МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1987

УДК 518.6:513.7

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НА ОСНОВЕ RT-АЛГОРИТМА КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

РАБИНОВИЧ Б. И., ТЮРИН Ю. В.

Рассматривается численный метод решения плоских задач теории упругости на основе нового алгоритма конформного отображения произвольной односвязной области на круг и произвольной двусвязной области с кусочно-гладким контуром на круговое кольцо в классической постановке [1]. Соответствующие внешние задачи приводятся к указанным с помощью преобразования инверсии и дробно-линейного преобразования.

Численные методы конформного отображения, основы которых заложены в [2] (см., например, [3–6]), трудны для реализации на ЭВМ, поскольку соответствующие алгоритмы, сводящие задачу к линейной алгебраической, в случае областей сложной конфигурации требуют задания большого числа точек на контуре.

В работе применен разработанный авторами с использованием вариационного принципа М. А. Лаврентьева [7, 8] (см. также [9]) многошаговый алгоритм конформного отображения (RT-алгоритм), обобщающий [10, 11]. Алгоритм включает две рекуррентные процедуры: внутреннюю (R-процедура) и внешнюю (T-процедура). На каждом шаге используется принцип М. А. Лаврентьева, которому придана форма, удобная для численной реализации на ЭВМ. RT-алгоритм реализован в виде программы на языке Фортран-4, проверен на широком спектре задач и применен, в частности, для решения задачи Сен-Венана о кручении бруса с поперечным сечением сложной конфигурации (эпитрохоидальным и крестообразным).

Полученные решения сравниваются в первом случае с аналитическим (точная отображающая функция [12]), во втором – с решениями, полученными методом тригонометрических рядов [13] и методом конечных элементов (МКЭ) [14].

1. Алгоритм точного конформного отображения области, близкой к кругу, на круг и обратного отображения (R-процедура). Пусть в плоскости комплексного переменного z задана замкнутая линия C, близкая к единичной окружности Γ. Ей соответствует близкая к кругу односвязная область $D_1(C)$ и внешняя область $D_2(C)$. Близость C к Γ определяется неравенствами

$$|\delta(\varphi)|<\varepsilon,\quad |\delta'(\varphi)|<\varepsilon,\quad |\delta''(\varphi)|<\varepsilon \qquad (1.1)$$
$$r=r(\varphi)=1-\delta(\varphi),\quad r(\varphi)|_\Gamma=1\quad (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$$

где $r(\varphi)$ – радиус-вектор точки контура C, φ – полярный угол, ε – малое положительное число; вариация $\delta(\varphi)$ считается положительной при варьировании контура Γ в направлении внутренней нормали. Пусть $w=f(z, C)$ – функция, отображающая область $D_1(C)$ плоскости z на единичный круг плоскости w, причем

$$w=f(z, C)|_{z=0}=0,\quad f'(z, C)|_{z=0}>0 \qquad (1.2)$$

Используя интеграл Шварца и теорему о среднем [8], можно привести вариационный принцип М. А. Лаврентьева [7, 8] к следующей форме: при условиях (1.1) и (1.2) функция

$$w=f(z,C)=z[1+J(z)],\qquad J(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma u(\zeta)\,\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,\frac{d\zeta}{\zeta} \qquad (1.3)$$

где $\zeta=e^{i\varphi}$, $u(\zeta)=\delta[\varphi(\zeta)]$ и контур обходится так, что область определения z остается слева, отличается от функции, реализующей конформное отображение области $D_1(C)$ на единичный круг и $D_2(C)$ на его внешность, на малые не ниже второго порядка относительно ε. Введем в рассмотрение функцию $\omega(\zeta)$:

$$\omega(\zeta)=u(\zeta)+iv(\zeta)=\varepsilon\left(a_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\zeta^n\right) \tag{1.4}$$

$$c_n=a_n-ib_n, \quad \zeta=e^{i\varphi}, \quad v(0)=v(\infty)=0$$

где εa_0, εa_n, εb_n $(n=1, 2,\ldots)$ — коэффициенты разложения функции $\delta(\varphi)$, которая предполагается однозначной, непрерывной и 2π-периодической, в ряд Фурье на отрезке $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ и сопряженную ей $\omega(\zeta)$.

Используя формулу Коши, представим функцию $J(z)$ (1.3) в другой форме:

$$J(z)=\varepsilon\left(a_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n\right), \quad J(z)=\varepsilon\left(a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\bar{c}_nz^{-n}\right) \tag{1.5}$$

(которая здесь и в дальнейшем соответствует отображению внутренней области на единичный круг или внешней на его внешность).

Используя формулы (1.5), преобразуем функцию w:

$$w=f(z,C)=z\left[1+\varepsilon\left(a_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n\right)\right]$$

$$w=f(z,C)=z\left[1+\varepsilon\left(a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\bar{c}_nz^{-n}\right)\right] \tag{1.6}$$

Эти выражения удобны для численной реализации, так как сводят всю проблему к разложению непрерывной 2π-периодической функции в ряд Фурье.

Функция (1.6) отличается от точной функции, переводящей контур C плоскости z в единичную окружность плоскости w, на малые порядка не ниже ε^2.

Функция $\Phi(w)$, являющаяся в первом приближении обратной для (1.6), определяется в соответствии с принципом М. А. Лаврентьева следующими формулами:

$$z=\Phi(w)=w\left[1-\varepsilon\left(a_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_nw^n\right)\right]$$

$$z=\Phi(w)=w\left[1-\varepsilon\left(a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\bar{c}_nw^{-n}\right)\right] \tag{1.7}$$

Эта функция также отличается от точной функции, обратной $f(z, C)$, на члены порядка не ниже ε^2.

Можно построить на базе принципа М. А. Лаврентьева алгоритм отображения области, близкой к кругу, на круг и обратного отображения с любой наперед заданной точностью.

Подставим в правую часть первого равенства (1.7) в качестве w значения, соответствующие точкам единичной окружности Г. Обратное отображение (1.7) переводит Г в контур $C^{(1)}$, отличающийся от исходного контура C на малые порядка ε^2 или выше.

Отображение Г на $C^{(1)}$ является точным. Задача теперь заключается в том, чтобы построить точное отображение $C^{(1)}$ на Г. Воспользуемся первым выражением (1.6), которое представим в виде

$$z_1=f_1(z,C^{(1)})=z\left[1+\varepsilon\left(a_0^{(1)}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n^{(1)}z^{(n)}\right)\right] \tag{1.8}$$

где εa_0 и εc_n — коэффициенты Фурье функции $\delta^{(1)}(\varphi)$, соответствующей контуру $C^{(1)}$. Функция (1.8) реализует отображение контура $C^{(1)}$ на $C^{(2)}$, отличающийся от Γ на малые порядка не ниже ε^2. Повторив ту же операцию m раз, получим на m-м шаге

$$z_m=f_m(z_{m-1}, C^{(m)})=z_{m-1}\left[1+\varepsilon\left(a_0^{(m)}+\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(m)} z_{m-1}^n\right)\right] \tag{1.9}$$

где коэффициенты $\varepsilon a_0^{(m)}$ и $\varepsilon c_n^{(m)}$ относятся к функции $\delta^{(m)}(\varphi)$, соответствующей контуру $C^{(m)}$. Примем за расстояние от контура $C^{(m)}$ до единичной окружности Γ среднее квадратичное отклонение Δ_{Rm}, где в силу равенства Парсеваля

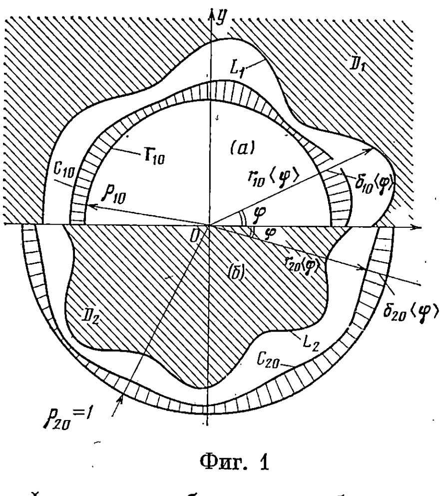
$$\Delta_{Rm}^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\delta^{(m)}(\varphi)]^2\,d\varphi=\varepsilon^2\left(a_0^{(m)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}|c_n^{(m)}|^2\right) \tag{1.10}$$

Можно показать, что последовательность отображающих функций (1.9) сходится по норме Δ_{Rm}, т. е. при любом наперед заданном малом положительном числе ε_R при некотором значении $m=M$ будет выполнено неравенство $\Delta_{Rm}\leqslant\varepsilon_R$.

Аналогичным образом строится и последовательность функций

$$z_m=f_m(z_{m-1}, C^{(m)})=z_{m-1}\left[1+\varepsilon\left(a_0^{(m)}+\sum_{n=1}^{\infty}\bar{c}_n^{(m)} z_{m-1}^{-n}\right)\right] \tag{1.11}$$

соответствующая отображению внешней области (второе выражение (1.6)). Совокупность функций f_m (1.9) или (1.11) ($m=1, 2, \ldots$) дает точное в указанном смысле прямое отображение $w=F(z, C^{(1)})$ замкнутых областей, внутренних или внешних по отношению к $C^{(1)}$, а функции $z=\Phi(w)$ (1.7) — точные обратные отображения. Соответствующую рекуррентную процедуру, описанную выше, будем в дальнейшем называть R-процедурой.



Фиг. 1

2. Рекуррентный алгоритм конформного отображения произвольной односвязной области на круг и произвольной двусвязной области на круговое кольцо (T-процедура). Рассмотрим сначала произвольную односвязную область D_2 плоскости z, ограниченную кусочно-гладким контуром L_2. Требуется осуществить конформное отображение области D_2 на единичный круг D_w плоскости w с контуром Γ_w так, чтобы заданная точка O области D_2 перешла в центр этого круга, и соответствующее обратное отображение.

Аналогичным образом формулируется внешняя задача (отображения области D_1 плоскости w, внешней по отношению к контуру L_1, на внешность единичного круга плоскости w и обратное отображение). Предположим, что контуры L_j являются звездными по отношению к точке O (это допущение не является принципиальным и связано только с простейшим вариантом построения вариаций мажорирующих контуров, описываемым дальше).

Рассмотрим процедуру отображения на примере области D_1. Введем вспомогательный контур в виде окружности Γ_{10} радиуса ρ_{10} с центром в начале координат O, вложенный в контур L_1 (при этом не исключается наличие у окружности Γ_{10} общих точек с L_1). Пронормируем переменную z так, чтобы получить $\rho_{10}=1$ (фиг. 1, a), и обозначим $\delta_{10}(\varphi)$ вариацию радиуса-вектора точек контура Γ_1, которую будем считать положительной, если она направлена в сторону внешней нормали, и определим соотношением

$$\delta_{10}(\varphi)=\varepsilon_{10}[r_{10}(\varphi)-1],\quad \varepsilon_{10}=\varepsilon_0\gamma_{10}/(\gamma_{10}+\varepsilon_0)$$
$$\gamma_{10}=[r_{10}(\varphi)]_{\max}-1\quad (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi) \tag{2.1}$$

где $r_{10}(\varphi)\geqslant 1$ — радиус-вектор произвольной точки контура с началом в точке O, ε_0 — произвольно выбираемый малый параметр. Ограничения, наложенные на контур L_1, обеспечивают однозначность и непрерывность функции $\delta_{10}(\varphi)$, которой соответствует контур L_1, близкий к окружности Γ_{10} (фиг. 1, *а*). Чтобы удовлетворить условиям (1.1), функцию $\delta_{10}(\varphi)$ можно подвергнуть дополнительному сглаживанию. Пусть эта операция проведена и для всех рассматриваемых вариаций условия (1.1) выполнены. Воспользуемся R-процедурой п. 1:

$$z=\Phi_{10}(z_1),\qquad z_1=F_{10}(z,C_{10}^{(1)}) \tag{2.2}$$

основанной на выражении (1.11), в котором надо изменить знак перед ε на противоположный в соответствии с (2.1). В результате получим точное конформное отображение контура $C_{10}^{(1)}$, близкого к C_{10}, на единичную окружность плоскости w и точное обратное отображение (нижний индекс соответствует номеру контура). Контур L_1 перейдет в силу (2.2) в новый контур L_{11} с уравнением

$$z_1=F_{10}(z_{10}{}^{\circ},C_{10}^{(1)}) \tag{2.3}$$

Вложим в L_{11} новый вспомогательный контур Γ_{11} с центром в точке O_1, являющейся образом O (фиг. 1, *б*), имеющий, быть может, общие точки с L_1, и пронормируем переменную z_1 так, чтобы получить единичный радиус у окружности Γ_{11}. Сформируем вариацию $\delta_{11}(\varphi)$ радиуса-вектора точек Γ_{11}, удовлетворяющую условиям (1.1), аналогичную (2.1). Ей будет соответствовать контур C_{11}, близкий к Γ_{11}. Повторное применение R-процедуры (2.2) позволяет построить точное отображение области, внешней по отношению к контуру $C_{11}^{(1)}$, близкого к C_{11}, на внешность единичного круга плоскости z_2 и соответствующее обратное отображение

$$z_2=f_{11}(z_1,C_{11}),\qquad z_1=\Phi_{11}(z_2),\qquad z_2=F_{11}(z,C_{11}^{(1)}) \tag{2.4}$$

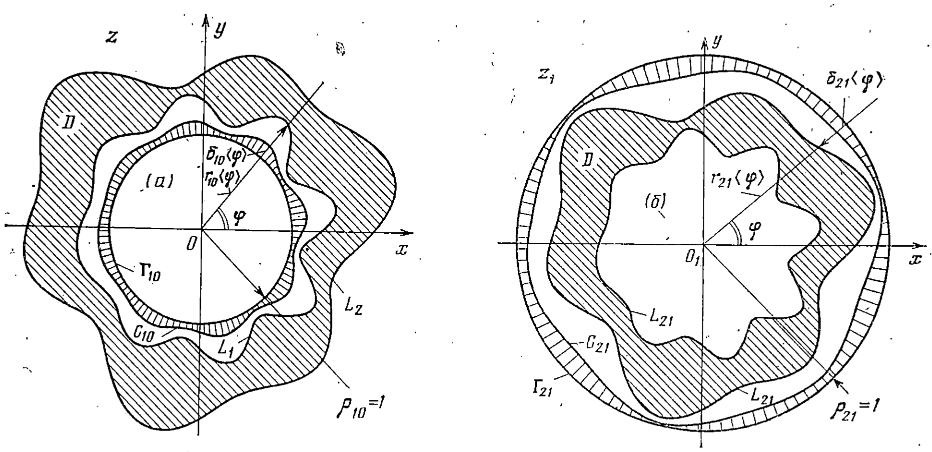
Совокупность перечисленных операций образует первые два шага рекуррентного процесса

$$z_k=f_{1,k-1}(z_{k-1},\ C_{1,k-1}),\qquad z_{k-1}=\Phi_{1,k-1}(z_k) \tag{2.5}$$

$z_k=F_{1,k-1}(z_{k-1},\ C_{1,k-1}^{(1)})$ ($k=1,\ 2,\dots;\ z_0\equiv z,\ z_k=w$ при $k=K_1$) который приводит к последовательности функций, мажорирующих контур L_1, сходящейся по норме Δ_{Tk}, т. е. при любом наперед заданном малом положительном числе ε_T при некотором значении $k=K_1$ будет выполнено неравенство $\Delta_{Tk}\leqslant\varepsilon_T$. Здесь Δ_{Tk} — среднее квадратичное расстояние от преобразованного контура до единичной окружности.

Описанную новую рекуррентную процедуру будем называть T-процедурой.

Аналогично строится T-процедура при отображении области D_2, внутренней по отношению к границе L_2 на единичной круг (фиг. 1, *б*). Можно показать, что соответствующая мажорирующая последовательность обладает тем же свойством сходимости по норме, что и порождаемая процессом (2.5), т. е. при некотором k выполняется неравенство $\Delta_{Tk}\leqslant\varepsilon_T$. Таким образом, функции $w(z)$ и $z(w)$, порождаемые T-процедурой, осуществляющие прямое и обратное отображения в обеих задачах — внутренней и внешней, получаются в виде рекуррентных последовательностей рядов Тейлора и Лорана с известными коэффициентами.



Фиг. 2

Рассмотрим двусвязную область $D(C_1, C_2)$, ограниченную замкнутыми линиями, близкими к концентрическим окружностям Γ_1 и Γ_2 в том смысле, что удовлетворяются условия

$$
\begin{gathered}
|\delta_j(\varphi)|<\varepsilon h, \quad |\delta_j'(\varphi)|<\varepsilon h, \quad |\delta_j''(\varphi)|<\varepsilon h \\
\delta_1(\varphi)=r_1(\varphi)=\rho_{10}, \quad \delta_2(\varphi)=1-r_2(\varphi) \quad (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi) \\
r_1(\varphi)|_{\Gamma_1}=\rho_{10}<1, \quad r_2(\varphi)|_{\Gamma_2}=\rho_{20}=1, \quad h=1-\rho_{10}
\end{gathered}
\tag{2.6}
$$

где φ — полярный угол, r_j — радиусы-векторы точек линий C_1, C_2, проведенные из общего центра окружностей Γ_1, Γ_2, ε — произвольное малое положительное число.

Пусть $w=f(z, C_1, C_2)$ — функция, отображающая область D плоскости z на круговое кольцо плоскости w с единичным внешним радиусом, причем $f(z, C_1, C_2)|_{z=0}=0$, $f'(z, C_1, C_2)|_{z=0}>0$. Вариацию $\delta_1(\varphi)$ будем, в отличие от (1.1), считать положительной при варьировании Γ_1 в направлении внешней нормали, $\delta_2(\varphi)$ — при варьировании Γ_2 в направлении внутренней нормали.

Используя вариационный принцип М. А. Лаврентьева, представим отображающую функцию w (1.8) в форме, аналогичной (1.6):

$$
w=f(z, C_1, C_2)=z\left[1-\varepsilon\left(a_{10}+\sum_{n=1}^{\infty}\bar{c}_{1n}z_1^{-n}\right)+\varepsilon\left(a_{20}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{2n}z_2^{\,n}\right)\right]
\tag{2.7}
$$

где $\varepsilon c_{jn}=\varepsilon a_{jn}-i\varepsilon b_{jn}$, εa_{j0}, εa_{jn}, εb_{jn} — коэффициенты разложения функций $\delta_j(\varphi)$ в ряды Фурье на отрезке $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $z_j=z/\rho_{j0}$.

Пусть в плоскости z задана область в форме кольца D, ограниченного двумя замкнутыми непересекающимися кусочно-гладкими линиями L_1 и L_2. Осуществим конформное отображение области D на круговое кольцо плоскости w так, чтобы линия L_2 перешла в единичную окружность Γ_{w2}, линия L_1 — в окружность Γ_{w1} меньшего радиуса, а заданная точка O плоскости z — в центр этих окружностей, и обратное отображение. Соответствующие отображения определяются, как и раньше, с точностью до произвольного угла поворота области D относительно точки O. Эта задача сводится к задаче предыдущего раздела, если воспользоваться функцией (1.6) и R- и T-процедурами.

Вложим во внутренний контур L_1 окружность Γ_{10} радиуса ρ_{10} и пронормируем переменную z так, чтобы получить $\rho_{10}=1$ (фиг. 2, *а*). Положим в (1.3), (1.6) $\delta_2(\varphi)\equiv 0$, $a_{20}=0$, $c_{2n}\equiv 0$ и сделаем первый шаг внешнего рекуррентного процесса, точно так же, как в случае односвязной области, по схеме (2.2), начиная с построения $\delta_{10}(\varphi)$ (фиг. 2, *а*). Для реализации второго шага вложим линию L_{21} в окружность Γ_{21} радиуса ρ_{21} с центром в точке O_1 (образ O в плоскости z_1) и пронормируем переменную z_1 так, чтобы получить $\rho_{21}=1$ (фиг. 2, *б*). Положим в (1.3) $\delta_1(\varphi)\equiv 0$ и, соответственно, в (1.6) $a_{10}=0$, $c_{1n}\equiv 0$ и осуществим процедуру, аналогичную (2.5), начиная с построения вариации $\delta_{21}(\varphi)$ (фиг. 2, *б*). Дальнейшие шаги строятся по той же схеме. Таким образом реализуются две последовательности функций, мажорирующих с двух сторон кольцо D, одна из которых представлена рядами Тейлора, а другая — рядами Лорана.

Описанный рекуррентный алгоритм был реализован в виде программы на языке Фортран-4 для случаев односвязных и двусвязных областей. При этом удалось, усложнив формулы для построения вариации контура вписанной и описанной окружностей, снять требование звездности областей.

Для разложения в ряд Фурье была применена программа быстрого преобразования Фурье с использованием до 512 точек контура и максимальным числом членов ряда 129 ($n_{\max}=64$). Параметры ε_R, ε_T, ε_0 принимались при расчетах следующими: $\varepsilon_R=\varepsilon_T=2\cdot 10^{-5}$; $\varepsilon_0=0{,}2$.

3. Задача Сен-Венана. Рассмотрим задачу Сен-Венана о кручении бруса, к торцам которого приложены системы усилий, статически эквивалентные парам сил с осями, совпадающими с продольной осью бруса, и моментами $\pm M$, а боковая поверхность свободна от внешних нагрузок.

Напряженное состояние полностью определяется, если известна комплексная функция кручения [12]:

$$F(z)=\varphi(z)+i\psi(z) \tag{3.1}$$

голоморфная в области S, соответствующей поперечному сечению бруса, и удовлетворяющая в случае односвязной области граничному условию

$$\psi|_L=(x^2+y^2)/2+C_0 \tag{3.2}$$

где L — контур области S, C_0 — произвольная постоянная.

Пусть функция

$$z=x+iy=\Phi(w)=\Phi(u+iv) \tag{3.3}$$

осуществляет конформное отображение области S плоскости z на круг S' плоскости w с контуром Γ единичного радиуса. Тогда легко построить функцию $F[z(w)]=f(w)$, являющуюся решением краевой задачи (3.1), (3.2) [12]. Жесткость бруса при кручении D определяется по следующей формуле [12]:

$$D=\mu\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dx\,dy+\mu\iint\limits_S\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx\,dy=\mu(I+D) \tag{3.4}$$

где μ — постоянная Ламе, I — полярный момент инерции сечения S, $|\Phi'(w)|^2$ — якобиан преобразования (3.3):

$$I=\iint\limits_{S'}\Phi(w)\overline{\Phi(w)}\,|\Phi'(w)|^2\,du\,dv$$

$$D_0=-\frac{1}{4}\oint\limits_\Gamma[f(w)+\overline{f(w)}]\,d[\Phi(w)\overline{\Phi(w)}] \tag{3.5}$$

Обозначим $T=T_x+iT_y$ комплексное число, вещественная и мнимая части которого являются проекциями на оси Ox и Oy вектора касательных напряжений T. Сопряженное с T число $\bar{T}$ выражается следующим образом через комплексную функцию кручения $f(w)$ [12] ($\tau=M/D$ — «степень кручения»):

$$\bar{T}=T_x-iT_y=\mu\tau[f'(w)/\Phi'(w)-i\overline{\Phi(w)}] \tag{3.6}$$

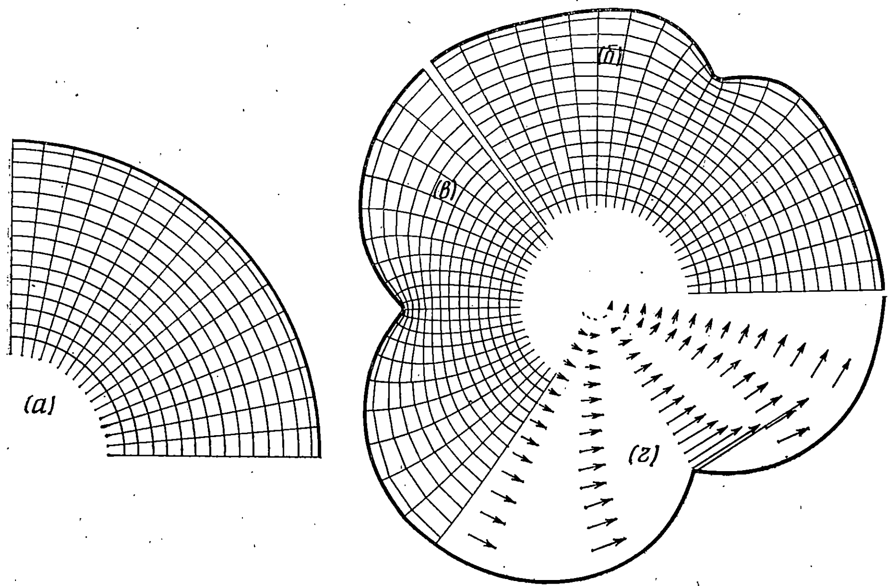
Рассмотрим брус эпитрохоидального сечения, для которого известно точное выражение отображающей функции $\Phi(w)$ [12]. Примем за характерный размер l радиус окружности, описанной вокруг эпитрохоиды. Введем безразмерные величины

$$\Phi^*=\Phi/l,\quad T^*=T/\mu l\tau,\quad I^*=I/l^4$$
$$D_0^*=D_0/l^4,\quad D^*=D/\mu l^4 \tag{3.7}$$

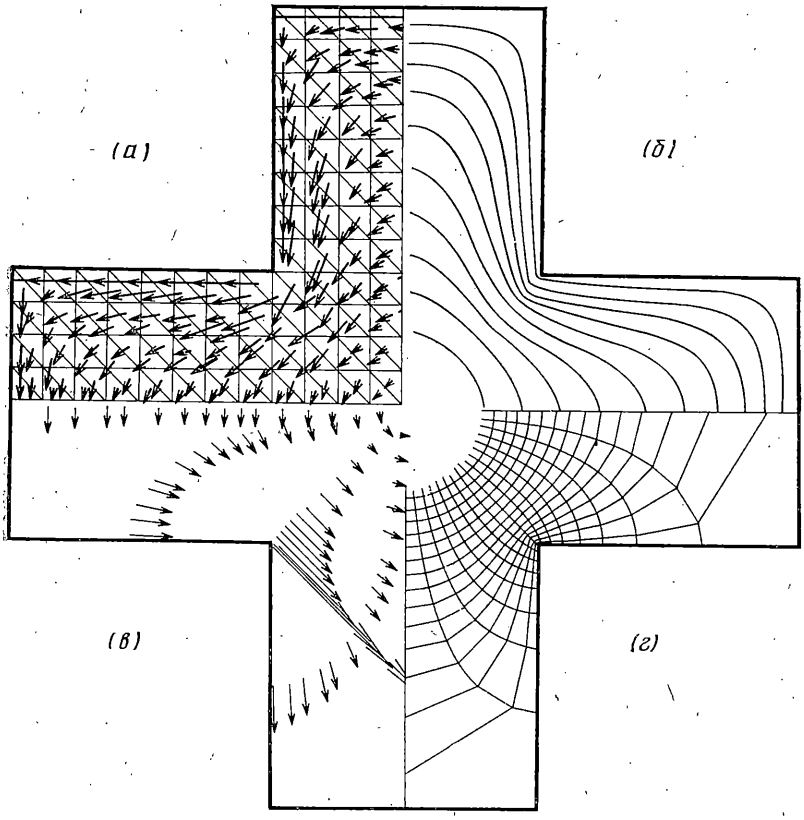
Точные выражения $\Phi^*(w)$, I^*, D_0^*, D^* имеют вид

$$\Phi^*(w)=(b/l)(w^n+aw),\qquad I^*=(\pi/2)(b/l)^4[a^4+2(n+1)a^2+n]$$
$$D^*=(\pi/2)(b/l)^4(a^4+4a^2+n) \tag{3.8}$$

Положим $n=4$, $a=5$, $b/l={}^1/_6$. На фиг. 3, *а*—*в* представлены части сетки полярных координат (*а*) и конформно-эквивалентных ей сеток (*б*, *в*), полученных на разных этапах конформного отображения с помощью RT-алгоритма (максимальное число шагов R-процедуры $M=5$; число шагов T-процедуры $K=15$). Картина, полученная с помощью функции (3.7), практически совпадает с фиг. 3, *в*. На фиг. 3, *г* показано соответствующее поле безразмерных напряжений (при $l=1$ принятая для комплекс-



Фиг. 3



Фиг. 4

ных чисел T^* масштабная единица составляет 0,157). Приведем сравнение безразмерных величин I^*, D_0^*, D^*, $|T^*|_{\max}$, полученных по формулам (3.4)—(3.7) с использованием RT-алгоритма (первая колонка) и с использованием точной отображающей функции (3.8) (вторая колонка):

I^*	1,0651	1,0654
D_0^*	—0,1813	—0,1818
D^*	0,8837	0,8836
$\|T^*\|_{\max}$	3,1546	3,1666

Максимальная (по всей области S) относительная погрешность безразмерного напряжения составляет $[|\Delta T^*|/|T^*|]_{\max}=1{,}58\cdot 10^{-2}$.

В качестве второго примера рассмотрим брус с сечением в форме равнобокого креста, для которого в [4] приведены некоторые характеристики, полученные с помощью тригонометрических рядов.

В данном случае за характерный размер l примем ширину стороны креста. Фиг. 4, *а*, *б* иллюстрирует решение задачи методом конечных элементов (МКЭ) [14], а именно разбиение исходной области на треугольные элементы и поле напряжений (*а*) и линии равного уровня функции $\operatorname{Im} F(z)=\psi(z)$ с равномерным шагом по $\psi(z)$. На фиг. 4, *в*, *г* представлены результаты, полученные с помощью RT-алгоритма (максимальное число шагов R-процедуры $M=5$; число шагов T-процедуры $K=40$; при $l=1$ масштабная единица T^* равна 0,2). На фиг. 4, *в* показано поле напряжений, соответствующее сетке, представленной на фиг. 4, *г*, и конформно-эквивалентной сетке полярных координат. Приведем сравнение безразмерных характеристик I^*, D_0^*, D^*, $|T_0^*|$, полученных с помощью RT-алгоритма (первая колонка), методы тригонометрических рядов [13] (третья колонка) и МКЭ (вторая колонка)

I^*	4,7180	4,8333	4,8333
D_0^*	−2,8450	−2,9944	−2,9897
D^*	1,8730	1,8389	1,8436
$\|T_0^*\|_{max}$	0,6589		0,7821

Заметим, что при построении отображения с применением RT-алгоритма использовалось 400 точек на контуре, а при решении краевой задачи – 128 точек. При реализации МКЭ потребовалось для получения сопоставимой точности взять 369 узлов и соответственно 640 треугольных элементов. Приведенные примеры дают представление о конкурентоспособности численного метода решения плоских задач теории упругости, сводящихся к задаче Дирихле, для областей достаточно сложной конфигурации на основе RT-алгоритма конформного отображения.

Авторы выражают благодарность А. А. Лившицу и Е. Г. Соколину, получившим соответствующие решения на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Келдыш М. В., Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений.– Докл. АН СССР, 1935, т. 1, № 2–3, с. 85–88.
2. *Голузин Г., Канторович Л., Крылов В., Мелентьев А., Муратов М., Стенин Н.* Конформное отображение односвязных и многосвязных областей. Л., М.: ОНТИ НКТП СССР, Главн. ред. общетехн. лит., 1937. 127 с.
3. *Seidel W.* Bibliography of numerical methods of conformal mapping.– Nat. Bureau of Stand., Appl. Math. Ser. No. 18, 1952, p. 269–280.
4. *Betz A.* Konforme Abbildung. B. et al.: Springer, 1964. 407 p.
5. *Koppenfels W., Stallmann F.* Praxis der Konformen Abbildung. B.: Springer, 1959. 375 p.
6. *Фильчаков П. Ф.* Численные и графические методы прикладной математики. Киев: Наук. думка, 1970. 791 с.
7. *Лаврентьев М. А.* Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики. М., Л.: Гостехиздат, 1946. 159 с.
8. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., Л.: Гостехиздат, 1951. 607 с.
9. *Александров И. А.* Вариационные формулы для однолистных функций в двусвязных областях.– Сиб. мат. ж., 1963, т. 4, № 5, с. 961–976.
10. *Рабинович Б. И., Тюрин Ю. В.* Об одном рекуррентном численном методе конформного отображения.– Докл. АН СССР, 1983, т. 272, № 3, с. 532–535.
11. *Рабинович Б. И., Тюрин Ю. В.* Рекуррентный численный метод конформного отображения двусвязных областей на круговое кольцо.– Докл. АН СССР, 1983, т. 272, № 4, с. 795–798.
12. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1954. 648 с.
13. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 686 с.
14. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.

Москва

Поступила в редакцию
5.VIII.1985