

УДК 539.374

**ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ  
ДЛЯ ПЛАСТИНОК С КРИВОЛИНЕЙНОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ**

**БИЧУК А. И., ПАВЛЕНКО А. В., ЧУХНОВА Л. И.**

Исследование сложных задач механики материалов, обладающих криволинейной анизотропией, сопряжено со значительными трудностями. Эти трудности обусловлены в первую очередь невозможностью непосредственного применения методов, основанных на использовании аппарата теории аналитических функций. Для таких задач (применительно к упругим материалам) в [1, 2] предложен асимптотический метод, позволяющий расчлнить напряженно-деформированное состояние пластинки на две составляющие, определение которых сводится к последовательному решению краевых задач теории потенциала.

В данной работе идеи указанного асимптотического метода обобщаются на случай ортотропной вязкоупругой среды. При этом рассматриваются материалы, обладающие преимущественно сдвиговой ползучестью (такие свойства во многих случаях имеют, например, стеклопластики).

1. Пусть конечная или бесконечная криволинейно-анизотропная пластинка из вязкоупругого материала работает в условиях обобщенного плоского напряженного состояния. Материал пластинки является ортотропным, главные направления анизотропии совпадают с изометрическими координатами  $(\xi, \eta)$ , которые связаны с декартовыми  $(x, y)$  посредством функций комплексного переменного  $z = \omega(\zeta)$  ( $z = x + iy$ ,  $\zeta = \exp(\xi + i\eta)$ ,  $i = \sqrt{-1}$ ). Тогда уравнения, выражающие связь между напряжениями и деформациями для материалов с преимущественно сдвиговой ползучестью, в случае малых деформаций имеют вид

$$e_{11} = \sigma_{11}/E_1 - \nu_2 \sigma_{22}/E_2, \quad e_{22} = -\nu_1 \sigma_{11}/E_1 + \sigma_{22}/E_2 \quad (1.1)$$

$$e_{12} = \frac{1}{G_*} \left( \sigma_{12} + \int_0^t K(t-\tau) \sigma_{12} d\tau \right), \quad \nu_2 E_1 = \nu_1 E_2$$

а компоненты тензора деформаций  $e_{11}$ ,  $e_{22}$ ,  $e_{12}$  через проекции  $u$ ,  $v$  вектора перемещений определяются соотношениями

$$e_{11} = (\partial u / \partial \xi + \Gamma_{22}^{22} v) / H, \quad e_{22} = (\partial v / \partial \eta + \Gamma_{11}^{11} u) / H \quad (1.2)$$

$$e_{12} = (\partial v / \partial \xi + \partial u / \partial \eta - \Gamma_{11}^{11} v - \Gamma_{22}^{22} u) / H$$

Здесь  $E_1$ ,  $E_2$  — мгновенные модули упругости вдоль главных направлений  $\xi$ ,  $\eta$ ;  $G_*$  — мгновенный модуль сдвига;  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  — коэффициенты Пуассона;  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$  — нормальные и касательные напряжения;  $K(t-\tau)$  — ядро ползучести;  $t$  — время;  $\Gamma_{11}^{11}$ ,  $\Gamma_{22}^{22}$  — символы Кристоффеля, связанные с параметрами Ляме  $H(\xi, \eta)$  формулами [3]:  $\Gamma_{11}^{11} = (\partial H / \partial \xi) / H$ ,  $\Gamma_{22}^{22} = (\partial H / \partial \eta) / H$ . Предполагается, что граница области, занимаемой пластинкой, совпадает с линией  $\xi = \text{const}$ .

Для аппроксимации ядер ползучести используются следующие аналитические выражения [4]:

$$K(t-\tau) = k \exp[-\beta_*(t-\tau)], \quad K(t-\tau) = k(t-\tau)^{\alpha_*-1} \quad (1.3)$$

$$K(t-\tau) = k(t-\tau)^{\alpha_*-1} \exp[-a(t-\tau)] \quad (0 < \alpha_* < 1)$$

где  $k$ ,  $\beta_*$ ,  $a$ ,  $\alpha_*$  — постоянные, причем второе из них справедливо лишь при достаточно малых значениях времени.

После применения преобразования Лапласа по времени к соотношениям (1.1), (1.2) и подстановки напряжений в уравнения равновесия приходим к интегрированию следующих уравнений при соответствующих граничных условиях [1, 3]:

$$U_{\xi\xi} + \varepsilon_1 U_{\eta\eta} + \varepsilon_1 m V_{\xi\eta} - q f_1 (V_{\eta} + f_1 U) + (f_2 V_{\xi} + f_4 V) - \varepsilon_1 [f_1 V_{\eta} - f_2 V_{\xi} + (f_1 f_2 + f_4) V + (f_2^2 - f_3) U] + q v_1 (f_3 U - f_1 f_2 V) = 0 \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_1 V_{\xi\xi} + q V_{\eta\eta} + \varepsilon_1 m U_{\xi\eta} + q (f_1 U_{\eta} + f_4 U) - f_2 (U_{\xi} + f_2 V) - \varepsilon_1 [f_2 U_{\xi} - f_1 U_{\eta} + (f_1 f_2 + f_4) U + (f_1^2 + f_3) V] - q v_1 (f_3 V + f_1 f_2 U) = 0$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon F, \quad \varepsilon = G/B_1, \quad G = G_0 h, \quad q = B_2/B_1$$

$$B_1 = E_1 h / (1 - \nu_1 \nu_2), \quad B_2 = E_2 h / (1 - \nu_1 \nu_2), \quad f_1 = \Gamma_{11}^{-1},$$

$$f_2 = \Gamma_{22}^{-2}, \quad f_3 = \partial f_1 / \partial \xi = -\partial f_2 / \partial \eta, \quad f_4 = \partial f_1 / \partial \eta = \partial f_2 / \partial \xi$$

$$m = 1 + q v_1 \varepsilon_1^{-1}, \quad F = F(p) = [1 + k f(p)]^{-1}$$

Здесь  $U, V$  — трансформанты Лапласа соответственно функций  $u, v$ ;  $h$  — толщина пластинки; а функция  $f(p)$  для ядер (1.3) соответственно имеет вид  $f(p) = (p + \beta_*)^{-1}$ ,  $f(p) = \Gamma(\alpha_*) p^{-\alpha_*}$ ,  $f(p) = \Gamma(\alpha_*) (p + a)^{-\alpha_*}$ , где  $\Gamma(\alpha_*)$  — гамма-функция,  $p$  — параметр преобразования Лапласа, а индексы  $\xi, \eta$  обозначают дифференцирование по этим координатам.

Уравнения (1.4) совпадают с уравнениями равновесия в перемещениях для упругого ортотропного тела [1], если параметр  $\varepsilon_1$  вновь обозначить через  $\varepsilon$ . Таким образом, при решении плоской задачи о деформации вязкоупругого тела необходимо решать задачу о деформации ортотропного упругого тела. Поэтому и здесь может быть использован подход, разработанный в [1, 2] и основанный на идеях асимптотического интегрирования. При этом все соотношения и выводы будут совпадать с результатами [1], если в качестве «малого» параметра выбрать параметр  $\varepsilon_1$ . Он, действительно, оказывается малым, если  $\varepsilon$  мало, так как функция  $F(p)$  для ядер (1.3) не превосходит единицы при произвольных значениях параметра  $p$ .

Следовательно, если используются разностные ядра ползучести (1.3), то при исследовании плоских задач линейной вязкоупругости для ортотропных сред также удастся расцепить напряженно-деформированное состояние на две составляющие, обладающие различными свойствами. Полное решение задачи ищется в виде суперпозиции обеих составляющих, а определение каждой из них сводится к последовательному решению краевых задач теории потенциала. Поэтому и здесь имеется возможность рассмотреть все те задачи, которые были решены применительно к упругим материалам [2], и исследование которых другими методами затруднительно. При этом решения в изображениях для вязкоупругих материалов будут совпадать с решениями упругих задач, а возвращение к оригиналам существенно облегчается, так как получаемые функции операторов оказываются значительно проще, чем при использовании других методов.

Отметим, что при асимптотическом интегрировании системы (1.4), как и в уравнениях теории упругости, можно в качестве малого параметра принимать параметр  $\varepsilon$ , а для получения окончательных результатов необходимо повторить выкладки [1]. При этом функция  $F(p)$  полагается порядка единицы. Сказанное выше справедливо при произвольных значениях параметра  $q$ .

Если пластинка ортотропна и обладает цилиндрической анизотропией, то в общих формулах необходимо положить  $\omega(\xi) = R\xi$ ,  $x = Re^{\xi} \cos \eta$ ,  $y = -Re^{\xi} \sin \eta$ ,  $H = Re^{\xi}$ ,  $\Gamma_{11}^{-1} = 1$ ,  $\Gamma_{22}^{-2} = 0$ . Переход к декартовым прямоугольным координатам осуществляется следующим образом:  $x = R\xi$ ,  $y = R\eta$ ,  $H = R$ ,  $\Gamma_{11}^{-1} = \Gamma_{22}^{-2} = 0$ . Здесь  $R$  — некоторая постоянная, имеющая размерность длины.

2. Остановимся на решении некоторых конкретных задач. Пусть на границу ортотропной вязкоупругой полуплоскости ( $x \geq 0, |y| < \infty$ ) в начале координат действует нормальная сосредоточенная сила, равная  $P_0$  при  $t > 0$  (при  $t \leq 0$  сила отсутствует). После применения преобразования

Лапласа по времени к уравнениям и граничным условиям в декартовых координатах приходим к краевой задаче, аналогичной упругой постановке. Поэтому решение в изображениях в форме ряда по степеням параметра  $\varepsilon_1$  может быть выписано непосредственно на основании [2], а в форме ряда по степеням параметра  $\varepsilon$  — заменой  $\varepsilon_1 = \varepsilon F(p)$ . Обратное преобразование Лапласа позволяет получить оригиналы формул, определяющих напряженно-деформированное состояние полуплоскости. В частности, если для аппроксимации ядра ползучести используется третье выражение из (1.3) (в этом случае  $F(p) = [1 + k\Gamma(\alpha_*) (p+a)^{-\alpha_*}]^{-1}$ ), то, например, напряжение  $\sigma_{11}$  на линии действия силы ( $y=0$ ) принимает вид

$$\sigma_{11} = -P_0(B_1/G)^{1/2} [\psi(k, a, \alpha_*) + \Omega(t) + O(\varepsilon)] / \pi x \quad (2.1)$$

$$\psi(k, a, \alpha_*) = [1 + k\Gamma(\alpha_*) a^{-\alpha_*}]^{1/2}, \quad \Omega(t) = \frac{1}{\pi} \int_a^\infty \frac{e^{-\rho t}}{\rho} \Phi(\rho) \sin \frac{\Phi}{2} d\rho$$

$$\Phi(\rho) = [1 + 2k\Gamma(\alpha_*) (\rho - a)^{-\alpha_*} \cos \pi\alpha_* + k^2\Gamma^2(\alpha_*) (\rho - a)^{-2\alpha_*}]^{1/2}$$

$$\varphi = \arctg \{-k\Gamma(\alpha_*) (\rho - a)^{-\alpha_*} \sin \pi\alpha_* [1 + k\Gamma(\alpha_*) (\rho - a)^{-\alpha_*} \cos \pi\alpha_*]^{-1}$$

При малых значениях времени напряжение  $\sigma_{11}$  из (2.1) может быть представлено в виде

$$\sigma_{11} = -\frac{P_0}{\pi x} \sqrt{\frac{B_1}{G}} \left\{ 1 + e^{-at} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \binom{1/2}{n} \kappa(n, t) + \sum_{\nu=1}^{n-1} \binom{1/2}{\nu} N(n, \nu, t) \right] + O(\varepsilon) \right\}$$

$$\binom{1/2}{n} = \frac{(-1)^{n+1} (2n-1)!!}{(2n)!! (2n-1)}, \quad \kappa(n, t) = \frac{\Gamma^n(\alpha_*)}{\Gamma(n\alpha_* + 1)} (kt^{\alpha_*})^n$$

$$N(n, \nu, t) = \Gamma^\nu(\alpha_*) (kt^{\alpha_*})^\nu (at)^{n-\nu} / \Gamma(n + \nu(\alpha_* - 1) + 1)$$

а при достаточно больших значениях времени напряжение  $\sigma_{11}$  определяется формулой

$$\sigma_{11} = -\frac{P_0}{\pi x} \sqrt{\frac{B_1}{G}} \left[ \psi(k, a, \alpha_*) - e^{-at} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} A(n) M(n, t) + O(\varepsilon) \right]$$

$$A(n) = \frac{\Gamma^n(\alpha_*)}{\psi^{2n-1}}, \quad M(n, t) = \frac{\alpha_*^n (kt^{\alpha_*})^n}{\Gamma(n\alpha_*)} \times$$

$$\times \left[ (at)^{-1} - \sum_{\nu=1}^{n-1} (-1)^{\nu+1} \binom{n-1}{\nu} \prod_{s=1}^{\nu} (n\alpha_* - s) (at)^{-\nu-1} \right]$$

$$\binom{n-1}{\nu} = (n-1)(n-2)\dots(n-\nu)/\nu!$$

При малых значениях времени напряжение  $\sigma_{11}(x, 0)$  близко к упругому, которое в первом приближении определяется формулой  $\sigma_{11}^0(x, 0) = -P_0(B_1/G)^{1/2}/\pi x$ , а при достаточно больших — напряжение  $\sigma_{11}(x, 0)$  в вязкоупругой полуплоскости в первом приближении отличается от упругого множителем  $\psi(k, a, \alpha_*)$ , который при  $k > 0$  всегда остается больше единицы.

Рассмотрим теперь задачу о распределении напряжений около кругового отверстия в вязкоупругой ортотропной пластине, обладающей цилиндрической анизотропией и занимающей бесконечную область. Начало декартовой системы координат  $xOy$  поместим в центр отверстия, эта же точка является и полюсом анизотропии. В момент времени  $t=0$  к пластине на бесконечности прикладываются растягивающие усилия интенсивности  $q_1$  и  $q_2$  соответственно вдоль и поперек оси  $Ox$ , которые затем остаются постоянными. Контур отверстия свободен от внешних усилий. После

применения преобразования Лапласа по времени решение соответствующей краевой задачи находится аналогично [1]. При этом трансформанты напряжений определяются формулами

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{\sim} &= [(q_1 + q_2)(1 - \exp(-2\xi)) + (q_1 - q_2)\{1 - \exp[-(1 + n_* F^{1/2})\xi] + \\ &\quad + O(\varepsilon)\} \cos 2\eta] / (2p) \\ \sigma_{22}^{\sim} &= [(q_1 + q_2)(1 + \exp(-2\xi)) - \\ &\quad - (q_1 - q_2)\{1 + (1 + \varepsilon^{-1/2} F^{-1/2}) \exp[-(1 + n_* \varepsilon^{-1} F^{-1/2})\xi] + O(\varepsilon)\} \cos 2\eta] / (2p) \\ \sigma_{12}^{\sim} &= -(q_1 - q_2)\{1 - \varepsilon^{1/2} F^{1/2} [(1 + \varepsilon^{-1/2} F^{-1/2}) \exp[-(1 + n_* \varepsilon^{-1} F^{-1/2})\xi] - \\ &\quad - \exp[-(1 + n_* F^{1/2})\xi] + O(\varepsilon)]\} \sin 2\eta / (2p)\end{aligned}$$

Обратное преобразование Лапласа позволяет записать напряжения в каждой точке пластины в зависимости от времени. В частности, на контуре отверстия ( $\xi=0$ ):

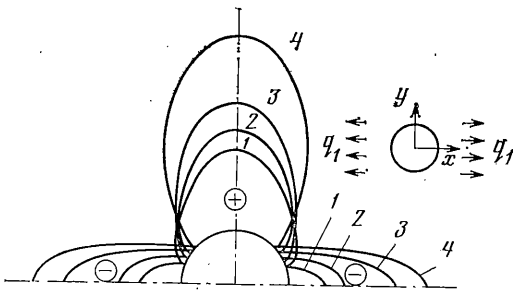
$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{22} = (q_1 + q_2)^{-1/2} (q_1 - q_2) \varepsilon^{-1/2} [\psi(k, a, \alpha_*) + \Omega(t) + 2\varepsilon^{1/2} + O(\varepsilon)] \cos 2\eta \quad (2.2)$$

Здесь, как и в предыдущей задаче, для аппроксимации ядра ползучести использовано третье выражение из (1.3), а контурный интеграл сведен к несобственному аналогично [5].

При малых и достаточно больших значениях времени напряжение (2.2) может быть записано соответственно следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_{22} &= (q_1 + q_2)^{-1/2} (q_1 - q_2) \varepsilon^{-1/2} \left\{ 1 + 2\varepsilon^{1/2} + e^{-at} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \binom{1/2}{n} \kappa(n, t) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{\nu=1}^{n-1} \binom{1/2}{\nu} N(n, \nu, t) \right] + O(\varepsilon) \right\} \cos 2\eta \\ \sigma_{22} &= (q_1 + q_2)^{-1/2} (q_1 - q_2) \varepsilon^{-1/2} \left[ \psi(k, a, \alpha_*) + 2\varepsilon^{1/2} - \right. \\ &\quad \left. - e^{-at} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} A(n) M(n, t) + O(\varepsilon) \right] \cos 2\eta\end{aligned}$$

На фигуре представлены графики распределения напряжений  $\sigma = \sigma_{22}/q_1$  по контуру отверстия в первом приближении при одноосном растяжении ( $q_2=0$ ) вязкоупругой пластинки ( $\alpha_*=0,77$ ;  $k=0,5$ ;  $a=0,1$ ). Кривая 1 характеризует упругое решение ( $t=0$ ) для изотропного материала при  $\nu=0,3$ , а кривая 3 — для ортотропного при  $\varepsilon=0,04$ . Кривые 2, 4 соответственно показывают предельные значения напряжений ( $t \rightarrow \infty$ )



для тех же материалов (знаками «плюс» и «минус» отмечены соответственно растягивающие и сжимающие напряжения).

3. Перейдем далее к рассмотрению контактных задач линейной вязкоупругости. Пусть жесткий штамп с плоским основанием вдавливается в ортотропную полуплоскость ( $x \geq 0$ ,  $|y| < \infty$ ), материал которой обладает преимущественно сдвиговой ползучестью. Главные направления анизотропии совпадают

с декартовыми координатами  $x, y$ . В области контакта штампа с полуплоскостью ( $x=0, -l \leq y \leq l$ ) действуют касательные усилия по закону Кудона (состояние предельного равновесия при отсутствии участков сцепления). При этом, как и в [6], предполагается, что коэффициент трения  $\gamma = k_0 \varepsilon^{1/2}$ ,  $k_0 \sim 1$ . Сила  $P_0$ , прижимающая штамп к полуплоскости, прикладывается симметрично в момент времени  $t=0$  и за-

тем остается постоянной (штамп перемещается поступательно параллельно оси  $x$ ). Асимптотическое решение относительно изображений находится аналогично упругой задаче [6]. При этом трансформанта контактного давления, действующего под штампом, определяется формулой

$$\sigma_{11} \sim - \frac{P_0}{\pi l \sqrt{1-\eta^2}} \frac{1}{p} \left[ 1 - \varepsilon \frac{k_0 F^{1/2}}{\pi} \ln \frac{1+\eta}{1-\eta} + O(\varepsilon^2) \right]$$

$$\eta = y/l$$

Возвращаясь к оригиналу, получим

$$\sigma_{11} = - \frac{P_0}{\pi l \sqrt{1-\eta^2}} \left\{ 1 - \varepsilon \frac{k_0}{\pi} \ln \frac{1+\eta}{1-\eta} [\psi^{-1} - \Omega_1(t)] + O(\varepsilon^2) \right\} \quad (3.1)$$

$$\Omega_1(t) = \frac{1}{\pi} \int_a^\infty \frac{e^{-\rho t}}{\rho} \Phi^{-1}(\rho) \sin \frac{\varphi}{2} d\rho$$

При малых и достаточно больших значениях времени контактное давление (3.1) может быть представлено соответственно в виде

$$\sigma_{11} = - \frac{P_0}{\pi l \sqrt{1-\eta^2}} \left\{ 1 - \varepsilon \frac{k_0}{\pi} \ln \frac{1+\eta}{1-\eta} \left[ 1 + e^{-at} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \chi(n, t) + \sum_{\nu=1}^{n-1} \binom{-1/2}{\nu} N(n, \nu, t) \right] + O(\varepsilon^2) \right\}$$

$$\sigma_{11} = - \frac{P_0}{\pi l \sqrt{1-\eta^2}} \left\{ 1 - \varepsilon \frac{k_0}{\pi} \ln \frac{1+\eta}{1-\eta} \left[ \psi^{-1} - e^{-at} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-1/2}{n} A_1(n) M(n, t) \right] + O(\varepsilon^2) \right\}$$

$$\binom{-1/2}{n} = (-1)^n (2n-1)!! / (2n)!!, \quad A_1(n) = A(n) \psi^{-2}$$

Отметим, что аналогичным образом решается задача о сжатии вязкоупругой ортотропной полосы двумя жесткими штампами с плоскими основаниями при наличии трения на площадках контакта. Кроме того, на основе предложенного метода могут быть рассмотрены и более сложные случаи, когда в области контакта имеются участки скольжения и сцепления с заранее неизвестными границами между ними.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Павленко А. В. Плоская задача теории упругости для пластинок с криволинейной анизотропией. — Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 3, с. 70–82.
2. Маневич Л. И., Павленко А. В., Коблик С. Г. Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела. Киев — Донецк: Вища шк., 1982. 153 с.
3. Новожилов В. В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
4. Развитие теории контактных задач в СССР/Под ред. Галина Л. А. М.: Наука, 1976. 493 с.
5. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 302 с.
6. Маневич Л. И., Павленко А. В. К решению контактных задач теории упругости для ортотропной полосы с учетом сил трения. — Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 6, с. 72–80.

Днепропетровск

Поступила в редакцию  
17.XII.1985