

УДК 539.376

**ОПИСАНИЕ УПРОЧНЕНИЯ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ
С ПОМОЩЬЮ ТЕНЗОРНОЙ ВНУТРЕННЕЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

АСТАФЬЕВ В. И.

Для описания первой и второй стадий ползучести в условиях сложного напряженного состояния привлекается внутренняя переменная тензорного характера — тензор плотности дислокационного момента. Кинетические уравнения для скоростей деформаций ползучести и скорости изменения внутренней переменной позволяют описать анизотропный характер упрочнения при ползучести — отклонение от пропорциональности девиаторов тензора напряжений и скоростей деформаций ползучести при изменении вида напряженного состояния, трансформации поверхности ползучести, интенсификации рассеяния энергии и т. п. Оказывается, что точный смысл внутренней переменной не нужен для адекватного описания процесса ползучести и изменения внутренней энергии при структурных изменениях. Достаточно лишь, чтобы эта внутренняя переменная качественно отражала все процессы, происходящие на микроуровне во время ползучести.

1. Процесс ползучести, происходящий в металле при высокой температуре (0,4–0,5 температуры плавления), является типичным примером необратимого процесса, описание которого естественно производить с позиций феноменологической термодинамики необратимых процессов. За последние годы термодинамика необратимых процессов стала все шире привлекаться для описания процессов пластичности и ползучести как в изотермических, так и неизотермических условиях [1, 2]. Любой термодинамический процесс должен удовлетворять закону сохранения энергии (первый закон термодинамики) и закону неубывания энтропии (второй закон термодинамики). Локальная формулировка этих законов с учетом закона сохранения массы, импульса и момента импульса имеет вид [1–3]:

$$u^* = \text{tr}(\sigma \cdot \dot{\epsilon}) - \text{div } \mathbf{q} + r \quad (1.1)$$

$$s^* = -\text{div}(\mathbf{q}/T) + r/T + \gamma, \quad \gamma \geq 0 \quad (1.2)$$

В соотношениях (1.1), (1.2) точка сверху обозначает дифференцирование по времени t , u , r , s , γ — объемные плотности внутренней энергии, внутренних тепловых источников, энтропии и скорости производства энтропии, T — температура, \mathbf{q} — вектор поверхностной плотности теплового потока, σ , $\dot{\epsilon}$ — симметричные тензоры напряжений и скоростей деформаций, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ — внутреннее произведение тензоров \mathbf{A} и \mathbf{B} , $\text{tr } \mathbf{A}$ — след тензора \mathbf{A} . Соотношение (1.2) записывается обычно в виде неравенства Клаузиуса — Дюгема [3]:

$$T\gamma = \text{tr}(\sigma \cdot \dot{\epsilon}) - \dot{\psi} - sT^* - (\mathbf{q} \cdot \text{grad } T)/T \geq 0 \quad (1.3)$$

где $\psi = u - Ts$ — объемная плотность свободной энергии. Для описания необратимого процесса деформирования в металлах (пластичности, ползучести и т. п.) часто привлекаются внутренние переменные (структурные параметры) $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ [1, 2, 4]. Представив $\dot{\epsilon}$ в виде суммы $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon} + \dot{\mathbf{p}}$ скоростей мгновенных упругих деформаций $\dot{\epsilon}$ и скоростей деформаций ползучести $\dot{\mathbf{p}}$ и выбрав ϵ и T в качестве независимых переменных термодинамического процесса, из (1.3) можно получить [1–3] (суммирование производится по k от 1 до n):

$$\sigma = \partial\psi/\partial\epsilon, \quad s = -\partial\psi/\partial T \quad (1.4)$$

$$T\gamma = \text{tr}(\sigma \cdot \mathbf{p}') - \Sigma(\partial\psi/\partial\chi_k)\chi_k' - (\mathbf{q} \cdot \text{grad } T)/T \geq 0 \quad (1.5)$$

Неравенство (1.5) разбивается обычно на два неравенства [3] для тепловой и механической составляющей функции плотности диссипации $T\gamma$:

$$-(\mathbf{q} \cdot \text{grad } T)/T \geq 0 \quad (1.6)$$

$$D = \text{tr}(\sigma \cdot \mathbf{p}') - \Sigma(\partial\psi/\partial\chi_k)\chi_k' \geq 0 \quad (1.7)$$

Из (1.1)–(1.7) следует, что для описания термодинамического процесса необходимо задать функции $\psi(\mathbf{e}, T, \chi_k)$ и $\mathbf{q}(\mathbf{e}, T, \text{grad } T)$, а также описать кинетику неупругого деформирования $\mathbf{p}'(\mathbf{e}, T, \chi_k)$ и изменения структуры $\chi_k'(\mathbf{e}, T, \chi_k)$. Выбранные функции при этом должны быть таковы, чтобы для любого допустимого термодинамического процесса выполнялись неравенства (1.6) и (1.7). Закон сохранения энергии (1.1) с учетом (1.4) и (1.7) может быть записан в форме уравнения теплопроводности $Ts = -\text{div } \mathbf{q} + r + D, D \geq 0$.

2. Удовлетворительное описание необратимого термодинамического процесса может быть достигнуто за счет правильного выбора внутренних переменных и соотношений, описывающих кинетику их развития. Процесс неупругого деформирования, происходящий в металлах, является следствием движения дислокаций [5–7], которому препятствуют силы атомного взаимодействия, дефекты (включения, границы зерен), дислокации иной ориентации. Плотность дислокаций увеличивается с ростом неупругих деформаций, что также уменьшает возможность их перемещения. Эти явления лежат в основе механизма упрочнения. При высокой температуре процесс упрочнения уравнивается таким процессом, как возврат. В основе этого процесса лежит скольжение винтовых дислокаций, а также некоторые структурные перестройки в металле. Благодаря термической активации процессы возврата играют существенную роль в явлении ползучести. Следовательно, выбираемые внутренние переменные должны соответствовать дислокационному механизму неупругого деформирования и отражать упомянутые выше особенности движения дислокаций.

В континуальной теории дислокаций используется тензор плотности дислокаций α [5–7], который для изолированной дислокационной линии L определяется как диадное произведение $\alpha = \tau \mathbf{b} \delta(L)$ единичного вектора касательной τ к дислокационной линии L и вектора Бюргерса \mathbf{b} данной дислокации, $\delta(L)$ — дельта-функция Дирака на линии L . Экспериментально же, как правило, определяется объемная плотность дислокаций ρ — полная длина всех дислокационных линий в единице объема. Исходя из этих соображений, а также учитывая, что компоненты тензора α не независимы, а удовлетворяют уравнению $\text{div } \alpha = 0$ [5–7], удобнее в качестве внутренней переменной выбрать тензор дислокационного момента \mathbf{d} , характеризующего суммарную площадь и ориентацию всех дислокационных петель с вектором Бюргерса \mathbf{b} в единице объема металла. Для изолированной дислокационной петли L тензор \mathbf{d} представляется в виде диадного произведения $\mathbf{d} = \mathbf{v} \mathbf{b} \delta(S)$ единичного вектора нормали \mathbf{v} к поверхности S , ограниченной дислокационной петлей L , и вектора Бюргерса данной дислокационной петли \mathbf{b} , $\delta(S)$ — дельта-функция Дирака на поверхности S . Несимметричная часть тензора \mathbf{d} может быть представлена в виде векторного произведения $\mathbf{v} \times \mathbf{b}$, которое в случае краевых дислокаций равно нулю. Поэтому для непрерывно распределенных дислокационных петель тензор \mathbf{d} будем считать симметричным. Величины α и ρ выражаются через \mathbf{d} [3–5]:

$$\alpha = \text{rot } \mathbf{d}, \quad \rho b^2 = k \text{tr}(\mathbf{d}^2) \quad (2.1)$$

Условие $\text{div } \alpha = 0$ при этом выполняется автоматически, а безразмерный коэффициент k в (2.1) учитывает конкретный вид и расположение дислокационных петель в единице объема металла.

Наличие в металле дислокаций, как правило, не меняет его упругих свойств, поэтому $\psi(\mathbf{e}, T, \mathbf{d})$ можно представить в виде суммы $\psi =$

$\psi = \psi_e(\mathbf{e}, T) + \psi_d(\mathbf{d}, T)$ плотностей свободной энергии, вызванных термоупругим деформированием и присутствием дислокаций [1, 8]. Энергия единицы длины изолированной дислокационной петли L является величиной порядка μb^2 [5, 6]. Следовательно, для непрерывно распределенных петель с плотностью ρ величина ψ_d будет $\psi_d(\mathbf{d}, T) = \rho \mu b^2 = k \mu \text{tr}(\mathbf{d}^2)$. В результате выражение для $\psi(\mathbf{e}, T, \mathbf{d})$ с учетом малости упругих деформаций \mathbf{e} может быть записано следующим образом:

$$\psi(\mathbf{e}, T, \mathbf{d}) = \frac{1}{2} K(T) (\text{tr } \mathbf{e})^2 + \mu(T) \text{tr}(\mathbf{e}')^2 - K(T) \text{tr } \mathbf{e} \int_{T_0}^T \alpha(T) dT + k \mu(T) \text{tr}(\mathbf{d}^2) \quad (2.2)$$

где $K(T)$ — модуль объемного сжатия, $\mu(T)$ — модуль сдвига, $\alpha(T)$ — коэффициент объемного расширения, $\mathbf{e}' = \mathbf{e} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{e}) \mathbf{I}$ — девиатор тензора \mathbf{e} , \mathbf{I} — единичный тензор.

3. Обозначим через $\mathbf{X} = \partial \psi / \partial \mathbf{d} = 2k \mu \mathbf{d}$ термодинамическую силу, ассоциированную с внутренней переменной \mathbf{d} . Выражение (1.7) для объемной плотности диссипации D может быть записано через термодинамические силы $\mathbf{X} = \{\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{X}\}$ и потоки $\mathbf{J} = \{\mathbf{p}', \mathbf{d}'\}$ в стандартном для термодинамики необратимых процессов виде $D = \Sigma \mathbf{X}_j \mathbf{J}_j$. Зависимость между силами \mathbf{X}_j и потоками \mathbf{J}_j с учетом условий взаимности Онзагера [9] и гипотезы несжимаемости для деформаций ползучести ($\text{tr } \mathbf{p} = 0$) принимает следующий вид:

$$\mathbf{p}' = \alpha_1 \boldsymbol{\sigma}' - \alpha_2 \mathbf{X}, \quad \mathbf{d}' = \alpha_2 \boldsymbol{\sigma}' - \alpha_3 \mathbf{X} \quad (3.1)$$

где $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}$ — девиатор тензора $\boldsymbol{\sigma}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — скалярные функции, зависящие от температуры T и инвариантов $\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}')^2, \text{tr}(\mathbf{X}^2), \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{X})$. При нулевом начальном условии для \mathbf{d} (отсутствие начальной структурной анизотропии в металле) тензоры \mathbf{d} и \mathbf{X} можно заменить их девиаторами $\mathbf{d}' = \mathbf{d} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{d}) \mathbf{I}$, $\mathbf{X}' = \mathbf{X} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{X}) \mathbf{I}$, так как из (3.1) следует, что $\text{tr } \mathbf{d}' = -2k \mu \alpha_3 \text{tr } \mathbf{d}$, т. е. $\text{tr } \mathbf{d} = \text{tr } \mathbf{X} = 0$. Необходимо отметить, что соотношения взаимности Онзагера доказаны лишь для линейных соотношений (3.1), т. е. в случае, когда α_1, α_2 и α_3 не зависят от $\boldsymbol{\sigma}'$ и \mathbf{X} . Обобщение их на нелинейный случай является по существу гипотезой, правомерность которой должна проверяться экспериментально, либо быть доказана. Из неравенства (1.7) следует, что квадратичная форма $D = \alpha_1 \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}')^2 - 2\alpha_2 \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{X}) + \alpha_3 \text{tr } \mathbf{X}^2$ должна быть положительно определена при любых $\boldsymbol{\sigma}'$ и \mathbf{X} . Достаточным условием положительной определенности будут ограничения на $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ вида $\alpha_1 > 0, \alpha_3 > 0, \alpha_1 \alpha_3 - \alpha_2^2 > 0$.

Альтернативным вариантом получения определяющих соотношений (3.1) является задание диссипативной функции D как функции термодинамических сил или потоков. Потенциальная связь между силами и потоками получается из дополнительного принципа [10, 11]. Если при этом предположить, что D зависит лишь от инвариантов $\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}')^2, \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{X}), \text{tr } \mathbf{X}^2$ и температуры T , то получатся соотношения (3.1) с автоматическим выполнением условий взаимности Онзагера. Обозначив $\boldsymbol{\sigma}'_0 = \alpha_2 \mathbf{X} / \alpha_1$, (3.1) можно свести к аналогичным [12] соотношениям.

Предположим, что $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ не зависят от \mathbf{X} , т. е. являются функциями только лишь интенсивности напряжений $\sigma_e = (\frac{2}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}')^2)^{1/2}$. В одноосном случае при постоянном растягивающем напряжении σ из (3.1) для деформации $p(t)$ получаются соотношения [13]: $p(t) = p_s(\sigma) t + a_s(\sigma) \times \times [1 - \exp(-t/t_s(\sigma))]$, где $p_s(\sigma) = \frac{2}{3}(\alpha_1 - \alpha_2^2/\alpha_3)\sigma$ — скорость установившейся ползучести, $a_s(\sigma) = \frac{2}{3}\alpha_2^2\sigma/(2k\mu\alpha_3^2)$ — деформация, характеризующая степень упрочнения материала на первой стадии ползучести, $t_s(\sigma) = 1/(2k\mu\alpha_3)$ — время, характеризующее протяженность процесса упрочнения на первой стадии ползучести (время релаксации). Величины $p_s(\sigma)$ и $a_s(\sigma)$ определяются по серии кривых ползучести при различных значениях напряжения σ . В [14] показано, что экспериментальная зависимость $\Gamma(t) = \ln [a_s/(a_s + p_s t - p(t))]$ хорошо аппроксимируется прямой линией, по углу наклона которой может быть найдена величина

$t_s(\sigma)$. Для ряда металлов и сплавов величина t_s оказалась постоянной, не зависящей от σ [14]. Определив по кривым ползучести $p_s(\sigma)$, $a_s(\sigma)$ и $t_s(\sigma)$, можно найти функции $\alpha_1(\sigma)$, $\alpha_2(\sigma)$ и $\alpha_3(\sigma)$. Следует отметить, что параметр k не определяется по кривым ползучести, поскольку он является характеристикой внутреннего состояния материала и должен быть определен независимо. Обозначив $\lambda^2 = \alpha_2^2 / \alpha_1 \alpha_3$, получим, что

$$\alpha_1 = {}^3/2(p_s + a_s/t_s)\sigma, \quad \alpha_2 = \sqrt{3k\mu a_s/\sigma} / (2k\mu t_s)$$

$$\alpha_3 = 1/(2k\mu t_s), \quad \lambda^2 = a_s/(a_s + p_s t_s)$$

Термодинамические ограничения $\alpha_1 > 0$, $\alpha_3 > 0$, $\alpha_1 \alpha_3 - \alpha_2^2 > 0$ сводятся к условиям $t_s > 0$, $p_s t_s + a_s > 0$, $a_s / (a_s + p_s t_s) < 1$, естественным образом выполняющимися в условиях ползучести.

Чтобы соотношения (3.1) описывали обратную ползучесть, происходящую в образце после снятия в момент времени t_0 напряжения σ , необходимо условие $\alpha_2(0) \neq 0$. В этом случае зависимость $p(t)$ при $t > t_0$ будет

$$p(t) = p(t_0) - \{1 - \exp[-2k\mu\alpha_3(0)(t-t_0)]\} \alpha_2(0) d(t_0) / \alpha_3(0)$$

$$d(t_0) = {}^2/3 \alpha_2(\sigma) \sigma [1 - \exp(-2k\mu\alpha_3(\sigma)t_0)] / (2k\mu\alpha_3(\sigma))$$

Величина обратной ползучести

$$\Delta p = \lim_{t \rightarrow \infty} (p(t_0) - p(t)) = [1 - \exp(-2k\mu\alpha_3(\sigma)t_0)] \times$$

$$\times \alpha_2(0) \alpha_2(\sigma) \sigma / (3k\mu\alpha_3(0)\alpha_3(\sigma))$$

зависит как от времени снятия нагрузки t_0 , так и от величины напряжения σ , приложенного первоначально к образцу. В том случае, когда разгрузка производится на второй стадии ползучести, величина обратной ползучести практически не меняется. Интересно сравнить значение $\Delta p(\sigma)$ с величиной $a_s(\sigma)$, характеризующей степень упрочнения материала в процессе ползучести. Отношение $\Delta p/a_s = (\alpha_3(\sigma)/\alpha_2(\sigma)) / (\alpha_3(0)/\alpha_2(0))$ показывает, что только лишь в случае $\alpha_2 = \text{const}$ и $\alpha_3 = \text{const}$, либо $\alpha_2(\sigma) = \alpha_3(\sigma)$ величина Δp совпадает с величиной a_s , т. е. происходит полное восстановление деформаций, накопившихся за счет упрочнения на первой стадии ползучести. Выразив $\alpha_2(\sigma)$ и $\alpha_3(\sigma)$ через $a_s(\sigma)$ и $t_s(\sigma)$, получим, что $\Delta p/a_s = [(a_s/\sigma) |_{\sigma=0} \sigma/a_s(\sigma)]^{1/2}$, где

$$(a_s/\sigma) |_{\sigma=0} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} (a_s(\sigma)/\sigma) \neq 0 \quad \text{при} \quad \alpha_2(0) \neq 0.$$

Из экспериментов следует, что функция $a_s(\sigma)/\sigma$ возрастающая [14], следовательно, $\Delta p/a_s < 1$ и убывает с ростом σ . Это означает, что при высокотемпературной ползучести происходят такие структурные изменения, которые на макроуровне приводят лишь к частично восстанавливающейся в процессе обратной ползучести деформации, накопленной за счет упрочнения.

Если в момент времени t_0 напряжение σ изменит свое значение с σ_1 на σ_2 , то при $t > t_0$ зависимость $p(t)$ будет

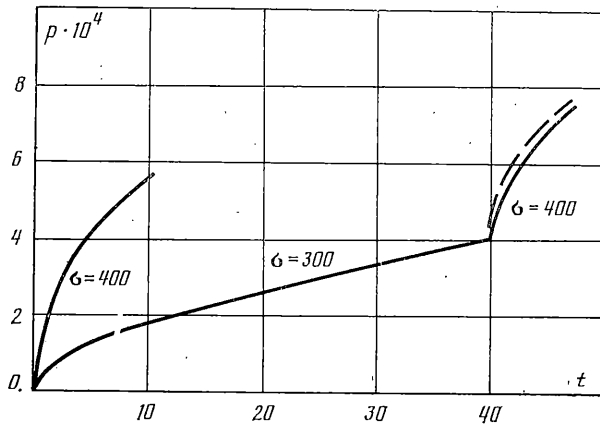
$$p(t) = p(t_0) + p_s(\sigma_2)(t-t_0) + a_s(\sigma_2) \{1 -$$

$$- [a_s(\sigma_1)\sigma_1 / (a_s(\sigma_2)\sigma_2)]^{1/2}\} \{1 - \exp[-(t-t_0)/t_s(\sigma_2)]\} \quad (3.2)$$

Как видим, влияние процесса ползучести при $t < t_0$ сказывается в появлении слагаемого $[a_s(\sigma_1)\sigma_1 / (a_s(\sigma_2)\sigma_2)]^{1/2}$, которое с учетом свойств функции $a_s(\sigma)$ ($a_s(\sigma)/\sigma \simeq \text{const}$ при низких σ) может быть оценено как $[a_s(\sigma_1)\sigma_1 / (a_s(\sigma_2)\sigma_2)]^{1/2} \simeq \sigma_1/\sigma_2$. Следовательно, выражение (3.2) может быть переписано в виде, позволяющем в случае $t_s(\sigma) \simeq \text{const}$ воспользоваться графическим способом построения кривых ползучести при ступенчатом нагружении:

$$p(t) = p(t_0) + p_s(\sigma_2)(t-t_0) +$$

$$+ a_s(\sigma_2) \{1 - \exp[-(t-t_0)/t_s(\sigma_2)]\} - a_s(\sigma_1) \{1 - \exp[-(t-t_0)/t_s(\sigma_1)]\}$$



Фиг. 1

Для такого построения в точке $(t_0, p(t_0))$ нужно построить первичную кривую ползучести $p(t)$ для $\sigma = \sigma_2$ и вычесть из нее деформацию $a_s(\sigma_1, t)$, накопленную за счет упрочнения при $\sigma = \sigma_1$. На фиг. 1 (t , ч.) показан результат такого построения для ст. ХН77ТЮР при 700°C , первичные кривые ползучести и кривая ползучести при ступенчатом нагружении для $\sigma_1 = 300$ МПа, $\sigma_2 = 400$ МПа и $t_0 = 40$ ч приведены в [15]. Как видим, изложенный способ дает вполне удовлетворительное соответствие с экспериментальной кривой ползучести. В [16] для одноосного случая были предложены соотношения, аналогичные (3.1). Обработка экспериментальных данных, проведенная в [16], также показала, что соотношения (3.1) вполне удовлетворительно аппроксимируют кривые ползучести в одноосном случае при ступенчатом изменении напряжения.

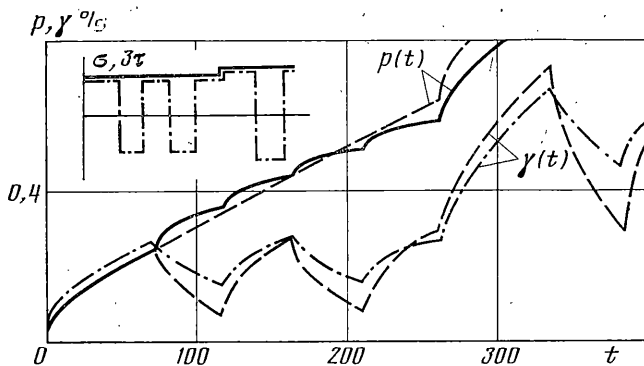
4. В случае сложного напряженного состояния из соотношений (3.1) при постоянном тензоре напряжений σ следует

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{d}(t_0) \exp[-(t-t_0)/t_s] + \alpha_2 t_s \sigma' \{1 - \exp[-(t-t_0)/t_s]\} \quad (4.1)$$

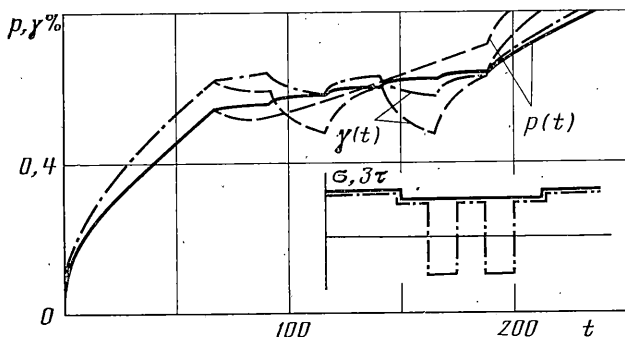
$$\mathbf{p}^*(t) = {}^3/2 p_s^* \sigma' / \sigma_e + {}^3/2 a_s \exp[-(t-t_0)/t_s] (\sigma' - \mathbf{d}(t_0) / \alpha_2 t_s) / \sigma_e t_s \quad (4.2)$$

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(t_0) + {}^3/2 p_s^* (t-t_0) \sigma' / \sigma_e + {}^3/2 a_s \{1 - \exp[-(t-t_0)/t_s]\} (\sigma' - \mathbf{d}(t_0) / \alpha_2 t_s) / \sigma_e \quad (4.3)$$

Зависимости $p_s^*(\sigma_e)$, $a_s(\sigma_e)$ и $t_s(\sigma_e)$ в (4.1)–(4.3) находятся по кривым ползучести в одноосном случае. При $t_0 = 0$, $\mathbf{p}(t_0) = 0$, $\mathbf{d}(t_0) = 0$ из (4.3) вытекает пропорциональность девиаторов тензора напряжений и деформаций ползучести, а также «гипотеза единой кривой», согласно которой интенсивность деформаций ползучести $p_e = ({}^2/3 \text{tr } \mathbf{p}^2)^{1/2}$ полностью определяется интенсивностью напряжений σ_e и не зависит от вида напряженного состояния. Таким образом предположение о независимости α_1 , α_2 , α_3 от X приводит в случае сложного напряженного состояния к гипотезе единой кривой и поэтому может быть использовано только лишь для материалов, у которых эта гипотеза экспериментально подтверждается. Кроме того, из (4.1)–(4.3) следует, что пропорциональность \mathbf{p} и σ' , а также гипотеза единой кривой будут выполняться и при переменном тензоре напряжений $\sigma(t)$ в случае пропорционального нагружения $\sigma(t) = \varphi(t) \sigma_0$. В общем же случае непропорционального нагружения эти условия не выполняются. Однако и в этом случае при достаточно большой продолжительности действия постоянного тензора напряжений σ ($(t-t_0)/t_s \gg 1$) на стадии установившейся ползучести будет выполняться пропорциональность тензоров \mathbf{p}^* и σ' . Экспериментально это наблюдалось в [17, 18]. Для материалов с малой величиной t_s данное обстоятельство позволяет



Фиг. 2



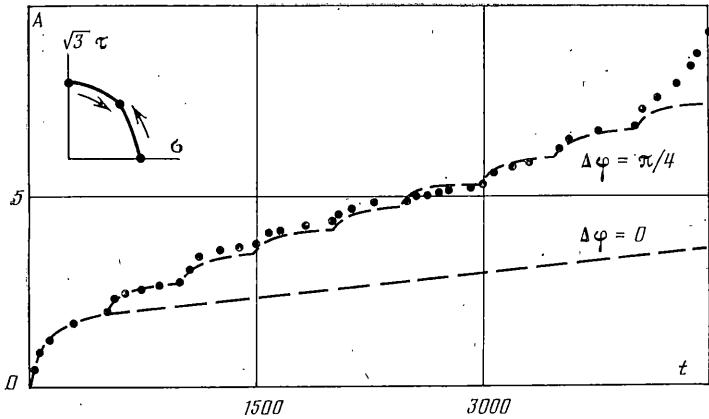
Фиг. 3

применять гипотезу пропорциональности \mathbf{p} и $\mathbf{\sigma}$ для произвольной траектории нагружения.

Предположение о независимости $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ от \mathbf{X} приводит, как следует из (4.1)–(4.3), к независимости осевой и сдвиговой ползучести при совместном действии растяжения и кручения — деформирование в осевом направлении не влияет на величину сдвиговых деформаций ползучести при кручении и наоборот. Экспериментально этот факт наблюдался в [19, 20]. В [21–24] было установлено, что циклическая смена направления кручения при неизменном растягивающем напряжении приводит к интенсификации процесса ползучести и в осевом направлении. Это говорит о зависимости процессов ползучести при растяжении и кручении, а следовательно, и о зависимости $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ от \mathbf{X} . Однако величина, характеризующая вторичное упрочнение процесса осевой ползучести после смены направления γ кручения, а также уменьшение скорости установившейся ползучести при растяжении после такой смены значительно меньше величин $a_s(\sigma)$ и $p_s^*(\sigma)$, характеризующих процесс ползучести под действием растягивающего напряжения σ , что позволяет в первом приближении пренебречь этим явлением и считать $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ зависящими только от σ_e . Так, на фиг. 2, 3 представлены экспериментальные данные по ползучести медных образцов при 300°C под действием осевого растяжения и знакопеременного кручения (растягивающее напряжение σ принимает значения $\sigma_1=22,7$ МПа и $\sigma_2=26,3$ МПа, а касательное напряжение τ принимает значения $\tau_1=7,7$ МПа и $\tau_2=8,8$ МПа) [24]. Изображенные штриховыми линиями зависимости $p(t)$ и $\gamma(t)$, построенные по (4.3) графическим способом, дают представление о степени влияния кручения на осевую деформацию и о величине погрешности, возникающей при пренебрежении этим влиянием.

В [25, 26] анализ кривых ползучести проводится в переменных $W(t) \equiv \text{tr}(\mathbf{\sigma}' \cdot \mathbf{p})$ и $A(t) = \text{tr}(\mathbf{\sigma}' \cdot \mathbf{p})$. Учитывая соотношение (4.2), выражение для $W(t)$ и $A(t)$ можно записать так:

$$W(t) = \sigma_e \{ p_s^* + (a_s/t_s) [1 - 3/2 \text{tr}(\mathbf{\sigma}' \cdot \mathbf{d}(t_0)) / \alpha_2 t_s \sigma_e^2] \exp[-(t-t_0)/t_s] \} \quad (4.4)$$



Фиг. 4

$$A(t) = A(t_0) + \sigma_e \{ p_s \cdot (t - t_0) + a_s [1 - {}^3/2 \operatorname{tr}(\sigma' \cdot d(t_0))] / [\alpha_2 t_s \sigma_e^2] [1 - \exp(-(t - t_0)/t_s)] \} \quad (4.5)$$

Если эксперименты на ползучесть при сложном напряженном состоянии производятся при постоянной интенсивности напряжений σ_e , то σ' можно представить в виде $\sigma' = \sigma_e \mathbf{n}$, где \mathbf{n} — тензор единичной интенсивности, характеризующий вид напряженного состояния. Пусть при $0 \leq t \leq t_0$ $\sigma' = \sigma_e \mathbf{n}_0$, при $t > t_0$ $\sigma' = \sigma_e \mathbf{n}_1$ и $t_0/t_s \gg 1$. Учитывая, что

$$d(t_0) = \alpha_2 t_s [1 - \exp(-t_0/t_s)] \sigma_e \mathbf{n}_0 \approx \alpha_2 t_s \sigma_e \mathbf{n}_0$$

$$A(t_0) = \sigma_e \{ p_s \cdot t_0 + a_s [1 - \exp(-t_0/t_s)] \} \approx \sigma_e (p_s \cdot t_0 + a_s)$$

выражение (4.5) при $t > t_0$ можно переписать как

$$A(t) = \sigma_e \{ p_s \cdot t + a_s + a_s (1 - {}^3/2 \operatorname{tr}(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_0)) [1 - \exp(-(t - t_0)/t_s)] \} \quad (4.6)$$

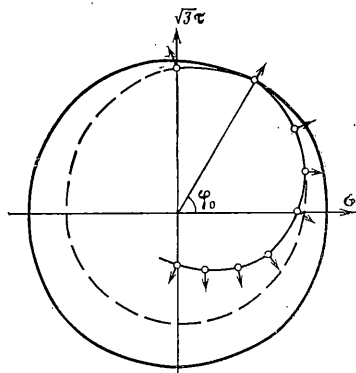
Первые два слагаемых в (4.6) соответствуют значению $A(t)$ при неизменном виде напряженного состояния, а третье слагаемое отражает изменение в величине $A(t)$ за счет изменения вида напряженного состояния. Это слагаемое в силу неравенства ${}^3/2 \operatorname{tr}(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_0) \leq 1$ положительно, т. е. величина $A(t)$ при изменении вида напряженного состояния растет быстрее, чем при неизменном напряженном состоянии. Экспериментально данное явление наблюдалось в [25, 26]. Поскольку при совместном растяжении и кручении ${}^3/2 \operatorname{tr}(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_0) = \cos(\varphi_1 - \varphi_0)$, где $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$ — угол между векторами $(\sigma_1, \sqrt{3}\tau_1)$ и $(\sigma_0, \sqrt{3}\tau_0)$ на плоскости $(\sigma, \sqrt{3}\tau_0)$, то переход от напряженного состояния $(\sigma_0, \sqrt{3}\tau_0)$ к состоянию $(\sigma_1, \sqrt{3}\tau_1)$ по дуге окружности $(\sigma^2 + 3\tau^2)^{1/2} = \sigma_e = \text{const}$ вызывает дополнительное увеличение $A(t)$ на величину $\sigma_e a_s (1 - \cos \Delta\varphi)$. На фиг. 4 приведены экспериментальные данные для титанового сплава Ti-6Al-4V при 20°С и $\sigma_e = 637$ МПа [26] и теоретическая кривая $A(t)$, построенная по (4.6), при скачкообразном изменении вида напряженного состояния с величиной $\Delta\varphi = \pi/4$ и временем выдержки постоянного напряженного состояния $t_1 - t_0 = 504$ ч (t , ч.; A , МДж/м³). Как видим, наблюдается вполне удовлетворительная согласованность соотношения (4.6) с данными эксперимента. Если $\Delta\varphi$ мало, то величина $1 - \cos \Delta\varphi \approx \Delta\varphi^2/2 \ll 1$ и данный эффект практически не наблюдается. Так, в [25] показано, что при $\Delta\varphi = \pi/20$ кривая $A(t)$ на большом промежутке времени близка к одноосной кривой ползучести.

Как следует из (4.2), изменение вида напряженного состояния приводит к отклонению от пропорциональности ρ и σ' . С течением времени это отклонение уменьшается и полностью исчезает на установившейся стадии ползучести, соответствующей новому напряженному состоянию. Экспериментально это наблюдалось в [26] при скачкообразном изменении вида напряженного состояния. Другой экспериментальный факт, на-

блюдавшийся в [17] на ст. 45 при 400° С, — это трансформация поверхности ползучести после смены вида напряженного состояния (под поверхностью ползучести в пространстве напряжений понимается поверхность равной мощности диссипации $W(t)=\text{const}$ [27]). Выражение (4.4) для совместного растяжения с кручением может быть записано в виде

$$W(t)=\sigma_e \{p_s + (a_s/t_s) (1-\cos \Delta\varphi) \exp [-(t-t_0)/t_s]\} \quad (4.7)$$

Следовательно, поверхность $W(t)=\text{const}$ при изменении в момент времени t_0 вида напряженного состояния начнет с течением времени меняться от мгновенной поверхности ползучести $\sigma_e [p_s + (a_s/t_s) (1-\cos \Delta\varphi)] = \text{const}$ при $t=t_0+0$ до поверхности $\sigma_e p_s = \text{const}$ (окружность на плоскости $(\sigma, \sqrt{3}\tau)$) при наступлении состояния установившейся ползучести, совпадающей с начальной поверхностью ползучести до смены вида напряженного состояния. Экспериментально построенная поверхность ползучести для $\varphi_0 = \pi/3$ и ее предельное положение в состоянии установившейся ползучести для ст. 45 [17] приведены на фиг. 5. Там же построена мгновенная поверхность ползучести, соответствующая выражению (4.7) для $W(t_0+0)$ при $\lambda^2=0,77$ и $n=5$, оцененных по одноосным кривым ползучести в [17].



Фиг. 5

Итак, использование внутренней переменной тензорного типа с кинетическими уравнениями (3.1) оказалось эффективным при описании первой и второй стадий процесса ползучести в условиях сложного напряженного состояния. Существуют, естественно, экспериментальные данные, которые не описываются простейшим вариантом соотношений (3.1). К ним можно отнести различное поведение некоторых металлов при растяжении и сжатии, циклическую ползучесть, взаимодействие пластичности и ползучести и т. п. Эти явления можно описать путем усложнения соотношений (3.1), введением дополнительных внутренних переменных и другими способами.

В заключение следует отметить, что точное знание константы k не понадобилось при описании процесса ползучести в материале. Более того, как следует из (4.1), величина $\psi_d(\mathbf{d}, T) = k \mu \text{tr}(\mathbf{d}^2)$ также не зависит ни от точного значения константы k , ни от конкретного физического смысла тензора \mathbf{d} . Действительно, при изменении в момент времени t_0 напряженного состояния с σ_0 на σ_1 величина $\psi_d(t)$ при $t > t_0$ может быть выражена только лишь через макроскопические характеристики процесса ползучести $a_s(\sigma_e)$ и $t_s(\sigma_e)$ и интенсивность напряжений σ_e :

$$\psi_d(t) = 1/2 \{ [(a_{s0}\sigma_{e0})^{1/2} f(t) + (a_{s1}\sigma_{e1})^{1/2} (1-f(t))]^2 + 2(a_{s0}\sigma_{e0}a_{s1}\sigma_{e1})^{1/2} (\cos \Delta\varphi - 1) f(t) (1-f(t)) \}$$

где $f(t) = \exp(-(t-t_0)/t_{s1})$, $a_{s0} = a_s(\sigma_{e0})$, $a_{s1} = a_s(\sigma_{e1})$. Поэтому выбор в качестве внутренней переменной абстрактного симметричного тензора второго ранга \mathbf{d} с кинетическим уравнением (3.1) будет приводить к тем же результатам. Для этого необходимо предположить лишь, что величина $\psi_d(\mathbf{d}, T)$ пропорциональна $\text{tr}(\mathbf{d}^2)$. Использование в качестве \mathbf{d} тензора дислокационного момента позволяет достаточно убедительно обосновать это предположение. Вывод о произвольности структурного параметра, характеризующего упрочнение материала в одноосном случае, сделан в [16].

Автор признателен Г. И. Быковцеву и В. И. Горелову за замечания и пожелания при обсуждении статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Проблемы теории пластичности/Под ред. Г. С. Шапиро. М.: Мир, 1976. 231 с.
2. Проблемы теории пластичности и ползучести/Под ред. Г. С. Шапиро. М.: Мир, 1979. 303 с.

3. *Труделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
4. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
5. *Косевич А. М.* Дислокации в теории упругости. Киев: Наук. думка, 1978. 219 с.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 203 с.
7. *Вит Р. де.* Континуальная теория дисклинаций. М.: Мир, 1977. 208 с.
8. *Козин Н. С., Тузовский А. А., Холин Н. Н.* Определяющие соотношения динамической пластичности.— ПМТФ, 1978, № 1, с. 153–163.
9. *Гуров К. П.* Феноменологическая термодинамика необратимых процессов. М.: Наука, 1978. 128 с.
10. *Левитас В. И.* Об определяющих соотношениях в теории диссипативных сред.— Пробл. прочности, 1979, № 6, с. 48–55.
11. *Левитас В. И.* О некоторых моделях неупругого деформирования материалов. Сообщ. I. Теория пластичности, учитывающая структурные изменения.— Пробл. прочности, 1980, № 12, с. 70–76. Сообщ. 2. Некоторые приложения и обобщения.— Пробл. прочности, 1980, № 12, с. 77–83.
12. *Малинин Н. Н., Хажинский Г. М.* К построению теории ползучести с анизотропным упрочнением.— Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 3, с. 148–152.
13. *Гарофало Д.* Законы ползучести и длительной прочности металлов. М.: Металлургия, 1968. 304 с.
14. *Быковцев Г. И., Горелов В. И.* Об одной закономерности в ползучести металлов.— Докл. АН СССР (ДАН СССР), 1983, т. 273, № 5, с. 1080–1082.
15. Закономерности ползучести и длительной прочности: Справочник/Под общ. ред. С. А. Шестерикова. М.: Машиностроение, 1983. 101 с.
16. *Быковцев Г. И., Горелов В. И.* Феноменологическое построение кинетических уравнений теории ползучести.— Докл. АН СССР (ДАН СССР), 1985, т. 283, № 1, с. 58–61.
17. *Соснин О. В.* К вопросу о существовании потенциала ползучести.— Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 5, с. 85–89.
18. *Никигенко А. Ф.* Экспериментальная проверка гипотезы существования термодинамической поверхности процесса ползучести.— Пробл. прочности, 1978, № 9, с. 12–15.
19. *Наместников В. С.* О ползучести при переменных нагрузках в условиях сложного напряженного состояния.— Изв. АН СССР. ОТН, 1957, № 10, с. 83–85.
20. *Наместников В. С.* Прямое и обратное кручение в условиях ползучести.— ПМТФ, 1960, № 1, с. 121–122.
21. *Trampczynski W. A., Hayhurst D. R.* Creep deformation and rupture under non-proportional loading.— In: Creep Structure: 3rd Symp., Leicester, 1980. B.: Springer, 1981, p. 388–405.
22. *Hayhurst D. R., Trampczynski W. A., Leckie F. A.* Creep rupture under non-proportional loading.— Acta Met., 1980, v. 28, No. 9, p. 1171–1183.
23. *Trampczynski W. A., Hayhurst D. R., Leckie F. A.* Creep rupture of copper and aluminium under non-proportional loading.— J. Mech. and Phys. Solids, 1981, v. 29, No. 5/6, p. 353–374.
24. *Mroz Z., Trampczynski W. A.* On the creep-hardening rule for metals with a memory of maximal prestress.— Intern. J. Solids and Struct., 1984, v. 20, No. 5, p. 467–486.
25. *Никигенко А. Ф., Соснин О. В.* О ползучести и длительной прочности при циклических режимах нагружения.— Пробл. прочности, 1976, № 12, с. 18–20.
26. *Никигенко А. Ф., Соснин О. В.* О соотношениях между приращениями деформации ползучести и напряжениями при нестационарных режимах нагружения.— ПМТФ, 1978, № 5, с. 165–169.
27. *Никигенко А. Ф.* Экспериментальное обоснование гипотезы существования поверхности ползучести в условиях сложного нагружения. Сообщ. I.— Пробл. прочности, 1984, № 8, с. 3–8.

Куйбышев

Поступила в редакцию
8.X.1985