

УДК 531.55:521.2

УСТОЙЧИВОСТЬ СПУТНИКА С АЭРОГИДРОСКОПИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ОРИЕНТАЦИИ НА КРУГОВОЙ ОРБИТЕ

БИРЮКОВА М. П.

Рассматривается задача о единственности устойчивой равновесной ориентации спутника, движущегося по круговой орбите, снабженного аэростабилизатором и двумя определенным образом установленными двухстепенными гироскопами, скрепленными с корпусом спутника упругой связью.

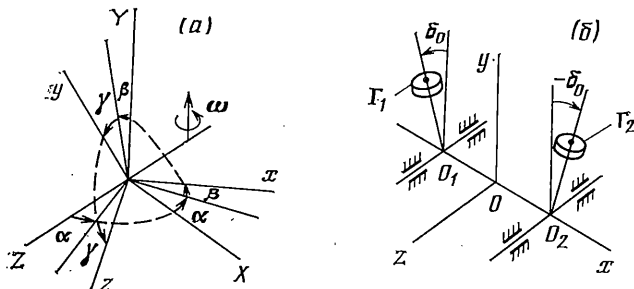
Получены достаточные условия, накладываемые на параметры системы, при выполнении которых устойчиво только так называемое нулевое положение спутника, а другие либо невозможны, либо неустойчивы.

1. Рассматривается движение по круговой орбите спутника с гироаэродинамической системой ориентации с учетом влияния гравитационного и аэродинамического моментов. На спутнике установлены два двухстепенных гироскопа по схеме «V-рыскание» [1], которые скреплены с корпусом спутника упругой связью и обеспечивают демпфирование собственных колебаний спутника, а также устойчивость по крену равновесного положения спутника на орбите.

Для определения ориентации спутника введем две системы координат: орбитальную $OXYZ$ (ось OY перпендикулярна плоскости орбиты спутника, ось OZ направлена вдоль прямой, соединяющей центры масс Земли и спутника) и $Oxyz$, связанную с главными осями инерции спутника (фиг. 1, а). Относительное их расположение определяется самолетными углами α, β, γ или углами Эйлера ψ, θ, φ . Положение спутника, при котором координатные оси обеих систем совпадают, назовем ориентированным (или нулевым). На фиг. 1, б показано расположение гироскопов Γ_1 и Γ_2 на спутнике в ориентированном равновесном его положении.

Обозначим $H_1^v = H_2^v = H^v$ собственные кинетические моменты гироскопов, K_1^v — коэффициент демпфирования гироскопа, K_2^v — коэффициент жесткости упругой связи между гироскопом и корпусом спутника, δ_0 — угол, на который отклонены от нормали к плоскости орбиты оси вращения роторов гироскопов при ориентированном равновесном положении спутника, δ_1, δ_2 — углы отклонения гироскопов от равновесных их положений, причем эти отклонения ограничены специальными упорами так, что $-\Delta \leq \delta_1, \delta_2 \leq \Delta$. Будем считать, что

$$\delta_0 + \Delta \leq 1/2\pi, \quad \Delta \leq \delta_0 \quad (1.1)$$



Фиг. 1

Параметр $S^\vee = -x_* Q$ — характеристика аэродинамического стабилизатора, x_* — координата центра давления, Q — сила сопротивления атмосферы, приложенная в центре давления. Характеристиками распределения масс в системе являются главные центральные моменты инерции A, B, C спутника относительно осей x, y, z . В дальнейшем будут использоваться безразмерные параметры (ω — угловая скорость обращения спутника по круговой орбите):

$$\begin{aligned} H &= H^\vee / B\omega, & K_1 &= K_1^\vee / B\omega^2, & K_2 &= K_2^\vee / B\omega, & S &= S^\vee / B\omega^2 \\ \theta_A &= A/B, & \theta_C &= C/B, & \nu &= (1-\theta_A)/(1-\theta_C) \quad (\theta_C \neq 1) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Ставится задача — определить условия, накладываемые на параметры системы, с тем, чтобы ориентированное положение спутника было единственно устойчивым.¹

2. Используем уравнения движения [2], которые после введения безразмерных параметров (1.2) принимают вид

$$\begin{aligned} \theta_A p^\cdot + (\theta_C - 1)(qr - 3a_{32}a_{33}) - H(\delta_1^\cdot + r) \cos(\delta_0 + \delta_1) - H(\delta_2^\cdot + r) \cos(-\delta_0 + \delta_2) = 0 \\ q^\cdot + (\theta_A - \theta_C)(rp - 3a_{33}a_{31}) - H(\delta_1^\cdot + r) \sin(\delta_0 + \delta_1) - \\ - H(\delta_2^\cdot + r) \sin(-\delta_0 + \delta_2) + Sa_{13} = 0 \\ \theta_C r^\cdot + (1 - \theta_A)(pq - 3a_{31}a_{32}) + Hp[\cos(\delta_0 + \delta_1) + \\ + \cos(-\delta_0 + \delta_2)] + Hq[\sin(\delta_0 + \delta_1) + \sin(-\delta_0 + \delta_2)] - Sa_{12} = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} K_1 \delta_1^\cdot + K_2 \delta_2^\cdot + Hp \cos(\delta_0 + \delta_1) + Hq \sin(\delta_0 + \delta_1) - H \sin \delta_0 = 0 \\ K_1 \delta_2^\cdot + K_2 \delta_2^\cdot + Hp \cos(-\delta_0 + \delta_2) + Hq \sin(-\delta_0 + \delta_2) + H \sin \delta_0 = 0 \\ p = \alpha^\cdot a_{21} + \gamma^\cdot + a_{21} \\ q = \alpha^\cdot a_{22} + \beta^\cdot \sin \gamma + a_{22}, \quad r = \alpha^\cdot a_{23} + \beta^\cdot \cos \gamma + a_{23} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь p, q, r — проекции абсолютной угловой скорости спутника на оси x, y, z ; точкой обозначены производные по безразмерному аргументу $v = \omega t$.

Направляющие косинусы a_{ij} углов между осями x, y, z и X, Y, Z можно выразить через самолетные углы α, β, γ или углы Эйлера ψ, ϑ, φ :

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \alpha \cos \beta, & a_{12} &= \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ a_{13} &= \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma, & a_{21} &= \sin \beta \\ a_{22} &= \cos \beta \cos \gamma, & a_{23} &= -\cos \beta \sin \gamma, & a_{31} &= -\sin \alpha \cos \beta \\ a_{32} &= \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ a_{33} &= \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ a_{11} &= \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \vartheta \sin \varphi \\ a_{12} &= -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \vartheta \cos \varphi \\ a_{13} &= \sin \psi \sin \vartheta, & a_{21} &= \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \vartheta \sin \varphi \\ a_{22} &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \vartheta \cos \varphi, & a_{23} &= -\cos \psi \sin \vartheta \\ a_{31} &= \sin \vartheta \sin \varphi, & a_{32} &= \sin \vartheta \cos \varphi, & a_{33} &= \cos \vartheta \end{aligned} \quad (2.4)$$

Уравнения равновесия можно получить из (2.1), положив в них $\alpha = \text{const}, \beta = \text{const}, \gamma = \text{const}, \delta_1 = \text{const}, \delta_2 = \text{const}$. Поделив все уравнения на $(1 - \theta_C)$, используя вместо двух инерционных параметров θ_A, θ_C один $\nu = (1 - \theta_A)/(1 - \theta_C)$, с учетом (2.2) уравнения равновесия приведем к виду

$$\begin{aligned} a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33} + ha_{23}[c] = 0 \\ (1 - \nu)(a_{21}a_{23} - 3a_{33}a_{31}) - ha_{23}[s] + \sigma a_{13} = 0 \\ \nu(a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32}) + h(a_{21}[c] + a_{22}[s]) - \sigma a_{12} = 0 \\ -a_{21} \cos(\delta_0 + \delta_1) - a_{22} \sin(\delta_0 + \delta_1) + \sin \delta_0 = k\delta_1 \\ a_{21} \cos(-\delta_0 + \delta_2) + a_{22} \sin(-\delta_0 + \delta_2) + \sin \delta_0 = -k\delta_2 \\ [c] = \cos(\delta_0 + \delta_1) + \cos(-\delta_0 + \delta_1) \\ [s] = \sin(\delta_0 + \delta_1) + \sin(-\delta_0 + \delta_1) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} [c] &= \cos(\delta_0 + \delta_1) + \cos(-\delta_0 + \delta_1) \\ [s] &= \sin(\delta_0 + \delta_1) + \sin(-\delta_0 + \delta_1) \end{aligned} \quad (2.6)$$

¹ Задача поставлена В. А. Сарычевым.

$$\begin{aligned} h &= H/(1-\theta_c), & \sigma &= S/(1-\theta_c) \\ k_2 &= K_2/(1-\theta_c), & k &= k_2/h = K_2/H \end{aligned} \quad (2.7)$$

Все эти параметры положительны при $\theta_c < 1$. Заметим, что последние два уравнения из (2.5) верны только в том случае, когда гироскопы не лежат на упорах. Если один из гироскопов опирается на упор, то соответствующее ему уравнение изымается из системы (2.5), так как в нем не учтены опорные реакции.

3. Координаты ориентированного положения спутника $\alpha = \beta = \gamma = \delta_1 = \delta_2 = 0$ удовлетворяют уравнениям равновесия (2.5). В [2] показаны необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости равновесия этого положения, которые после деления на $(1-\theta_c) > 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma - 3(v-1) > 0, & \quad \sigma + 2h_{20} + v > 0, & \quad h_{20} + 2 > 0 \\ k_2(\sigma + 2h_{20} + v) + h_{20}(\sigma + v) > 0, & \quad \sigma(2h_{20} + 1) \neq \\ & \quad \neq 3\theta_c/(1-\theta_c), & \quad h_{20} = h \cos \delta_0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

4. Прежде чем установить другие возможные положения равновесия спутника, кроме ориентированного, выявим условия, накладываемые на параметры системы, при которых равновесное положение спутника невозможно. Используя (2.4), выразим первые два уравнения из (2.5) через углы Эйлера

$$\begin{aligned} & (\sin \psi \sin \varphi - \cos \varphi \cos \psi \cos \theta) \cos \psi \sin \theta - \\ & - 3 \cos \varphi \sin \theta \cos \theta = h[c] \cos \psi \sin \theta \\ & (1-v) [\cos \psi \sin \theta (\sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta) + \\ & + 3 \cos \theta \sin \varphi \sin \theta] = \sigma \sin \psi \sin \theta + h[s] \cos \psi \sin \theta \end{aligned} \quad (4.1)$$

Видно, что $\sin \theta = 0$ удовлетворяет этим уравнениям. Этот случай будет рассмотрен дальше, а пока будем считать $\sin \theta \neq 0$.

Из уравнений (4.1) можно получить

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \pm \sqrt{P^2 + R^2 - \sin^2 \psi \cos^2 \psi} / (3 + \cos^2 \psi) \\ P &= h[c] \cos \psi, & R &= (\sigma \sin \psi + h[s] \cos \psi) / (1-v) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Так как $|\cos \theta| < 1$, то равновесному положению системы должны отвечать параметры, удовлетворяющие условию

$$\begin{aligned} z = \left\{ h^2[c]^2 + \frac{h^2[s]^2 - \sigma^2}{(1-v)^2} - 7 \right\} \cos^2 \psi + \frac{\sigma^2}{(1-v)^2} + \\ + 2\sigma h[s] / (1-v)^2 \sin \psi \cos \psi - 9 < 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Если обозначить $\cos \psi = x$, $\sin \psi = y$ и учесть, что $x^2 + y^2 = 1$, то неравенству (4.3) на плоскости (x, y) будут соответствовать точки единичной окружности, заключенные внутри гиперболы $z = 0$ (фиг. 2). Если же полуось гиперболы b будет больше единицы, то решение системы (4.1) при $\sin \theta \neq 0$ станет невозможным. Итак, невозможность наклонного положения равновесия системы при $\sin \theta \neq 0$ сводится к условию $b > 1$ или

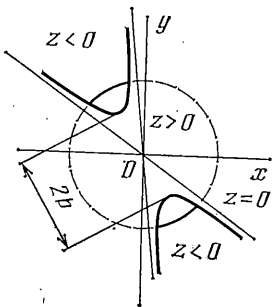
$$[\sigma^2 - 9(1-v)^2] (h^2[c]^2 - 16) - 9h^2[s]^2 > 0 \quad (4.4)$$

Так как $-\Delta \leq \delta_1$, $\delta_2 \leq \Delta$, то $2 \cos(\delta_0 + \Delta) \leq [c] \leq 2 \cos(\delta_0 - \Delta)$, $-2 \cos \delta_0 \sin \Delta \leq [s] \leq 2 \cos \delta_0 \sin \Delta$ и (4.4) заменяется условием

$$\begin{aligned} \xi = [\sigma^2 - 9(1-v)^2] [h^2 \cos^2(\delta_0 + \Delta) - 4] - \\ - 9h^2 \cos^2 \delta_0 \sin^2 \Delta > 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

5. Из изложенного ясно, что при выполнении условия (4.5) возможным положениям равновесия спутника соответствует $\sin \theta = 0$, т. е. $a_{33} = \pm 1$, $a_{13} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0$. Используя выражения (2.3), все решения можно разбить на две группы.

Первая группа соответствует $\sin \alpha = 0$, $\sin \gamma = 0$ и включает следующие решения: 1. $\alpha = \beta = \gamma = 0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0$ — нулевое; 2. $\alpha = \pi$, $\beta = \gamma = 0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0$;



Фиг. 2

3. $\alpha=\beta=0$, $\gamma=\pi$, $\delta_{2*}=-\delta_{1*}$ и определяются из уравнения

$$\sin \delta_0 + \sin(\delta_0 + \delta_1) = k\delta_1 \quad (5.1)$$

4. $\alpha=\gamma=\pi$, $\beta=0$, $\delta_{2*}=-\delta_{1*}$ и определяются из (5.1); 5. $\alpha=0$, $\gamma=\pi$, $\beta=\beta_*$, $\delta_1=\delta_{1*}$, $\delta_2=\delta_{2*}$ и определяются из уравнений

$$\begin{aligned} -(\sigma + \nu \cos \beta) \sin \beta + h([c] \sin \beta - [s] \cos \beta) &= 0 \\ \sin \delta_0 + \sin(\delta_0 + \delta_1 - \beta) &= k\delta_1 \\ \sin \delta_0 - \sin(-\delta_0 + \delta_2 - \beta) &= -k\delta_2 \end{aligned} \quad (5.2)$$

6. $\alpha=\gamma=0$, $\beta=\beta_*$, $\delta_1=\delta_{1*}$, $\delta_2=\delta_{2*}$ и определяются из уравнений

$$\begin{aligned} (\sigma + \nu \cos \beta) \sin \beta + h([c] \sin \beta + [s] \cos \beta) &= 0 \\ \sin \delta_0 - \sin(\delta_0 + \delta_1 + \beta) &= k\delta_1 \\ \sin \delta_0 + \sin(-\delta_0 + \delta_2 - \beta) &= -k\delta_2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Вторая группа соответствует $\cos \beta=0$, $\sin(\alpha \pm \gamma)=0$ и включает только два возможных решения: $\beta=1/2\pi$, $\alpha_* + \gamma_* = \pi$, $\delta_1=\delta_{1*}$, $\delta_2=\delta_{2*}$, которые определяются из уравнений

$$\sin \delta_0 - \cos(\delta_0 + \delta_1) = k\delta_1, \quad \sin \delta_0 + \cos(-\delta_0 + \delta_2) = -k\delta_2 \quad (5.4)$$

и должны удовлетворять соотношению

$$h[c] = \sigma \quad (5.5)$$

и $\beta=1/2\pi$, $\alpha_* - \gamma_* = \pi$, $\delta_1=\delta_{1*}$, $\delta_2=\delta_{2*}$, которые определяются из уравнений

$$\sin \delta_0 + \cos(\delta_0 + \delta_1) = k\delta_1, \quad \sin \delta_0 - \cos(-\delta_0 + \delta_2) = -k\delta_2 \quad (5.6)$$

и также удовлетворяют соотношению (5.5).

В перечисленных решениях первые четыре из первой группы соответствуют прямым положениям спутника, когда его главные оси инерции параллельны орбитальным осям координат. Решения 5, 6 соответствуют положениям равновесия спутника, повернутого по углу рыскания β , решения второй группы — положениям спутника, повернутого на углы α и γ .

Заметим, что уравнения (5.6) заменой δ_1 на $(-\delta_1)$ и δ_2 на $(-\delta_2)$ превращаются в уравнения (5.4). Это значит, что дальнейшее исследование достаточно провести лишь для первого решения второй группы.

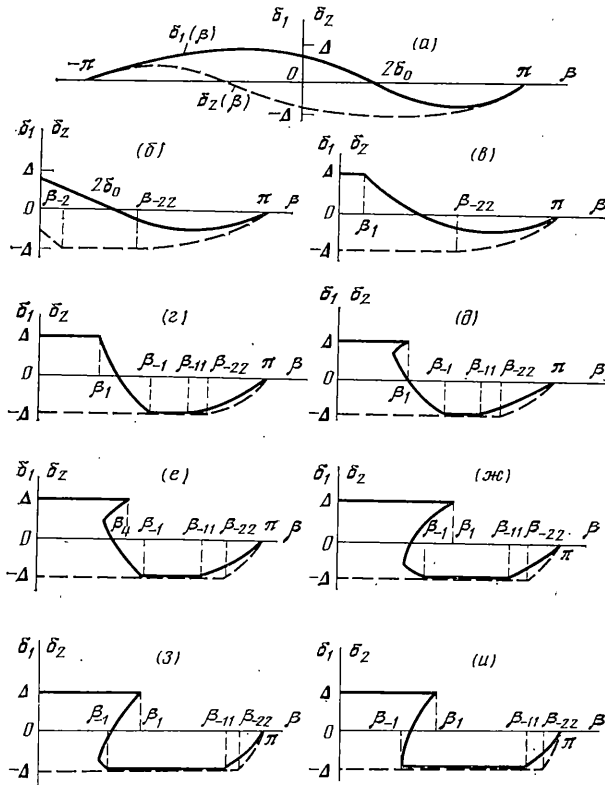
6. Установим области допустимых значений параметров системы, при которых все выявленные возможные равновесные положения спутника, кроме одного нулевого 1, либо не будут существовать, либо будут неустойчивы.

Для определенности ограничимся инерционными характеристиками спутников типа «Космическая стрела» [2], для которых $\theta_A < \theta_C < 1$, т. е.

$$\nu > 1 \quad (6.1)$$

Параметры δ_0 , Δ ограничены условием (1.1), на параметры h и σ наложены условия (3.1) и (4.5). Последующие исследования внесут дополнительные коррективы. Перейдем к анализу возможных решений (2.5), приведенных в п. 5.

Для выявления неустойчивости решения 2 ($\alpha=\pi$, $\beta=\gamma=0$, $\delta_1=\delta_2=0$) составим уравнения возмущенного движения около рассматриваемого положения равновесия. Характеристическое уравнение в данном случае распадается на два уравнения: $\lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2\lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_4\lambda + a_5 = 0$; $\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0$. Согласно критерию Лъенара — Шипара [3], для асимптотической устойчивости решения необходимо и достаточно выполнения условий (Δ_2, Δ_4 — определители Гурвица): $a_2 > 0$, $a_4 > 0$, $a_5 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_4 > 0$ — по переменным β , γ , $(\delta_1 + \delta_2)$; $b_1 > 0$, $b_3 > 0$, $\Delta_2 > 0$ — по переменным α , $(\delta_1 - \delta_2)$.



Фиг. 3

При нарушении хотя бы одного из этих условий исследуемое решение будет неустойчивым. Оказывается

$$b_3 = \frac{K_2 + H_{20}}{K_1} [3(\theta_A - \theta_C) - S] = \frac{k_2 + h_{20}}{k_1} (1 - \theta_C) [-3(v-1) - \sigma] < 0$$

что означает неустойчивость решения 2.

При анализе решения 3 ($\alpha = \beta = 0$, $\gamma = \pi$, $\delta_{2*} = -\delta_{1*}$) нужно различать случаи, когда в равновесном положении спутника гироскопы свободны и когда они лежат на упорах. Чтобы выяснить, может ли гироскоп задержаться на упоре и на каком именно, определим знак угловой скорости оси гироскопа при $\delta_i = \pm \Delta$ ($i = 1, 2$), $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = \pi$, $\alpha' = \beta' = \gamma' = 0$. Так, для гироскопа Γ_1 из (2.1) получаем уравнение $K_1 \delta_1' + K_2 \delta_1 - H \sin(\delta_0 + \delta_1) - H \sin \delta_0 = 0$. Отсюда $K_1 \delta_1' = H[\sin \delta_0 + \sin(\delta_0 + \delta_1) - k \delta_1] |_{\delta_1 = \Delta} = H[\sin \delta_0 + \sin(\delta_0 + \Delta) - k \Delta]$, $\delta_1' |_{\delta_1 = \Delta} > 0$ при $k < [\sin \delta_0 + \sin(\delta_0 + \Delta)] / \Delta = k_*$; $\delta_1' |_{\delta_1 = \Delta} < 0$ при $k > k_*$; $\delta_1' |_{\delta_1 = \Delta} > 0$ при любом k .

Аналогично исследуется знак δ_2' . Таким образом, при $k > k_*$ гироскопы на упорах не задержатся, а $\delta_1 = \delta_{1*}$ будет подчиняться (5.1). При $k < k_*$ гироскоп Γ_1 остановится на упоре $\delta_1 = \Delta$, Γ_2 — на упоре $\delta_2 = -\Delta$. Исследование устойчивости рассматриваемого решения показывает, что при $k > k_*$ решение неустойчиво в выбранной области допустимых значений параметров, а при $k < k_*$ для неустойчивости решения необходимо потребовать

$$\sigma > 2h_2 - v, \quad h_2 = h \cos(\delta_0 + \Delta) \quad (6.2)$$

Аналогично доказывается неустойчивость в области допустимых значений параметров решения 4 ($\alpha = \gamma = \pi$, $\beta = 0$, $\delta_{2*} = -\delta_{1*}$).

В случае решения 5 ($\alpha = 0$, $\gamma = \pi$, $\beta = \beta_*$, $\delta_1 = \delta_{1*}$, $\delta_2 = \delta_{2*}$) положения гироскопов Γ_1 и Γ_2 при равновесии спутника зависят от значений параметра k и $\beta = \beta_*$. На основе графического решения двух последних уравнений из (5.2) выявляются эти зависимости при $k > (1 + \sin \delta_0) / \Delta$ (фиг. 3, а), $[\sin \delta_0 + \sin(\delta_0 + \Delta)] / \Delta < k < (1 + \sin \delta_0) / \Delta$ (фиг. 3, б), $(1 - \sin \delta_0) / \Delta < k < [\sin \delta_0 + \sin(\delta_0 + \Delta)] / \Delta$ (фиг. 3, в), $\cos \theta_1 < k < (1 - \sin \delta_0) / \Delta$ (фиг. 3, г),

$[\sin \delta_0 - \sin(\delta_0 - \Delta)] / \Delta < k < \cos \theta_1$ (фиг. 3, *д*), $\cos \delta_0 < k < [\sin \delta_0 - \sin(\delta_0 - \Delta)] / \Delta$ (фиг. 3, *е*), $[\sin(\delta_0 + \Delta) - \sin \delta_0] / \Delta < k < \cos \delta_0$ (фиг. 3, *ж*), $\cos \theta_2 < k < [\sin(\delta_0 + \Delta) - \sin \delta_0] / \Delta$ (фиг. 3, *з*), $0 < k < \cos \theta_2$ (фиг. 3, *и*). На фиг. 3 $\beta_1, \beta_{11}, (\beta_2, \beta_{22})$ — значения координаты β , $0 < \beta < \pi$ при которых $\delta_1 = \Delta$ ($\delta_2 = \Delta$); $\beta_{-1}, \beta_{-11} (\beta_{-2}, \beta_{-22})$ — значения координаты β , $0 < \beta < \pi$, при которых $\delta_1 = -\Delta$ ($\delta_2 = -\Delta$). Установлено, что $\beta_1 = \delta_0 + \Delta + \theta_1$, $\beta_{-1} = \theta_2 + \delta_0 - \Delta$, $\beta_{-11} = \pi + \delta_0 - \Delta - \theta_2$, $\beta_{-2} = \theta_1 - \delta_0 - \Delta$, $\beta_{-22} = \pi - \delta_0 - \Delta - \theta_1$; $\sin \theta_1 = k\Delta - \sin \delta_0$, $\sin \theta_2 = k\Delta + \sin \delta_0$.

При построении графиков на фиг. 3 учтено, что поведение гироскопов на участках $-\pi \leq \beta \leq 0$ и $0 \leq \beta \leq \pi$ аналогично, но гироскопы как бы меняются ролями — это видно на фиг. 3, *а*. Если $\beta = \beta_*$, $\delta_1 = \delta_{1*}$, $\delta_2 = \delta_{2*}$ представляют собой решения (5.2) на участке ($0 \leq \beta \leq \pi$), т. е. удовлетворяют первому уравнению из (5.2); то $\beta = -\beta_*$, $\delta_1 = -\delta_{2*}$, $\delta_2 = -\delta_{1*}$ тоже будут удовлетворять этому уравнению, т. е. будут служить решением системы (5.2) на участке ($-\pi \leq \beta \leq 0$). Из этого следует, что исследование решения 5) достаточно вести при $0 < \beta < \pi$.

Для определенности проведем исследование решения для $k < \cos \theta_2$ (фиг. 3, *и*), что равносильно неравенству²

$$k < (-\Delta \sin \delta_0 + \sqrt{\Delta^2 + \cos^2 \delta_0}) / (1 + \Delta^2) \quad (6.3)$$

В этом случае при $0 < \beta \leq \beta_{-1}$ оба гироскопа лежат на упорах ($\delta_1 = \Delta$, $\delta_2 = -\Delta$), а равновесие спутника возможно при

$$\cos \beta = \cos \beta_* = (2h_2 - \sigma) / v \quad (6.4)$$

$$2h_2 - v < \sigma < 2h_2 - v \cos \beta_{-1} \quad (6.5)$$

Вопрос об устойчивости решения сводится к анализу корней кубического уравнения

$$x^3 + a_2 x^2 + a_4 x + a_6 = 0 \quad (6.6)$$

$$a_2 = (\theta_A \theta_C)^{-1} \{ \theta_A [\theta_C + (1 - \theta_A)(\theta_C - \theta_A)] \sin^2 \beta_* + \theta_A \theta_C \cos^2 \beta_* + 3\theta_C [1 - \theta_C - \theta_A(\theta_C - \theta_A)] + S^2 + S\theta_C(1 + \theta_A) \cos \beta_* \}$$

$$a_4 = (\theta_A \theta_C)^{-1} \{ [3\theta_C(1 - \theta_C) + 3(1 - \theta_A)(\theta_C - \theta_A)(1 - \theta_C + \theta_A) + \theta_A(1 - \theta_A)(\theta_C - \theta_A)] \sin^2 \beta_* - 3\theta_A \theta_C (\theta_C - \theta_A) \cos^2 \beta_* - 9\theta_C(1 - \theta_C)(\theta_C - \theta_A) + S^3 \cos \beta_* + S^2 [3\theta_A - 2\theta_C + (2 - \theta_A - \theta_C) \sin^2 \beta_*] + S[\theta_C^2 + 3\theta_C(1 - \theta_C) - 4\theta_C(\theta_C - \theta_A) + 2(1 - \theta_A)(\theta_C - \theta_A) \sin^2 \beta_*] \cos \beta_* \}$$

$$a_6 = (1 - \theta_A) \{ 12(1 - \theta_C)(\theta_C - \theta_A) - 3(1 - \theta_A)(\theta_C - \theta_A) \cos^2 \beta_* + S^2 - S[3(\theta_C - \theta_A) + 4(1 - \theta_C) + (1 - \theta_A)] \cos \beta_* \} \sin^2 \beta_* / (\theta_A \theta_C)$$

Для устойчивости решения необходимо и достаточно, чтобы все три корня этого уравнения были действительными отрицательными числами. В общем виде выражения для a_2, a_4, a_6 довольно громоздки, а условия неустойчивости тем более. Для того чтобы при $0 < \beta \leq \beta_{-1}$ исключить наличие устойчивого решения (6.4), нужно либо вообще исключить возможность такого решения, изъяв из области допустимых значений параметров область (6.5), либо при выбранных из (6.5) значениях параметров числовым расчетом определить знаки корней уравнения (6.6).

На участке $\beta_{-1} \leq \beta \leq \beta_1$ имеет место равенство $\delta_2 = -\Delta$, а положение гироскопа Γ_1 может быть различным — при равновесии спутника он либо остановится на одном из упоров при $\delta_1 = \pm \Delta$, либо при $\delta_1 = \delta_{1*}$. Оказывается, последнее положение Γ_1 неустойчиво по отношению к корпусу спутника — это определяется по знаку δ_1 при $\alpha = 0$, $\beta = \beta_*$, $\gamma = \pi$ и $\delta_1 \geq \delta_{1*}$. Если $\delta_1 = \Delta$, то выводы, полученные для $0 < \beta \leq \beta_{-1}$, распространяются на участок ($0 < \beta \leq \beta_1$). Если же при $\beta_{-1} < \beta < \beta_1$ окажется $\delta_1 = \delta_2 = -\Delta$, то можно доказать неустойчивость соответствующего решения, если только $\beta =$

² Выбор параметра k сделан с ориентацией на конкретный пример спутника в [2], в которой исследовалось быстрое действие системы стабилизации нулевого положения равновесия и были приняты следующие значения параметров: $\theta_A = 0,242$, $\theta_C = 0,947$, $v = 14,3$, $h = 59,4$, $k_1 = 84,9$, $k_2 = 7,264$, $k = k_2/h = 0,122$, $\sigma = 50 - 170$. При $\delta_0 = 30^\circ$, $\Delta = 20^\circ$ условие (6.3) дает $k < 0,677$.

$=\beta_* \neq 1/2\pi$. Чтобы исключить это последнее решение, необходимо обеспечить

$$\sigma \neq 2h \cos \delta_0 \cos \Delta. \quad (6.7)$$

Очевидно, что полученный результат распространяется и на участок $\beta_1 \leq \beta \leq \beta_{-11}$. На следующем участке $\beta_{-11} < \beta < \beta_{-22}$ решение β_* , δ_{1*} определяется первыми двумя уравнениями из (5.2). В характеристическом уравнении $\lambda^7 + a_1\lambda^6 + a_2\lambda^5 + a_3\lambda^4 + a_4\lambda^3 + a_5\lambda^2 + a_6\lambda + a_7 = 0$, составленном по уравнению возмущенного движения, в области допустимых значений параметров оказывается $a_7 < 0$, что и доказывает неустойчивость рассматриваемого решения, если принять

$$\delta_0 + 2\Delta < 1/2\pi \quad (6.8)$$

На участке $\beta_{-22} < \beta < \pi$ оба гироскопа свободны, т. е. не лежат на упорах при равновесном положении спутника. Уравнения равновесия (5.2) преобразуем так, чтобы получить $\beta = \beta_*$ графически на пересечении кривых $f_1(\beta) = \delta_1 + \delta_2 = -(\sigma + \nu \cos \beta) \sin \beta / k_2$, $f_2(\beta) = \delta_1 + \delta_2 = [\sin(\delta_0 + \delta_1 - \beta) + \sin(-\delta_0 + \delta_2 - \beta)] / k$.

Решение возможно в двух случаях (фиг. 4): $f_2(\beta_{-22}) > f_1(\beta_{-22})$ и $df_2/d\beta|_{\beta=\pi} > df_1/d\beta|_{\beta=\pi}$, т. е. когда $\sigma' < \sigma < \sigma'$; $f_1(\beta_{-22}) > f_2(\beta_{-22})$ и $df_1/d\beta|_{\beta=\pi} > df_2/d\beta|_{\beta=\pi}$, т. е. когда $\sigma' < \sigma < \sigma''$:

$$\sigma' = \frac{2h_2 k \cos \delta_0}{(k + \cos \delta_0) \cos(\delta_0 + \Delta)} + \nu, \quad \sigma'' = -\nu \cos \beta_{-22} + \frac{2h_2 \sin[\beta_{-22} - 1/2(\delta_1^0 - \Delta)] \cos[\delta_0 + 1/2(\delta_1^0 + \Delta)]}{\sin \beta_{-22} \cos(\delta_0 - \Delta)}$$

$$\delta_1^0 = \delta_1|_{\beta=\beta_*}$$

Для исследования неустойчивости возможного решения составим характеристическое уравнение $\lambda^8 + a_1\lambda^7 + a_2\lambda^6 + a_3\lambda^5 + a_4\lambda^4 + a_5\lambda^3 + a_6\lambda^2 + a_7\lambda + a_8 = 0$. Оказывается, что в области допустимых значений параметров знак a_8 совпадает со знаком $(df_1/d\beta - df_2/d\beta)|_{\beta=\beta_*}$ и во втором случае будет $a_8 < 0$ (фиг. 4, б), т. е. решение окажется неустойчивым. Чтобы исключить возможность устойчивого решения на участке $\beta_{-22} < \beta < \pi$, достаточно, например, вывести прямую $\sigma = \sigma'$ из области допустимых значений параметров на плоскости (h_2, σ) , уменьшив соответственно ее угловой коэффициент. Пусть

$$2k \cos \delta_0 / (k + \cos \delta_0) \cos(\delta_0 + \Delta) \leq (2\nu - 3) / (2\nu - 1,5)$$

$$k \leq \frac{(2\nu - 3) \cos \delta_0 \cos(\delta_0 + \Delta)}{(4\nu - 3) \cos \delta_0 - (2\nu - 3) \cos(\delta_0 + \Delta)} \quad (6.9)$$

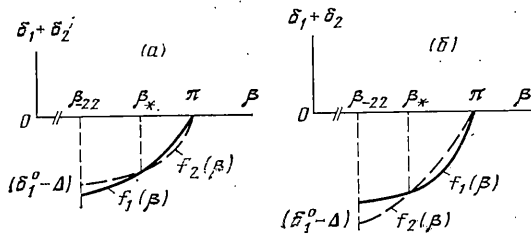
Тогда прямая $\sigma = \sigma'$ пройдет ниже прямой $\sigma = 2h_2 - \nu$, ограничивающей область допустимых значений параметров на плоскости (h_2, σ) .

При соблюдении условия (6.9) независимо от расположения прямой $\sigma = \sigma'$ решение на участке $\beta_{-22} < \beta < \pi$ при любых значениях h_2, σ из области допустимых значений параметров либо невозможно, либо неустойчиво.

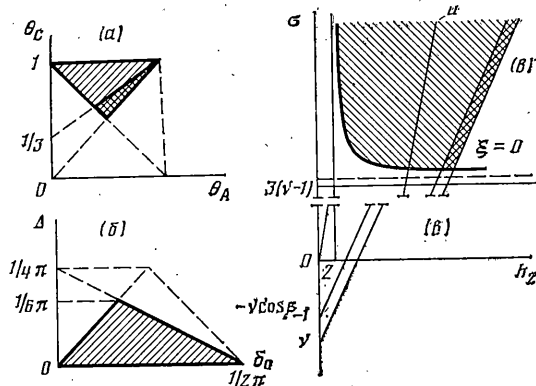
Для решения б ($\alpha = \gamma = 0$, $\beta = \beta_*$, $\delta_1 = \delta_{1*}$, $\delta_2 = \delta_{2*}$) аналогично предыдущему по двум последним уравнениям из (5.3) определяется зависимость положения гироскопов от параметра k и от значений β . Из графиков, аналогичных фиг. 3, видно, что $\delta_1 + \delta_2 \leq 0$ при любых $0 < \beta < \pi$ и $\delta_1 + \delta_2 \geq 0$ при $-\pi < \beta < 0$. И если принять $\sigma > \nu$, то оба слагаемых левой части первого уравнения из (5.3) будут иметь одинаковые знаки и равенство левой части нулю становится невозможным. (Отсюда делаем вывод о невозможности решения б).

Исследуем решение второй группы ($\alpha + \gamma = \pi$, $\beta = 1/2\pi$, $\delta_1 = \delta_{1*}$, $\delta_2 = \delta_{2*}$). Предполагается, что $\sin \gamma \neq 0$; δ_{1*} , δ_{2*} определяются из уравнений (5.4) с учетом (5.5). Как и в предыдущих исследованиях, будем считать $k < \cos \theta_2$. В этом случае гироскоп G_2 будет лежать на упоре $\delta_2 = -\Delta$, а гироскоп G_1 остановится либо на одном из упоров ($\delta_1 = \pm \Delta$), либо при $\delta_1 = \delta_{1*}$.

Составляя характеристические уравнения для каждого из этих случа-



Фиг. 4



Фиг. 5

ев, можно убедиться, что свободные члены характеристических уравнений будут отрицательны, т. е. рассматриваемые решения неустойчивы.

Подводя итоги выполненных исследований, изобразим графически на плоскостях (θ_A, θ_C) , (δ_0, Δ) , (h_2, σ) область допустимых значений параметров, обеспечивающих решение поставленной задачи (фиг. 5). При этом учтем условия (3.1), (4.5), (6.1), (6.2), (6.7), (6.8), а также ранее оговоренные ограничения для инерционных характеристик спутника ($\theta_A < \theta_C < 1$).

При выборе параметров A, B, C , соответствующих области с двойной штриховкой на фиг. 5, *а*, необходимо дополнительно учесть условие $\sigma > \nu$ и тем самым несколько уменьшить область на фиг. 5, *в*. Если же принять $\nu \leq 3(\nu - 1)$, т. е. $\nu \geq 1,5$ (область с простой штриховкой), то ограничение $\sigma > \nu$ отпадает.

На фиг. 5, *в* область допускаемых значений h_2, σ ограничена гиперболой $\xi = 0$ с асимптотами $h_2 = 2$ и $\sigma = 3\sqrt{(\nu - 1)^2 - \xi^2}$, $\xi = \cos \delta_0 \sin \Delta / \cos(\delta_0 + \Delta)$. В области, отмеченной двойной штриховкой, между прямыми $\sigma = 2h_2 - \nu$ и $\sigma = 2h_2 - \nu \cos \beta_{-1}$ после подбора всех параметров требуется сделать дополнительную проверку неустойчивости решения 5) по знакам корней уравнения (6.6). Прямая u с уравнением $\sigma = 2\eta h_2$, $\eta = \cos \delta_0 \cos \Delta / \cos(\delta_0 + \Delta)$ должна быть исключена из области допустимых значений h_2, σ .

Параметр k кроме заранее принятого ограничения $k < \cos \theta_2$ должен отвечать условиям (6.3) и (6.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Сарычев В. А., Садов Ю. А. Анализ динамики спутника с гидроаэродинамической системой ориентации. — В кн.: Космическая стрела. М.: Наука, 1974. с. 74–88.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Физматгиз. 1966. 576 с.

Смоленск

Поступила в редакцию
13.IX.1985