МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1987

УДК 539.374

О ВАРИАЦИОННОМ ПРИНЦИПЕ ОПИСАНИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ СЛОЖНОГО НАГРУЖЕНИЯ

ЗАВОЙЧИНСКИЙ Б. И.

Вариационный подход при описании предельных процессов нагружения [1, 2] реализует идею о функциональной взаимосвязи между тензорами повреждений и напряжений [3], открывая новые возможности для построения критериев прочности при переменном нагружении. Предсказания предлагаемой теории удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными по циклической прочности пластичных и хрупких материалов при двухчастотном и программном одноосных нагружениях [1, 4] [1], а также при симметричном нагружении в условиях плоского напряженного состояния.

Описание предельных простых процессов произвольного во времени нагружения в рамках предлагаемой теории базируется на кривых длительной и усталостной прочности при сдвиге, одноосном и равномерном двухосном нагружениях. Для построения общей теории предельных процессов простого нагружения материалов с произвольными механическими свойствами при одноосном [4, 5] и плоском [6] напряженных состояниях дополнительно привлекается интегральный оператор, ядро которого находится с помощью кривых длительной прочности и усталости при пульсирующем нагружении.

В публикуемой работе возможности развиваемого вариационного принципа реализуются при построении теории предельных процессов нагружения, компоненты которого изменяются во времени непропорционально.

1. Рассматривается координатный тетраэдр, наклонная грань которого имеет нормаль $\mathbf{n}_1$. На этой наклонной плоскости вводятся две ортогональные оси $\mathbf{n}_2$ и $\mathbf{n}_3$ так, что $\mathbf{n}_i\cdot\mathbf{n}_j=\delta_{ij}$, $\mathbf{n}_i=(n_{im})$ $(i, j, m=1, 2, 3)$; δ_{ij} — символ Кронекера.

Под процессом нагружения на наклонной грани $\mathbf{Y}_n=\mathbf{Y}_n(x)$, $x\in[0, t]$ понимается как усилие $\mathbf{P}_n=\mathbf{P}_n(x)$, определяемое компонентами тензора напряжений $\sigma_{ij}=\sigma_{ij}(x)$, так и деформация $\boldsymbol{\varepsilon}_n=\boldsymbol{\varepsilon}_n(x)$, характеризуемая компонентами тензора деформаций $\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}(x)$ [2].

Процесс нагружения $\mathbf{Y}_n$ представляется следующим образом:

$$\mathbf{Y}_n(x)=y_i(x)\mathbf{n}_i,\quad y_i(x)=\mathbf{Y}_n(x)\cdot\mathbf{n}_i=y_{mj}(x)n_{im}n_{1j}=$$
$$=y_0(x)\delta_{1i}+y_{i,1}(x)+y_{i,2}(x)\quad (i=1, 2, 3),\quad 3y_0(x)=y_{ii}(x) \tag{1.1}$$

$$y_{i,1}(x)=s_{jj}(x)n_{ij}n_{1j}=s_{11}(x)(n_{i1}n_{11}-n_{i3}n_{13})+s_{22}(x)(n_{i2}n_{12}-n_{i3}n_{13}) \tag{1.2}$$

$$y_{i,2}(x)=s_{mj}(x)n_{ij}n_{1m}(1-\delta_{mj}),\quad s_{ij}(x)=y_{ij}(x)-y_0(x)\delta_{ij} \tag{1.3}$$

где n_{ij} $(i, j=1, 2, 3)$ связаны шестью соотношениями ортогональности, т. е. имеются лишь три независимые координаты. Если в качестве таких координат выбрать n_{11}, n_{12} и n_{21}, то оставшиеся шесть координат выражаются через них следующим образом:

$$n_{13}=\pm(1-n_{11}^2-n_{12}^2)^{1/2}$$
$$n_{22}=[-n_{11}n_{12}n_{21}+n_{13}(1-n_{11}^2-n_{21}^2)^{1/2}]/(1-n_{11}^2)$$
$$n_{11}\neq1,\quad n_{22}=1,\quad n_{11}=1$$
$$n_{32}=\pm n_{13}/[(an_{11}+n_{12})^2+(1+a^2)n_{13}^2]^{1/2}$$
$$n_{31}=an_{32}\qquad a=(n_{22}n_{13}-n_{12}n_{23})/(n_{11}n_{23}-n_{21}n_{13})$$
$$n_{11}n_{23}\neq n_{21}n_{13},\quad n_{32}=n_{31}=0,\quad n_{11}n_{23}=n_{21}n_{13}$$

[1] См. также: *Завойчинский Б. И.* О теории предельных процессов нагружения. М., 1984.— 23 с. Деп. в ВИНИТИ 01.03.84; № 1160-84.

$$n_{i3}=-(n_{i1}n_{11}+n_{i2}n_{12})/n_{13} \quad n_{13}\neq 0 \quad (i=2,\ 3)$$
$$n_{i3}=\pm(1-n_{i1}^2-n_{i2}^2)^{1/2} \quad n_{13}=0 \quad (i=2,\ 3)$$

Под предельным процессом $y_{ij}^*=y_{ij}^*(t,\ x)$ $(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$ $x\in[0,\ t]$ понимается такой процесс малых упруговязкопластических деформаций, который переводит элемент из некоторого начального состояния в определенное предельное состояние в момент времени t, называемый долговечностью [1, 2].

Компоненты предельного процесса нагружения $y_{ij}^*=y_{ij}^*(t,\ x)$ $(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$, соответствующие данному нагружению $y_{ij}=y_{ij}(x)$, целесообразно задать в однопараметрическом виде:

$$y_{ij}^*(t,\ x)=y_{ij}(x)/y^*(t) \quad x\in[0,\ t], \quad \mathbf{Y}_n^*(t,\ x)=\mathbf{Y}_n(x)/y^*(t) \tag{1.4}$$

Утверждение. Предельный процесс нагружения реализует максимум целевого функционала по пространственно-временным координатам [2]:

$$\max\{\|\Pi[z, \mathbf{Y}_n^*(t,x)]_{x=0}^{t}\| : 0\leqslant z\leqslant t,\ n_{11},\ n_{12},\ n_{21}\}=1 \tag{1.5}$$

При конкретизации постулата (1.5) с учетом (1.1)–(1.4) функцию $y^*(t)$ предлагается находить по следующему выражению ($q=1$ или 2):

$$y^*(t)=\max\{J(z,\ n_{11},\ n_{12},\ n_{21}) : 0\leqslant z\leqslant t,\ n_{11},\ n_{12},\ n_{21}\} \tag{1.6}$$

$$J=\left(\sum_{i=1}^{3} J_j^q\right)^{1/q} \tag{1.7}$$

где для пластичных материалов

$$J_i=\sum_{j=1}^{2}\frac{y_{i,j}^2(z)}{|\Pi_i^+(z, y_{i,j}(x))]_{x=0}^{t}|}-\frac{y_0^2(z)\delta_{1i}}{|\Pi_0^+[z, y_0(x)]_{x=0}^{t}|} \quad (i=1,2,3) \tag{1.8}$$

для хрупких материалов

$$J_i=\sum_{j=1}^{2}|\Pi_i^-[z, y_{i,j}(x)]_{x=0}^{t}|+|\Pi_0^-[z, y_0(x)]_{x=0}^{t}|\delta_{1i} \quad (i=1,2,3) \tag{1.9}$$

Таким образом, для описания предельных процессов сложного нагружения привлекаются четыре независимых линейных функционала $\Pi_i^\pm=\Pi_i^\pm[z, y(x)]_{x=0}^{t}$ $(i=0,\ 1,\ 2,\ 3)$. Это линейные интегральные операторы с симметрическими ядрами, которые могут быть представлены в форме сходящихся рядов [1]:

$$\Pi_i^\pm[z, f(x)]_{x=0}^{t}=\lambda_i^\pm|f(z)|\mp\left|\frac{1}{t}\int_0^t K_i^\pm(z,x)f(x)\,dx\right|=$$

$$=\lambda_i^\pm|f(z)|\mp\left|\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_i^\pm(k,t)f_k(t)\varphi_k(z)\right| \quad (i=0,1,2,3) \tag{1.10}$$

где $\varphi_k=\varphi_k(x)$ $(k=0,\ 1,\ldots,\ \infty)$ — полная замкнутая ортогональная система собственных функций для интервала $[0,\ t]$:

$$f_k(t)=\frac{1}{t}\int_0^t f(x)\varphi_k(x)\,dx, \qquad \frac{1}{t}\int_0^t K_i^\pm(z,x)\varphi_k(x)\,dx=\lambda_i^\pm(k,t)\varphi_k(z)$$

В рассматриваемой теории предполагается, что

$$\lambda_0^+(k,\ t)>\lambda_1^+(k,\ t)\geqslant\lambda_3^+(k,\ t)\geqslant\lambda_2^+(k,\ t), \tag{1.11}$$
$$\lambda_0^-(k,\ t)<\lambda_1^-(k,\ t)\leqslant\lambda_3^-(k,\ t)\leqslant\lambda_2^-(k,\ t)$$

2. В эксперименте реализуются два вида предельных асимметричных напряжений при плоском напряженном состоянии:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11}^*(t,\ x)=\sigma_\varphi^*(k,\ t)\,(\sigma_{1,\ m}+\sin 2\pi kx/t)\\
&\sigma_{22}^*(t,\ x)=\sigma_\varphi^*(k,\ t)\,(\sigma_{2,\ m}+\alpha\sin\,(2\pi kx/t+\varphi))\\
&\sigma_{33}^*=\sigma_{12}^*=\sigma_{13}^*=\sigma_{23}^*=0 \quad x\in[0,\ t]
\end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11}^*(t,\ x)=\sigma_\varphi^*(k,\ t)\,(\sigma_m+\sin 2\pi kx/t)\\
&\sigma_{12}^*(t,\ x)=\sigma_\varphi^*(k,\ t)\,(s_m+s_a\sin\,(2\pi kx/t+\varphi))\\
&\sigma_{22}^*=\sigma_{33}^*=\sigma_{13}^*=\sigma_{23}^*=0 \quad x\in[0,\ t]
\end{aligned} \tag{2.2}$$

для которых предельным состоянием является появление коротких трещин — субмикро (10^{-6}—10^{-7} мм) и микроскопических (10^{-2}—10^{-4} мм) или их объединение в макроскопические трещины (0,1—0,5 мм) или подрастание макротрещин до определенной длины (5—10 мм). Зависимости (1.6)—(1.10) определяют взаимосвязь параметров предельного напряжения (2.1) в таком виде:

для пластичных материалов

$$\sigma_\varphi^*(k,t)=1/\max\left\{\left[\left(\sum_{i=1}^{3}J_i(z,n_{11},n_{12},n_{21}\right)^2\right]^{1/2}:z\in[0,1],\ n_{11},n_{12},n_{21}\right\} \tag{2.3}$$

$$J_i=\sigma_{i,1}^2(z)/[\lambda_i^+|\sigma_{i,1}(z)|-|\lambda_i^+(0,t)s_{i,m}+\lambda_i^+(k,t)s_{i,a}(z)|]- \tag{2.4}$$

$$-\sigma_0^2(z)\delta_{1i}/[\lambda_0^+|\sigma_0(z)|-|\lambda_0^+(0,t)\sigma_{0,m}+\lambda_0^+(k,t)\sigma_{0,a}(z)|] \tag{2.5}$$

$$3s_{i,\ a}(z)=(2\sin 2\pi kz-\alpha\sin\,(2\pi kz+\varphi))\,(n_{i1}n_{11}-n_{i3}n_{13})+$$
$$+(2\alpha\sin\,(2\pi kz+\varphi)-\sin 2\pi kz)\,(n_{i2}n_{12}-n_{i3}n_{13})$$
$$3s_{i;\ m}=(2\sigma_{1,\ m}-\sigma_{2,\ m})\,(n_{i1}n_{11}-n_{i3}n_{13})+(2\sigma_{2,\ m}-\sigma_{1,\ m})\,(n_{i2}n_{12}-n_{i3}n_{13})$$
$$\sigma_{i,\ 1}(z)=s_{i,\ m}+s_{i,\ a}(z),\qquad 3\sigma_{0,\ m}=\sigma_{1,\ m}+\sigma_{2,\ m}$$
$$3\sigma_{0,\ a}(z)=\sin 2\pi kz+\alpha\sin\,(2\pi kxt+\varphi),\qquad \sigma_0(z)=\sigma_{0,\ m}+\sigma_{0,\ a}(z)$$

для хрупких материалов

$$\sigma_\varphi^*(k,t)=1/\max\left\{\sum_{i=1}^{3}J_i(z,n_{11},n_{12},n_{21})\ :z\in[0,1],n_{11},n_{12},n_{21}\right\} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}
&J_i=\lambda_i^-|\sigma_{i,\ 1}(z)|+|\lambda_i^-(0,\ t)s_{i,\ m}+\lambda_i^-(k,\ t)s_{i,\ a}(z)|+\\
&+[\lambda_0^-|\sigma_0(z)|+|\lambda_0^-(0,t)\sigma_{0,m}+\lambda_0^-(k,t)\sigma_{0,a}(z)|]\delta_{1i}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Параметры предельного нагружения (2.2) связаны следующими зависимостями (по (1.6)—(1.10)):

для пластичных материалов

$$\sigma_\varphi^*(k,t)=1/\max\left\{\left[\sum_{i=1}^{3}J_i^2(z,n_{11},n_{12},n_{21})\right]^{1/2}:z\in[0,1],n_{11},n_{12},n_{21}\right\} \tag{2.8}$$

$$J_i=\frac{\sigma_{11}^2(z)\,|2n_{i1}n_{11}-n_{i3}n_{13}-n_{i2}n_{12}|}{3|\sigma_m\lambda_i^++\lambda_i^+(k,t)\sin 2\pi kz|}+\frac{\sigma_{12}^2(z)\,|n_{i2}n_{11}+n_{i1}n_{12}|}{|s_m\lambda_i^++s_a\lambda_i^+(k,t)\sin(2\pi kz+\varphi)|}-$$
$$-\frac{\sigma_{11}^2(z)\delta_{1i}}{3|\sigma_m\lambda_0^++\lambda_0^+(k,t)\sin 2\pi kz|}$$

$$\sigma_{11}(z)=\sigma_m+\sin 2\pi kz,\qquad \sigma_{12}(z)=s_m+s_a\sin\,(2\pi kz+\varphi)$$

для хрупких материалов

$$\sigma^*(k,t)=1/\max\left\{\sum_{i=1}^{3}J_i(z,n_{11},n_{12},n_{21})\ :z\in[0,1],n_{11},n_{12},n_{21}\right\} \tag{2.9}$$

$$J_i=|\lambda_i^-\sigma_m+\lambda_i^-(k,\ t)\sin 2\pi kz||2n_{i1}n_{11}-n_{i3}n_{13}-n_{i2}n_{12}|+ \qquad (2.10)$$
$$+|\lambda_i^-s_m+\lambda_i^-(k;\ t)s_a\sin(2\pi kz+\varphi)||n_{i2}n_{11}+$$
$$+n_{i1}n_{12}|+|\lambda_0^-\sigma_m+\lambda_0^-(k,\ t)\sin 2\pi kz|\delta_{1i}/3$$

Собственные значения ядер $\lambda_i^\pm$ и $\lambda_i^\pm(k,\ t)$ $(i=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ интегральных операторов (1.10) могут быть определены при помощи соотношений (2.3)—(2.10) и экспериментальных данных по циклической прочности материалов при четырех видах предельных напряжений. В качестве примера рассматривается система, состоящая из трех тензоров напряжений (2.1) при $\varphi=0$, $\alpha=\pm1$, $\alpha=0$, $k=1,\ 2,\ldots$, $\sigma_{i,\,m}=0$, $i=1,\ 2$, и $k=0$, $\sigma_{i,\,m}\neq0$, $i=1,\ 2$ и четвертого тензора напряжений (2.2) при $\varphi=\pi/2$, $s_a={}^1/_2$, $k=1,\ 2,\ldots$ $\ldots,\ \sigma_m=s_m=0$ и $k=0$, $\sigma_m\neq0$, $s_m\neq0$.

При изучении предельного сдвигового симметричного процесса нагружения находятся следующие соотношения:

для пластичных материалов

$$\lambda_2^+(k,\ t)=\tau(k,\ t),\quad n_{11}^*=n_{12}^*=1/\sqrt{2} \qquad (2.11)$$

для хрупких материалов

$$(1+x_1^2)^{1/2}-2x_1\eta_0=0 \qquad (2.12)$$
$$x_1=\lambda_1^-(k,\ t)/\lambda_2^-(k,\ t),\quad \eta_0=[\lambda_2^-(k,\ t)\tau(k,\ t)]^{-1}$$
$$n_{11}^*=n_{12}^*=n_*,\quad n_*^2=(1-x_1/(1+x_1^2)^{1/2})/2$$

Здесь $\tau=\tau(k,\ t)$ — семейство кривых малоцикловой и ограниченной усталости при симметричном кручении.

При рассмотрении предельного одноосного симметричного нагружения получаются такие соотношения:

для пластичных материалов

$$9\eta_2^{-2}=[(1-2x_1y)/(2x_1(x_1^2-1))+y]^2+ \qquad (2.13)$$
$$+(4x_1^2-2x_1y-3)(2x_1y+2x_1^3-3)/(4(1-x_1^2)^2)$$

$$y=\lambda_2^+(k,\ t)/\lambda_0^+(k,\ t),\quad \eta_2=\sigma(k,\ t)/\tau(k,\ t),\quad x_1=\lambda_2^+(k,\ t)/\lambda_i^+(k,\ t)$$

$$n_{12}^*=n_{13}^*=n_*,\quad n_{11}^{*2}=1-2n_*^2$$
$$n_*^2=(4x_1^2/3-2x_1y/3-1)/4(x_1^2-1)$$

для хрупких материалов

$$1+x_1/3+2y/3=2/\eta_2^*,\quad \eta_2^*=\sigma(k,\ t)\lambda_2^-(k,\ t),\quad n_*={}^1/_2 \qquad (2.14)$$

Здесь $\sigma=\sigma(k,\ t)$ — семейство кривых малоцикловой и ограниченной усталости при симметричном одноосном напряжении (мягкое нагружение).

Предельное равномерное двухосное симметричное нагружение, при котором $n_{11}^*=n_{12}^*=n_*$, $n_{13}^{*2}=1-2n_*^2$, обусловливает следующую взаимосвязь параметров:

для пластичных материалов

$$9/\eta_1^2\eta_2^2=[(1-4x_1y)/(2x_1(x_1^2-1))+2y]^2+ \qquad (2.15)$$
$$+(4x_1^2-4x_1y-3)(4x_1y+2x_1^2-3)/(4(1-x_1^2)^2)$$
$$n_*^2=(4x_1^2/3-4x_1y/3-1)/(4(x_1^2-1))$$

для хрупких материалов

$$1+x_1/3+4y/3=2\eta_0^*,\quad \eta_0^*=[\sigma_{11}(k,\ t)\lambda_2^-(k,\ t)]^{-1},\quad n_*={}^1/_2 \qquad (2.16)$$

Здесь $\sigma_{11}=\sigma_{11}(k,\ t)$ — семейство кривых малоцикловой и ограниченной усталости при симметричном равномерном двухосном напряжении.

Соотношения (2.11), (2.13), (2.15) образуют систему уравнений, определяющую собственные значения $\lambda_i^+(k,\ t)$ $(i=0,\ 1,\ 2)$ для пластичных материалов, а (2.12), (2.14), (2.16) — систему уравнений по нахождению $\lambda_i^-(k,\ t)$ $(i=0,\ 1,\ 2)$ для хрупких материалов, решение которых обсуждалось в [2]. Собственные значения $\lambda_3^\pm(k,\ t)$ являются решением следующих уравнений:

для пластичных материалов

$$\max\left\{|\sin 2\pi kz|\left(\sum_{i=1}^{2} p_i^2/\lambda_i^+(k,t)^2+p_3^2/\lambda_3^+(k,t)^2\right)^{1/2}: z\in[0,1],\right.$$

$$\left. n_{11}, n_{12}, n_{21}\right\}=\overset{*}{\sigma}_{\pi/2}(k,t)^{-1} \qquad (2.17)$$

для хрупких материалов

$$\max\left\{|\sin 2\pi kz|\left(\sum_{i=1}^{2} p_i\lambda_i^-(k,t)+p_3\lambda_3^-(k,t)\right): z\in[0,1],\right.$$

$$\left. n_{11}, n_{12}, n_{21}\right\}=\overset{*}{\sigma}_{\pi/2}(k,t)^{-1}$$

$$p_i=|2n_{i1}n_{11}-n_{i3}n_{13}-n_{i2}n_{12}|+|n_{i2}n_{11}+$$
$$+n_{i1}n_{12}\|\operatorname{ctg} 2\pi kz|/2+[\lambda_0^\pm(k,t)/\lambda_1^\pm(k,t)]^{\pm1}\sigma_{1i}/3 \qquad (2.18)$$

(верхние знаки — для пластичных материалов, нижние — для хрупких), $\overset{*}{\sigma}_{\pi/2}=\overset{*}{\sigma}_{\pi/2}(k,t)$ — семейство кривых малоцикловой и ограниченной усталости при симметричном нагружении (2.2), в котором $\varphi=\pi/2$, $s_a={}^1/_2$, $\sigma_m=$ $=s_m=0$

Предельное двухосное симметричное деформирование

$$\varepsilon_{11}^*(t,x)=\varepsilon_\varphi^*(k,t)\sin 2\pi kx/t \qquad (2.19)$$
$$\varepsilon_{22}^*(t,x)=\alpha\varepsilon_\varphi^*(k,t)\sin(2\pi kx/t+\varphi)$$
$$\varepsilon_{33}^*(t,x)=-\mu(\varepsilon_{11}^*(t,x)+\varepsilon_{22}^*(t,x))/(1-\mu)$$

пластичных материалов удовлетворяет соотношению (2.3), а хрупких материалов — (2.6), в которых J_i ($i=1, 2, 3$) определяются следующими зависимостями:

$$3J_1/(1-\mu)=\{[(2-\mu)\sin 2\pi kz-\alpha(1-2\mu)\sin(2\pi kz+\varphi)](2n_{11}^2+n_{12}^2-1)/$$
$$/[\lambda_2^\pm(k,t)]^{\pm1}+[\alpha(2-\mu)\sin(2\pi kz+\varphi)-(1-2\mu)\sin 2\pi kz]\times$$
$$\times(2n_{12}^2+n_{11}^2-1)\}[\lambda_1^\pm(k,t)]^{\mp1}\mp(1-2\mu)[\sin 2\pi kz+$$
$$+\alpha\sin(2\pi kz+\varphi)[\lambda_0^\pm(k,t)]^{\mp1}$$

$$3J_2/(1-\mu)=\{n_{21}n_{11}[(2-\mu)\sin 2\pi kz-(1-2\mu)\alpha\sin(2\pi kz+\varphi)]+$$
$$+n_{22}n_{12}[-(1-2\mu)\sin\pi kz+(2-\mu)\alpha\sin(2\pi kz+\varphi)]\}[\lambda_2^\pm(k,t)]^{\mp1}$$

$$3J_3/(1-\mu)=n_{31}n_{11}[(2-\mu)\sin 2\pi kz-(1-2\mu)\alpha\sin(2\pi kz+\varphi)][\lambda_2^\pm(k,t)]^{\mp1}+$$
$$+n_{32}n_{12}[-(-1-2\mu)\sin 2\pi kz+(2-\mu)\alpha\sin(2\pi kz+\varphi)][\lambda_3^\pm(k,t)]^{\mp1}$$

(верхние знаки соответствуют пластичным материалам, а нижние — хрупким).

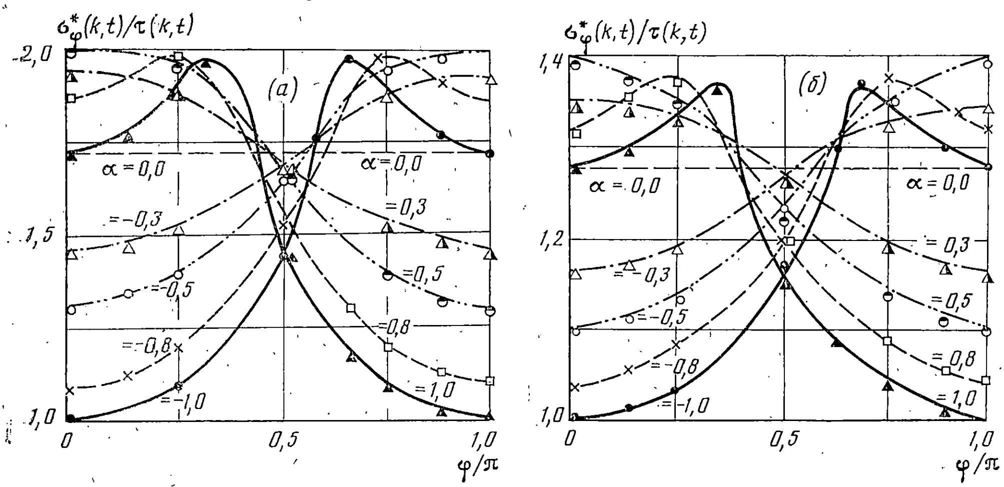
Предельный симметричный сдвиг описывается следующими зависимостями: для пластичных материалов $\lambda_2^+(k,t)=\gamma(k,t)$; для хрупких материалов (2.12), в которой $\eta_0=[\lambda_2^-(k,t)\gamma(k,t)]^{-1}$, где $\gamma=\gamma(k,t)$ — семейство кривых малоцикловой и ограниченной усталости при симметричной закрутке (в условиях жесткого нагружения).

Предельное одноосное симметричное деформирование задается для пластичных материалов соотношением (2.13), в котором

$$\eta_2=\gamma(k,t)/\varepsilon(k,t)(1+\mu),\quad x_1=\gamma(k,t)/\lambda_1^+(k,t),$$
$$y=\gamma(k,t)(1-2\mu)[(1+\mu)\lambda_0^+(k,t)]^{-1},$$

где $\varepsilon=\varepsilon(k,t)$ — семейство кривых малоцикловой и ограниченной усталости при симметричном одноосном деформировании (жесткое нагружение), для хрупких материалов — соотношением (2.14), в котором

$$\eta_2^*=[\varepsilon(k,t)(1+\mu)\lambda_2^-(k,t)]^{-1}.$$



Фиг. 1

Предельное двухосное равномерное симметричное деформирование представляется для пластичных материалов соотношением (2.15), в котором $\eta_2=\gamma(k,\ t)[(1+2\mu)\varepsilon_{11}(k,\ t)]^{-1}$; для хрупких материалов — соотношением (2.16), причем $\eta_0{}^*=1/[(1+2\mu)\varepsilon_{11}(k,\ t)\lambda_2{}^-(k,\ t)]^{-1}$. Здесь $\varepsilon_{11}=\varepsilon_{11}(k,\ t)$ — семейство кривых малоцикловой и ограниченной усталости при равномерном двухосном симметричном деформировании (жесткое нагружение).

Связь параметров предельного деформирования (2.19) при $\varphi=\pi/2$ описывается соотношениями (2.17), в которых вместо $\overset{*}{\sigma}_{\pi/2}(k,\ t)$ следует подставить $\varepsilon^*_{\pi/2}(k,\ t)$. Здесь $\overset{*}{\varepsilon}_{\pi/2}=\overset{*}{\varepsilon}_{\pi/2}(k,t)$ — семейство кривых малоцикловой и ограниченной усталости при симметричном деформировании (2.19) и $\varphi=\pi/2$.

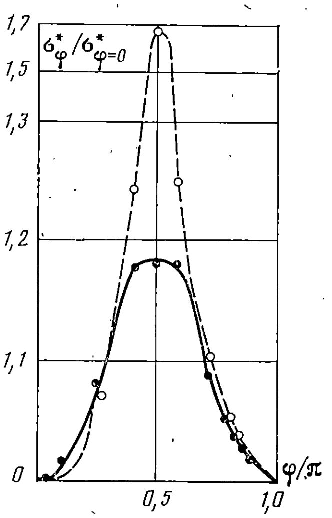
Вместо соотношения (2.18) следует использовать следующее соотношение

$$p_i=(1+\mu)\,|2n_{i1}n_{11}-n_{i3}n_{13}-n_{i2}n_{12}|/3+\alpha|(n_{i1}n_{12}+n_{i2}n_{11})\operatorname{ctg}2\pi kz|-$$
$$-(1-2\mu)[\lambda_1{}^{\pm}(k,\ t)/\lambda_0{}^{\pm}(k,\ t)]^{\pm1}\delta_{1i}/3\quad(i=1,\ 2,\ 3).$$

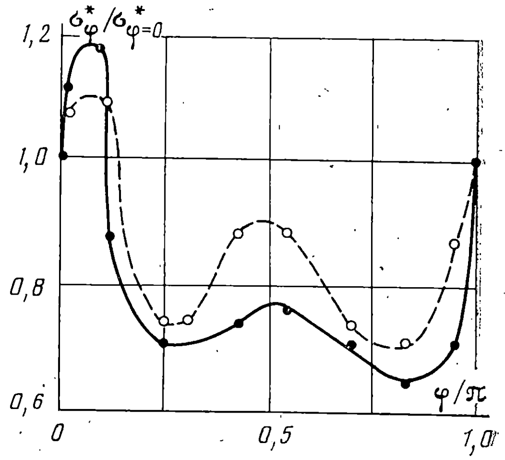
3. На фиг. 1 представлены результаты численного анализа несинхронного симметричного двухосного предельного нагружения (2.1) при $\sigma_{1,m}=\sigma_{2m}=0$ по соотношениям (2.3)—(2.6) с учетом (2.11)—(2.18) (*а* — для пластичных материалов, *б* — для хрупких материалов, у которых пределы прочности при симметричном одноосном и равномерном двухосном нагружениях равны, т. е. $\sigma(k,\ t)=\sigma_{11}(k,\ t)=\sqrt{3}\tau(k,\ t)$. Это предельное нагружение может рассматриваться в качестве тестового нагружения. Взаимосвязь $\sigma_\varphi{}^*\sim\alpha\sim\varphi$ отражает основные закономерности циклической прочности материалов. Например, при $\alpha=-1$ и изменении φ в диапазоне $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ предел циклической прочности монотонно изменяется от значения предела усталости при симметричном сдвиге к пределу усталости при равномерном двухосном симметричном нагружении. В диапазоне $0{,}625\leqslant\varphi/\pi\leqslant\leqslant1{,}0$ предел циклической прочности выше предела двухосной прочности, что и наблюдается в эксперименте [7].

Из фиг. 1 следует, что существует несинхронное двухосное предельное нагружение, в котором $\alpha\neq1$ при определенной связи $\varphi=\varphi(\alpha)$, адекватное синхронному двухосному равномерному нагружению ($\alpha=1$, $\varphi=0$).

Результаты численного анализа несинхронного симметричного нагружения (2.2) при $\sigma_m=s_m=0$ по приведенной выше теории показаны на фиг. 2. Установлено, что наибольшее увеличение прочности (на 15—20%) следует ожидать при $\varphi=\pi/2$. Если же при расчете в качестве предельной плоскости выбирать октаэдрическую площадку, увеличение предела прочности при $\varphi=0{,}5\pi$ достигает 70%, что противоречит экспериментальным данным.



Фиг. 2



Фиг. 3

На фиг. 3 представлена взаимосвязь $\sigma_\varphi^* \sim \varphi$ для предельного пульсирующего нагружения (2.2) при $\sigma_m = s_m = 1$.

При небольших значениях $\varphi \leqslant 0{,}1\pi$ наблюдается повышение прочности до 15—20%. В дальнейшем происходит уменьшение предела усталостной прочности на 20—35%. Если при расчете выбрать октаэдрическую площадку в качестве предельной, получается меньшая изменчивость пределов циклической прочности.

На фиг. 2 и 3 сплошные линии и темные точки изображают зависимость $\sigma_\varphi^* \sim \varphi$ на предельной плоскости, которая находится при решении вариационной задачи. Для сравнения также представлена эта взаимосвязь на октаэдрической плоскости — штриховые линии и светлые точки.

Упомянутые закономерности найдены и при экспериментальном изучении предельных процессов (2.2) [7—11].

Уже первые экспериментальные исследования циклической прочности материалов при несинхронном симметричном нагружении изгибом и кручением показали, что для $N = 10^7$ циклов при изменении сдвига фаз в диапазоне $(0, \pi/2)$ происходит увеличение значений предельных амплитуд напряжений для закаленных и пластичных сталей на 10%, для чугунов — на 30%, а для дюралюминия — почти не изменяются.

Для другой пластичной стали значения компонент предельных амплитуд несинхронного нагружения (при отношении $\overset{*}{\sigma}_{1,a}/\sigma_{12,a} = 2$ и разности фаз между ними $\varphi = \pi/2$) на 10% ниже величины компонент предельных амплитуд синхронного нагружения ($\varphi = 0$) в области неограниченной усталости.

Дальнейшие эксперименты подтвердили описанное выше влияние сдвига фаз — для некоторых материалов положительное (предельные амплитуды увеличиваются), для других — отрицательное (уменьшение предельных амплитуд). Чем меньше отношение η_2, тем больше влияние сдвига фаз.

4. Параметры предельного нагружения (2.1), в котором $\sigma_{1,m} = \alpha = \varphi = 0$, т. е. $\sigma_{11}^*(t, x) = \sigma_a^*(k, t) \sin 2\pi kx/t$, $\sigma_{22}^*(t, x) = \sigma_a^*(k, t)\sigma_{2,m}$, связаны согласно (2.3)—(2.6) следующими зависимостями:

для пластичных материалов

$$(\sigma_a^* \sigma^* + \overset{*}{\sigma}_{2,m})^2 [\eta_2^2 \sigma_a^{*2} + (4 - \eta_2^2)(f_2 \sigma_a^* + f_3 \sigma_{2,m}/\sigma^*)^2]^{1/2} = 2 f_1(\sigma_a^*, \sigma_{2,m}) \quad (4.1)$$

$$f_1(\sigma_a^*, \overset{*}{\sigma}_{2,m}) = \begin{cases} \sigma_a^* \overset{*}{\sigma}_{2,m} + \sigma_a^{*2} \sigma^{*2}; & 0 \leqslant \sigma_{2,m} \leqslant 1{,}0 \\ \sigma_a^* \overset{*}{\sigma}_{2,m} \sigma^* + \sigma_{2,m}^{*2}/\sigma^*; & 1{,}0 < \sigma_{2,m} \end{cases}$$

$$f_2=\begin{cases}1\\2q-3\\q-3\\3q-5\end{cases},\quad f_3=\begin{cases}3q-5; & 0\leqslant\sigma_{2,m}\leqslant 0{,}5\\3-q; & 0{,}5<\sigma_{2,m}\leqslant 1{,}0\\3-2q; & 1{,}0<\sigma_{2,m}\leqslant 2{,}0\\1 & 2{,}0<\sigma_{2,m}\end{cases}$$

для хрупких материалов

$$\sigma_a^{*2}+(f_4\overset{*}{\sigma}_{2,m}-f_5)\sigma_a^*+f_6\overset{*}{\sigma}_{2,m}/\sigma^*+f_7\overset{*2}{\sigma}_{2,m}/\sigma^*=0 \tag{4.2}$$

$$f_4=\begin{cases}1+a_1/\sigma^*\\1-a_3/(a_2\sigma^*)\\1-a_2/(a_3\sigma^*)\\1+1/(a_1\sigma^*)\end{cases},\quad f_5=\begin{cases}1\\a_2^{-1}\\0\\0\end{cases},\quad f_6=\begin{cases}0\\0\\a_3^{-1}\\-a_1^{-1}\end{cases},$$

$$f_7=\begin{cases}a_1; & 0\leqslant\sigma_{2,m}\leqslant 0{,}5\\a_3/a_2; & 0{,}5<\sigma_{2,m}\leqslant 1{,}0\\-a_2/a_3; & 1{,}0<\sigma_{2,m}\leqslant 2{,}0\\a_1^{-1}; & 2{,}0<\sigma_{2,m}\end{cases}$$

$$\sigma_a^*=\sigma_a^*(k,t)/\sigma(k,t),\qquad \overset{*}{\sigma}_{2,m}=\sigma_a^*(k,t)\sigma_{2,m}/\sigma_b$$

$$\sigma^*=\sigma(k,t)/\sigma_b,\qquad q=(4\eta_1^2-\eta_2^2)/(4-\eta_2^2)$$

$$a_1=\eta_2-5+3\eta_1,\qquad a_2=\eta_2-3+2\eta_1,\qquad a_3=\eta_2-3+\eta_1$$

Анализ соотношений (4.1) при $\eta_2=\sqrt{3}$, $\eta_1=1$, $\sigma^*=0{,}5$ и (4.2) при $\eta_2=1{,}5$, $\eta_1=1$, $\sigma^*=0{,}5$ показывает, что значение $\sigma_a^*\approx 1{,}0$ для $\overset{*}{\sigma}_{2,m}$ из диапазона [0; 0,6] и уменьшается по мере дальнейшего увеличения $\overset{*}{\sigma}_{2,m}$, достигая нуля при $\overset{*}{\sigma}_{2,m}=1{,}0$.

По соотношению (4.1) при $2>\eta_2>\sqrt{3}$, $\eta_1\leqslant 1{,}0$ предельная амплитуда напряжений σ_a^* монотонно уменьшается по мере увеличения $\overset{*}{\sigma}_{2,m}$.

Согласно соотношения (4.2) при $\sqrt{3}\geqslant\eta_2>1{,}5$, $\eta_1\leqslant 1{,}0$ и изменении $\overset{*}{\sigma}_{2,m}$ в диапазоне $0\leqslant\overset{*}{\sigma}_{2,m}\leqslant 0{,}6$ вначале идёт увеличение σ_a^*, не превышающее 10%, а затем ее снижение до единицы. При увеличении $\overset{*}{\sigma}_{2,m}$ в диапазоне [0,6; 1,0] σ_a^* монотонно уменьшается до нуля.

Вышеуказанные закономерности наблюдаются в эксперименте. Параметры предельного нагружения (2.2) при $\sigma_m=s_a=\varphi=0$, т. е. $\sigma_{11}^*(t,x)=\sigma_a^*(k,t)\sin 2\pi kx/t$, $\sigma_{12}^*(t,x)=\sigma_a^*(k,t)s_m$, согласно (2.7)—(2.10) удовлетворяют следующим соотношениям:

для пластичных материалов

$$\sigma_a^*(k,t)^{-2}=\sigma_{-1}(k,t)^{-2}+s_m^2/\tau_b^2 \tag{4.3}$$

для хрупких материалов

$$\sigma_a^*(k,t)^{-2}=(\eta_2-1)/\sigma_{-1}(k,t)^2+(2-\eta_2)/(\sigma_{-1}(k,t)\sigma_a^*(k,t))+s_m^2/\tau_b^2 \tag{4.4}$$

Взаимосвязь параметров предельного нагружения

$$\sigma_{11}^*(t,x)=\tau_a^*(k,t)\sigma_m,\qquad \sigma_{12}^*(t,x)=\tau_a^*(k,t)\sin 2\pi kx/t$$

по (2.7)—(2.10) представляется формулами:

для пластичных материалов

$$\tau_a^*(k,\ t)^{-2}=\tau_{-1}(k,\ t)^{-2}+\sigma_m^2/\sigma_b^2 \tag{4.5}$$

для хрупких материалов

$$\tau_a^*(k,t)^{-2}=\tau_{-1}(k,t)^{-2}+(\eta_2-1)\sigma_m^2/\sigma_b^2+(2-\eta_2)\sigma_m/(\sigma_b\tau_a^*(k,t))$$

Соотношение (4.3) совпадает с формулой Зеннера [10], а (4.5) — с формулой Гафа [9].

Предельное нагружение такого вида

$$\sigma_{11}^*(t,x)=\sigma^*(t)\left(\sigma_{1,m}+\sin 2\pi kx/t+\sum\sigma_{1,a}^{(i)}\sin 2\pi k(4i-1)x/t\right)$$

$$\sigma_{22}^*(t,x)=\sigma^*(t)\left(\sigma_{2,m}+\sigma_{2,a}\sin 2\pi kx/t+\sum\sigma_{2,a}^{(i)}\sin 2\pi k(4i-1)x/t\right) \tag{4.6}$$

при введении обозначений

$$\sigma_m=\max\{\sigma_{1,m},\sigma_{2,m}\},\quad \sigma_a=\max\{1,\sigma_{2,a}\},\quad \sigma_a^{(i)}=\max\{\sigma_{1,2}^{(i)},\sigma_{2,a}^{(i)}\},$$

$$\alpha_2=\left(\sigma_{2,m}+\sigma_{2,a}+\sum\sigma_{2,a}^{(i)}\right)\Big/\left(1+\sigma_{1,m}+\sum\sigma_{1,a}^{(i)}\right)$$

и в предположении $\eta_1=\eta_2=\mathrm{const}$ описывается следующим соотношением:

$$\sigma^*(t)F(\alpha_2)M(t)=1 \tag{4.7}$$

где функция $F=F(\alpha_2)$ определяется формулами:

для хрупких материалов

$$F(\alpha_2)=\begin{cases}1+a_0\alpha_2; & -1{,}0\leqslant\alpha_2<0\\ 1+a_1\alpha_2; & 0\leqslant\alpha_2\leqslant 0{,}5\\ a_2-a_3\alpha_2; & 0{,}5<\alpha_2\leqslant 1{,}0\\ a_3-a_2/\alpha_2; & 1{,}0<\alpha_2\leqslant 2{,}0\\ 1+a_1/\alpha_2; & 2{,}0<\alpha_2\end{cases} \tag{4.8}$$

$$a_1=\eta_2-5+3\eta_1,\qquad a_2=\eta_2-3+2\eta_1$$

$$a_3=\eta_2-3+\eta_1,\qquad a_0=1-\eta_2$$

для пластичных материалов

$$\frac{4F(\alpha_2)^2-\eta_2^2}{4-\eta_2^2}=\begin{cases}1+2\alpha_2(1-a_7)+\alpha_2^2(1+a_7); & -1{,}0\leqslant\alpha_2<0\\ (1-a_4\alpha_2)^2; & 0\leqslant\alpha_2\leqslant 0{,}5\\ (a_5\alpha_2-a_6)^2; & 0{,}5<\alpha_2\leqslant 1{,}0\\ (a_6-a_5/\alpha_2)^2; & 1{,}0<\alpha_2\leqslant 2{,}0\\ (1-a_4/\alpha_2)^2; & 2{,}0<\alpha_2\end{cases} \tag{4.9}$$

$$a_4=5-3q,\quad a_5=3-q,\quad a_6=3-2q,\quad a_7=\eta_2^2/(4-\eta_2^2)$$

функция $M=M(t)$ находится по таким зависимостям (суммирование по i от 1 до I):

для хрупких материалов

$$M(t)=\sigma_a/\sigma(k,t)+\sigma_m/\sigma_b+\sum\sigma_a^{(i)}\sigma((4i-1)k,t)^{-1} \tag{4.10}$$

для пластичных материалов

$$M(t)=\left(\sigma_a+\sigma_m+\sum\sigma_a^{(i)}\right)^2\left[\sigma_m\sigma_b+\sigma_a\sigma(k,t)+\sum\sigma_a^{(i)}\sigma((4i-1)k,t)\right]^{-1} \tag{4.11}$$

Параметры предельного нагружения $\sigma_{11}^*(t,x)=\sigma_a^*(k_1,t)\sin 2\pi k_1x/t$, $\sigma_{12}^*(t,x)=\sigma_a^*(k_1,t)s_a\sin 2\pi k_2x/t$, где $k_2=(4m-1)k_1$, $m=1,2,3\ldots$, с помощью (2.7)—(2.10) связаны следующими зависимостями:

для пластичных материалов

$$\sigma_a^*(k_1,t)^{-2}=\sigma_{-1}(k_1,t)^{-2}+s_a^2\tau_{-1}(k_2,t)^{-2} \tag{4.12}$$

для хрупких материалов

$$\sigma_a^*(k_1,t)^{-2}=(\eta_2-1)\sigma_{-1}(k_1,t)^{-2}+(2-\eta_2)/[\sigma_{-1}(k_1,t)\sigma_a^*(k_1,t)]+$$
$$+s_a^2\tau_{-1}(k_2,t)^{-2},\qquad \eta_2=\sigma_{-1}(k_1,t)/\tau_{-1}(k_1,t) \tag{4.13}$$

Зависимости (4.12) и (4.13) удовлетворительно описывают соответствующие экспериментальные данные.

5. Компоненты $y_{i,1}$ в соотношениях (1.8) и (1.9) определяются формулой (1.2), в которую входят только нормальные компоненты нагружения, а компоненты $y_{i,2}$ — формулой (1.3), зависящей только от касательных компонент нагружения. Такое разделение необходимо для того, чтобы знаки нормальных и касательных напряжений не оказывали вза-

имного влияния. В противном случае появляются нехарактерные особенности предельных процессов некоторых нагружений. Например, согласно альтернативной теории, в которой соотношения J_i $(i=1, 2, 3)$, аналогичные (1.8), (1.9), содержат компоненты $y_{i,2}+y_{i,1}$, предельное симметричное нагружение тонкостенного цилиндра осевой силой и крутящим моментом при наличии сдвига по фазе между компонентами, равного π, на 10–15% выше синхронного нагружения при заданной долговечности. Развиваемая теория предсказывает равные предельные симметричные нагружения для сдвигов фаз $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$.

Аналогичная ситуация встречается, когда необходимо получить зависимость, связывающую компоненты главных напряжений с компонентами тензора напряжений при плоском напряженном состоянии.

Можно показать, что для переменных нагружений общепринятые соотношения:

$$2\sigma_i=\sigma_{11}+\sigma_{22}+(-1)^{1+i}[(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+4\sigma_{12}^2]^{1/2} \quad (i=1, 2) \tag{5.1}$$

приводят к противоречию.

Правильные соотношения для σ_i $(i=1, 2)$, полученные из условия равенства общего и нормального усилий на главных плоскостях, имеют вид

$$2\sigma_i(x)=\sigma_{11}(x)+\sigma_{22}(x)+(-1)^{1+i}[(\sigma_{11}(x)-\sigma_{22}(x))^2\operatorname{sign}(\sigma_{11}(x)-\sigma_{22}(x))+ +4\sigma_{12}^2(x)\operatorname{sign}\sigma_{12}(x)]/[(\sigma_{11}(x)-\sigma_{22}(x))^2+4\sigma_{12}^2(x)]^{1/2} \tag{5.2}$$

В общем случае $\operatorname{sign}(\sigma_{11}(x)-\sigma_{22}(x))\neq\operatorname{sign}\sigma_{12}(x)$, и соотношение (5.2) не тождественно соотношению (5.1).

Для простых процессов нагружения, в которых

$$\sigma_{ij}(x)=s_{ij}f(x)+\sigma_0 f_1(x)\delta_{ij} \quad (i, j=1, 2), \tag{5.3}$$

соотношение (5.3) преобразуется к следующему виду:

$$2\sigma_i(x)=\{s_{11}+s_{22}+(-1)^{1+i}[(s_{11}-s_{22})^2+4s_{12}^2]^{1/2}\}f(x)+2\sigma_0 f_1(x) \tag{5.4}$$

При условии $f_1(x)=f(x)$ зависимость (5.4) приобретает вид, использованный в [2]: $2\sigma_i(x)=\{\sigma_{11}+\sigma_{22}+(-1)^{1+i}[(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+4\sigma_{12}^2]^{1/2}\}f(x)$, $\sigma_{ij}= =s_{ij}+\sigma_0\delta_{ij}$ $(i, j=1, 2)$.

Для простых процессов деформирования

$$\varepsilon_{ij}(x)=e_{ij}f(x)+\varepsilon_0 f_1(x)\delta_{ij} \quad (i, j=1, 2) \tag{5.5}$$

компоненты главных деформаций равны

$$2\varepsilon_i(x)=\{e_{11}+e_{22}+(-1)^{1+i}[(e_{11}-e_{22})^2+e_{12}^2]^{1/2}\}f(x)+2\varepsilon_0 f_1(x) \quad (i=1, 2) \tag{5.6}$$

При условии $f_1(x)=f(x)$ эти соотношения переписываются так [2]: $2\varepsilon_i(x)=\{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+(-1)^{1+i}[(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})^2+\varepsilon_{12}^2]^{1/2}\}f(x)$, $\varepsilon_{ij}=e_{ij}+\varepsilon_0\delta_{ij}$ $(i, j=1, 2)$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Завойчинский Б. И.* Об одном вариационном принципе описания предельных процессов наружения. Ч. I.– Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 4, с. 159–165.
2. *Завойчинский Б. И.* Об одном вариационном принципе описания предельных процессов нагружения. Ч. II.– Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 5, с. 100–108.
3. *Ильюшин А. А.* Об одной теории длительной прочности.– Инж. журн. МТТ, 1967, № 3, с. 21–35.
4. *Завойчинский Б. И.* О предельных усталостных процессах в элементах конструкций при звуковом нагружении.– В кн.: Прочность материалов и элементов конструкций при звуковой и ультразвуковой частотах нагружения: Тез. докл. Междунар. симпоз. Киев: Наук. думка, 1984, с. 60.
5. *Завойчинский Б. И.* К обоснованию теории предельных процессов нагружения магистральных трубопроводов – случай асимметричных и программных нагружений.– В кн.: Исследование прочности магистральных трубопроводов. М.: Изд-е ВНИИ по стр-ву магистральных трубопроводов, 1984, с. 17–80.
6. *Завойчинский Б. И.* Об одном обобщении критериев прочности элементов конструкций при простом нагружении ограниченной вариации.– В кн.: Исследование надежности магистральных трубопроводов. М.: Изд-е ВНИИ по стр-ву магистральных трубопроводов, 1985, с. 71–89.

7. *El-Magd E. A., Mielke S.* Fatigue strength of metals under multiaxial stress state. Current advances in mechanical design and production.— Proc. 1-st Int. Conf. Cairo. Ed. G. S. A. Shawki, 1979, p. 329—340.
8. *Garud Y. S.* Multiaxial fatigue: A survey of the state of the art.— J. of Testing and Evaluation. JFEVA, 1981, v. 9, No. 3, p. 165—178.
9. *Gough H. J.* Engineering steels under combined cyclic and static stresses.—'J. Appl. Mech., 1950, v. 17, No. 2, p. 113—125.
10. *Zenner H., Heidenreigh R., Richter J.* Bewertung von festigkeitshypothesen fur kombinierte statische und schwingende sowie synchrone schwingende Beansprughung.— Z. Werkstofftech, v. 14, 1983, No. 12, p. 391—406.
11. *Kakuno H., Kawada J.* A new criterion of fatigue strength of a round bar subjected to combined static and repeated bending and torsion.— Res. Bull. of Meisei univ. 1983, No. 19, p. 67—73.

Москва

Поступила в редакцию
23.XII.1985