенты интенсивности напряжений были бы отличны от нуля.

Следствие 2, аналогичное следствию 1, доказывается из полученной асимптотики (3.6) и теоремы единственности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моссаковский В. И., Рыбка В. М.* Неосесимметричное сжатие упругого пространства, ослабленного круговой щелью.– В кн.: Гидроаэромеханика и теория упругости. Днепропетровск: Изд-е Днепропетровск. ун-та, 1976, вып. 23, с. 149–156.
2. *Гольдштейн Р. В., Спектор А. А.* Вариационный метод исследования смешанных пространственных задач о плоском разрезе в упругой среде при наличии проскальзывания и сцепления его поверхностей.– ПММ, 1983, т. 47, вып. 2, с. 276–285.
3. *Спектор А. А.* Некоторые пространственные статические контактные задачи теории упругости с проскальзыванием и сцеплением.– Изв. АН СССР, МТТ, 1981, № 3, с. 12–25.
4. *Спектор А. А.* Асимптотика решений некоторых пространственных контактных задач с проскальзыванием и сцеплением около линий раздела граничных условий.– Изв. АН АрмССР. Механика, 1980, т. 33, № 11, с. 43–53.
5. *Walsh J. B.* The effect of cracks on the uniaxial elastic compression of rocks.— J. Geophys. Res., 1965, v. 70, No. 2, p. 399–411.
6. *Беркович Л. Е., Моссаковский В. И., Рыбка В. М.* Влияние истории внешнего нагружения на напряженно-деформированное состояние трещиноватой среды при наличии трения.– Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 4, с. 137–142.

7. *Житников Ю. В., Тулинов Б. М.* Деформационные характеристики среды, ослабленной трещинами со взаимодействующими берегами.– Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 5, с. 44–54.
8. *Житников Ю. В., Тулинов Б. М.* Взаимодействие между берегами разреза в сложнонапряженном состоянии.– Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 4, с. 168–172.
9. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
10. *Черепанов Г. М.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
11. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1954. 648 с.
12. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
13. *Баренблатт Г. И.* О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Общие представления и гипотезы. Осесимметричные трещины.– ПММ, 1959, т. 23, вып. 3, с. 434–444.
14. *Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В.* Трехмерные задачи математической теории упругости. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1968. 627 с.

Москва

Поступила в редакцию
3.I.1986