

УДК 539.3

ИМПУЛЬСНОЕ НАГРЕВАНИЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА
С УЧЕТОМ ТЕРМОУПРУГОГО СОПРЯЖЕНИЯ
И КОНЕЧНОЙ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА

БЫКОВЦЕВ Г. И., ШАТАЛОВ А. Г.

При воздействии мощных тепловых потоков на поверхность твердых тел возникают тонкие слои нагретого материала, напряжения в которых могут привести к разрушению в окрестности поверхности. Все явления, протекающие при этом, развиваются в короткие промежутки времени, поэтому существенными становятся влияния сил инерции и связанности уравнений термоупругости.

Ниже рассматривается задача о воздействии теплового потока на границу термоупругого полупространства. Квазистатическая связанная задача термоупругости решалась в [1]. Связанные динамические задачи термоупругости рассматривались в [2, 3].

1. Дифференциальные уравнения, описывающие распространение волн в связанной термоупругой среде, состоят из дифференциальных уравнений движения [2], обобщенного закона теплопроводности [4], закона сохранения энергии [2] и соотношений Дюамеля — Неймана [2]. После преобразований и исключения тензора деформаций систему уравнений можно привести к безразмерному виду

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= v_i, & \tau q_i + q_i &= -T_{,i}, & q_{i,i} + \delta v_{k,k} + T' &= 0 \\ \sigma_{ij} &= ((1-2\eta)v_{k,k} - T')\delta_{ij} + \eta(v_{i,j} + v_{j,i}) \end{aligned} \quad (1.1)$$

где σ_{ij} — тензор напряжений, v_i — вектор скоростей перемещений, q_i — вектор теплового потока, T — температура, $\tau = (\lambda + 2\mu)\tau_0 c_E / \rho \lambda_0$, λ, μ — параметры Ламе, τ_0 — время релаксации теплового потока, $c_E = \rho c_P - 3E\alpha_T T_0 / (1-2\nu)$ — удельная теплоемкость при постоянной деформации, ρ — плотность, c_P — удельная теплоемкость при постоянном давлении, E — модуль упругости, α_T — коэффициент линейного расширения, T_0 — начальная температура, ν — коэффициент Пуассона, λ_0 — коэффициент теплопроводности, $\delta = T_0 \gamma^2 / ((\lambda + 2\mu)c_E)$ — коэффициент термомеханической связи, $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_T$, $\eta = \mu / (\lambda + 2\mu)$, δ_{ij} — символ Кронекера.

Предполагается, что граница $x_3 = 0$ свободна от нагрузок и среда находится в начальный момент времени $t = 0$ в невозмущенном состоянии. Краевые условия имеют вид (v_i — единичный вектор нормали к поверхности, $d = \text{const}$):

$$q_i(x_1, x_2, 0, t)v_i = g_0(t) \exp(-d(x_1^2 + x_2^2)), \quad \sigma_{ij}(x_1, x_2, 0, t)v_j = 0 \quad (1.2)$$

В [5] показано, что в термоупругом материале распространяются два фронта безвихревых волн ($N=1, 2$) и один фронт эквиволуминальной волны. Безвихревые волны распространяются со скоростями $c_N = \sqrt{1/2 \{1 + \tau + \tau\delta \pm [(1 + \tau + \tau\delta)^2 - 4\tau]^{1/2}\}} / \tau$. Эквиволуминальная волна распространяется со скоростью $c_3 = \sqrt{\eta}$.

2. Решения для напряжений, температуры, скоростей перемещений и тепловых потоков за фронтом волновой поверхности представим в виде лу-

чевого ряда [6]:

$$f = (f^+ - [f])|_z - h(f_{,n}^{(1)+} - [f_{,n}^{(1)}])|_z + \frac{h^2}{2!}(f_{,nn}^{(2)+} - [f_{,nn}^{(2)}])|_z - \dots \quad (2.1)$$

$$f_{,n\dots n}^{(k)} = \frac{\partial^k f}{\partial x_i \partial x_j \dots \partial x_l} v_i v_j \dots v_l$$

где h — расстояние по нормали n за фронтом поверхности сильного разрыва, $[f] = (f^+ - f^-)|_z$. Индекс плюс относится к значению функции перед фронтом волны разрыва, индекс минус — к значению функции за фронтом волны.

Для данной краевой задачи поверхности разрыва представляют собой плоскости, параллельные границе $x_3 = 0$. Выберем координаты y_α на поверхности разрыва так, чтобы уравнения плоскости разрыва имели вид $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 = ct$, где c — скорость плоскости разрыва. Для плоскости компоненты метрического тензора равны δ_{ij} , средняя и гауссова кривизны равны нулю, коэффициенты второй и третьей фундаментальных квадратичных форм поверхности обращаются в нуль, $v_1 = v_2 = 0$, $v_3 = 1$ [7].

Можно показать, что если среда находилась в начальный момент времени в невозмущенном состоянии, то лучевой ряд (2.1) имеет вид

$$f(y_1, y_2, x_3, t) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x_3 - c_1 t)^k}{k!} [f_{,n\dots n}^{(k)}]|_{z_1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x_3 - c_2 t)^k}{k!} [f_{,n\dots n}^{(k)}]|_{z_2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x_3 - c_3 t)^k}{k!} [f_{,n\dots n}^{(k)}]|_{z_3} \quad (2.2)$$

В [5] получены уравнения для определения нулевых членов разложения (суммирование по N и M в дальнейшем не производится):

$$\delta \omega_N / \delta t + b_N \omega_N = 0, \quad \delta [v_i] / \delta t = 0 \quad (2.3)$$

$$b_N = \frac{1}{2} \delta [\tau \delta + (1 - \tau c_N^2)^2]^{-1}, \quad \omega_N = [v_i] v_i|_{z_N}$$

На фронте безвихревой волны выполняются соотношения

$$[q_i] = -\delta \omega_N v_i / (1 - \tau c_N^2), \quad [T] = -\delta \tau c_N \omega_N / (1 - \tau c_N^2) \quad (2.4)$$

$$-c_N [\sigma_{ij}] = (c_N^2 - 2\eta) \omega_N \delta_{ij} + 2\eta v_i v_j, \quad [v_i] = \omega_N v_i$$

На фронте эквиволуминальной волны выполняются соотношения

$$[q_i] = 0, \quad [T] = 0, \quad -c_s [\sigma_{ij}] = \eta ([v_i] v_j + [v_j] v_i), \quad [v_i] v_i = 0 \quad (2.5)$$

Решения уравнений (2.3) имеют вид

$$\omega_N = \omega_{0N}(y_1, y_2) \exp(-b_N t), \quad [v_i] = v_{i0}(y_1, y_2) \quad (2.6)$$

Используя кинематические и геометрические условия совместности $(m+1)$ -го порядка

$$[f_{,in\dots n}^{(m+1)}] = [f_{,n\dots n}^{(m+1)}] v_i + [f_{,n\dots n}^{(m)}]_{,\alpha} x_{i,\alpha}, \quad [f_{,n\dots n}^{(m+1)}] = -c [f_{,n\dots n}^{(m)}] + \delta [f_{,n\dots n}^{(m)}] / \delta t$$

систему уравнений (4.1) можно записать в разрывах. Исключая из полученной системы уравнений разрывы $[\sigma_{ij,n\dots n}^{(m+1)}]$, $[q_{i,n\dots n}^{(m+1)}]$ и $[T_{,n\dots n}^{(m+1)}]$, получим

$$(\delta \tau c^2 - (1 - \eta)(1 - \tau c^2)) [v_{k,n\dots n}^{(m+1)}] v_k v_i + (c^2 - 2\eta)(1 - \tau c^2) [v_{i,n\dots n}^{(m+1)}] =$$

$$= -\tau c^2 [q_{k,n\dots n}^{(m)}]_{,\alpha} x_{k,\alpha} v_i - \delta \tau c^2 [v_{k,n\dots n}^{(m)}]_{,\alpha} x_{k,\alpha} v_i - \tau c^2 v_i \delta [T_{,n\dots n}^{(m)}] / \delta t -$$

$$- \tau c v_k v_i \delta [q_{k,n\dots n}^{(m)}] / \delta t - c [q_{k,n\dots n}^{(m)}] v_k v_i - (1 - \tau c^2) (-c [\sigma_{ij,n\dots n}^{(m)}]_{,\alpha} x_{j,\alpha} +$$

$$+ c \delta [v_{i,n\dots n}^{(m)}] / \delta t - v_j \delta [\sigma_{ij,n\dots n}^{(m)}] / \delta t - v_j \delta [T_{,n\dots n}^{(m)}] / \delta t + (1 - 2\eta) [v_{k,n\dots n}^{(m)}]_{,\alpha} x_{k,\alpha} v_i +$$

$$+ \eta [v_{k,n\dots n}^{(m)}]_{,\alpha} x_{i,\alpha} v_k) \quad (2.7)$$

Полагая в тензорном уравнении (2.7) $c=c_3$, после умножения на v_i и суммирования по индексу i получим

$$\begin{aligned} (\delta\tau c_3^2 - (1-\eta)(1-\tau c_3^2)) [v_{k,n\dots n}^{(m+1)}] v_k = & -\tau c_3^2 [q_{k,n\dots n}^{(m)}]_{,\alpha} x_{k,\alpha} - \delta\tau c_3^2 [v_{k,n\dots n}^{(m)}]_{,\alpha} x_{k,\alpha} - \\ & -\tau c_3^2 \delta [T_{,n\dots n}^{(m)}] / \delta t - \tau c_3 v_k \delta [q_{k,n\dots n}^{(m)}] / \delta t - c_3 [q_{k,n\dots n}^{(m)}] v_k + \\ & + (1-\tau c_3^2) (-c_3 [\sigma_{ij,n\dots n}^{(m)}]_{,\alpha} x_{j,\alpha} v_i + c_3 v_i \delta [v_{i,n\dots n}^{(m)}] / \delta t - v_j v_i \delta [\sigma_{ij,n\dots n}^{(m)}] / \delta t - \\ & - \delta [T_{,n\dots n}^{(m)}] / \delta t + (1-2\eta) [v_{k,n\dots n}^{(m)}]_{,\alpha} x_{k,\alpha} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Подставим $m=1$, $c=c_N$ в уравнение (2.7), умножим на v_i и просуммируем по индексу i . Используя соотношения (2.4), получим дифференциальное уравнение первого порядка для изменения величины $\omega_{nN}^{(1)} = [v_{i,n}^{(1)}] v_k$ на фронте безвихревой волны

$$\begin{aligned} \delta \omega_{nN}^{(1)} / \delta t + b_N \omega_{nN}^{(1)} = & a_N \omega_{nN}^{-1} / 2 c_N \omega_{N,\alpha\alpha} \\ a_N = & -1/2 b_N^2 / c_N + c_N b_N (1-2\tau b_N^2)^2 / (1-\tau c_N^2) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Положим в тензорном уравнении (2.7) $m=1$, $c=c_3$ и подставим (2.8). С помощью соотношений (2.5) получим дифференциальное уравнение первого порядка для определения составляющих вектора $[v_{i,n}^{(1)}]$ на фронте эквиволюминальной волны

$$\delta [v_{i,n}^{(1)}] / \delta t = -1/2 [v_i]_{,\alpha\alpha} \quad (2.10)$$

На фронте безвихревой волны выполняются соотношения

$$\begin{aligned} [q_{i,n}^{(4)}] = & \delta (1-\tau c_N^2)^{-2} \{ -(1-\tau c_N^2) \omega_{nN}^{(4)} v_i + c_N (1-2\tau b_N) \omega_{nN} v_i - (1-\tau c_N^2) \omega_{N,\alpha} x_{i,\alpha} \} \\ [T_{,n}^{(4)}] = & \delta (1-\tau c_N^2)^{-2} \{ -\tau c_N (1-\tau c_N^2) \omega_{nN}^{(4)} + [1-\tau b_N (1+\tau c_N^2)] \omega_N \} \\ -c_N [\sigma_{ij,n}^{(4)}] = & \{ (c_N^2 - 2\eta) \omega_{nN}^{(4)} - \omega_N b_N (c_N^2 + 2\eta) / c_N \} \delta v_j + \\ & + 2\eta (\omega_{nN}^{(4)} - b_N \omega_N / c_N) v_i v_j + 2\eta \omega_{N,\alpha} (x_{i,\alpha} v_j + x_{j,\alpha} v_i) \\ [v_{i,n}^{(4)}] = & \omega_{nN}^{(4)} v_i + \omega_{N,\alpha} x_{i,\alpha} \end{aligned} \quad (2.11)$$

На фронте эквиволюминальной волны выполняются соотношения

$$\begin{aligned} [q_{i,n}^{(4)}] = & 0, \quad [T_{,n}^{(4)}] = 0, \quad [v_{k,n}^{(4)}] v_k = -[v_k]_{,\alpha} x_{k,\alpha} \\ -c_3 [\sigma_{ij,n}^{(4)}] = & \eta ([v_{i,n}^{(4)}] v_j + [v_{j,n}^{(4)}] v_i) + \eta ([v_i]_{,\alpha} x_{j,\alpha} + [v_j]_{,\alpha} x_{i,\alpha}) \end{aligned} \quad (2.12)$$

При $m=2$ аналогично можно получить

$$\begin{aligned} \delta \omega_{nN}^{(2)} / \delta t + b_N \omega_{nN}^{(2)} = & a_N \omega_{nN}^{(1)} - 1/2 c_N \omega_{nN,\alpha\alpha}^{(1)} + b_N (1-2\tau b_N) (1-\tau c_N^2)^{-1} \times \\ & \times (2b_N + c_N (-1+4\tau b_N - 8\tau^2 b_N^2)) \\ \delta [v_{i,n}^{(2)}] / \delta t = & -1/2 c_3 [v_{i,n}^{(1)}]_{,\alpha\alpha} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Разрывы физических параметров второго порядка на фронте безвихревой волны имеют вид

$$\begin{aligned} [q_{i,nn}^{(2)}] = & \delta (1-\tau c_N^2)^{-3} \{ -(1-\tau c_N^2)^2 \omega_{nN} v_i + c_N (1-2\tau b_N) (1-\tau c_N^2) \omega_{nN}^{(1)} v_i + \\ & + (2a_N \tau c_N + b_N - \tau b_N^2 - c_N^2 (1-3\tau b_N + 3\tau^2 b_N^2 + 2a\tau^2 c_N)) \omega_N v_i - \\ & - (1-\tau c_N^2) \omega_{nN,\alpha} x_{i,\alpha} + c_N (1-\tau c_N^2) (1-\tau b_N) \omega_{N,\alpha} x_{i,\alpha} \} \\ [T_{,nn}^{(2)}] = & \delta (1-\tau c_N^2)^{-3} \{ -\tau c_N (1-\tau c_N^2) \omega_{nN}^{(2)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1 - \tau c_N^2) (1 - \tau b_N (1 + \tau c_N^2)) \omega_{nN}^{(1)} + (a_N \tau (1 - \tau^2 c_N^4) + \\
& + c_N (-1 + 4\tau b_N - 3\tau^2 b_N^2) - \tau^3 b_N^2 c_N^2) \omega_{N-1/2} \tau c_N (1 - \tau c_N^2) \omega_{N,\alpha\alpha} \} \\
& - c_N [\sigma_{ij,nn}^{(2)}] = [(c_N^2 - 2\eta) \omega_{nN}^{(2)} + b_N (c_N^2 + 2\eta) \omega_{nN}^{(1)} / c_N - \\
& - (a_N c_N (c_N^2 + 2\eta) + 2\eta b_N) \omega_N / c_N + 1/2 (c_N^2 - 2\eta) \omega_{N,\alpha\alpha}] \delta_{ij} + \\
& + 2\eta [\omega_{nN}^{(2)} - b_N \omega_{nN}^{(1)} / c_N + (a_N c_N + b_N^2) \omega_N / c_N^2 - 1/2 \omega_{N,\alpha\alpha}] v_i v_j + \\
& + 2\eta (\omega_{nN,\alpha}^{(1)} - \omega_{N,\alpha} b_N / c_N) (x_{i,\alpha} v_j + x_{j,\alpha} v_i) + \eta \omega_{N,\alpha\beta} (x_{i,\alpha} x_{j,\beta} + x_{i,\beta} x_{j,\alpha}), \\
& [v_{i,nn}^{(2)}] = \omega_{nN}^{(2)} v_i + \omega_{nN,\alpha}^{(1)} x_{i,\alpha}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

На фронте эквиволюминальной волны выполняются соотношения

$$\begin{aligned}
& [q_{i,nn}^{(2)}] = 0, \quad [T_{,nn}^{(2)}] = 0, \quad [v_{i,nn}^{(2)}] v_i = -[v_{h,n}^{(1)}]_{,\alpha} x_{h,\alpha} \\
& - c_3 [\sigma_{ij,nn}^{(2)}] = \eta ([v_{i,nn}^{(2)}] v_j + [v_{j,nn}^{(2)}] v_i) + \eta ([v_{i,n}^{(1)}]_{,\alpha} x_{j,\alpha} + [v_{j,n}^{(1)}]_{,\alpha} x_{i,\alpha}) - \\
& - 1/2 \eta ([v_i]_{,\alpha\alpha} v_j + [v_j]_{,\alpha\alpha} v_i)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Решения уравнений (2.9) и (2.10) с учетом уравнений (2.6) имеют вид

$$\begin{aligned}
\omega_{nN}^{(1)} &= (\omega_{n0N}^{(1)}(y_1, y_2) + (a_N \omega_{0N} - 1/2 c_N \omega_{0N,\alpha\alpha}) t) \exp(-b_N t) \\
[v_{i,n}^{(1)}] &= v_{in0}^{(1)}(y_1, y_2) - 1/2 c_3 v_{i0,\alpha\alpha} t
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Решения уравнений (2.13) с использованием решений (2.6), (2.16) имеют вид

$$\begin{aligned}
\omega_{nN}^{(2)} &= [\omega_{n0N}^{(2)}(y_1, y_2) + A_N t + 1/2 B_N t^2] \exp(-b_N t) \\
[v_{i,nn}^{(2)}] &= v_{in0}^{(2)}(y_1, y_2) - 1/2 c_3 v_{in0,\alpha\alpha} t + 1/4 c_3^2 v_{i0,\alpha\alpha\beta\beta} t^2 \\
A_N &= a_N \omega_{n0N}^{(1)} - 1/2 c_N \omega_{n0N,\alpha\alpha}^{(1)} + b_N (1 - 2\tau b_N^2) (1 - \tau c_N^2)^{-2} [2b_N + \\
& + c_N^2 (-1 + 4\tau b_N - 8\tau^2 b_N^2)] \omega_{0N} \\
B_N &= a_N^2 \omega_{0N}^{(1)} - a_N c_N \omega_{0N,\alpha\alpha} + 1/4 c_N^2 \omega_{0N,\alpha\alpha\beta\beta}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

3. Для построения решения задачи необходимо знать значения величин $\omega_{0N}^{(1)}$, $\omega_{n0N}^{(2)}$, $\omega_{n0N}^{(1)}$, v_{i0} , $v_{in0}^{(1)}$, $v_{in0}^{(2)}$. Эти величины определяются из краевых условий (1.2). Подставляя с помощью лучевого ряда (2.2) решения (2.4) - (2.6) в краевые условия (1.2), полагая $t=0$, $x_3=0$, получим четыре уравнения. Добавляя условие на эквиволюминальной волне $[v_i] v_i = 0$ при $t=0$, получим систему пяти линейных уравнений относительно пяти неизвестных ω_{01} , ω_{02} , v_{10} , v_{20} , v_{30} , решение которой имеет вид

$$v_{10} = v_{20} = v_{30} = 0, \quad \omega_{0N} = F_N \exp(-d(y_1^2 + y_2^2)) \quad (N=1, 2) \tag{3.1}$$

Используя соотношения (2.4) и (2.5), можно выразить значения разрывов физических параметров на волновых фронтах. Из формул (2.6) и (3.1) следует, что эквиволюминальная волна является волной слабого разрыва. Можно доказать, что для тела любой формы, граница поверхности которого свободна от нагрузок ($\sigma_{ij} v_j = 0$), эквиволюминальная волна не есть волна сильного разрыва.

Дифференцируя уравнение (2.2) по времени t и полагая $t=0$, $x_3=0$, с помощью соотношений (1.2), (2.4), (2.5), (2.11), (2.12) получим систему уравнений относительно неизвестных ω_{n01} , ω_{n02} , $v_{1n0}^{(1)}$, $v_{2n0}^{(1)}$, $v_{3n0}^{(1)}$, решение которой имеет вид (знак Σ здесь и далее означает суммирование по N от

1 до 2):

$$\begin{aligned}\omega_{n0N}^{(1)} &= F_{nN}^{(1)} \exp(-d(y_1^2 + y_2^2)), \quad v_{1n0}^{(1)} = -2(\omega_{01,1} + \omega_{02,1}) \\ v_{2n0}^{(1)} &= -2(\omega_{01,2} + \omega_{02,2}), \quad v_{3n0}^{(1)} = 0\end{aligned}\quad (3.2)$$

$$\begin{aligned}F_{nN}^{(1)} &= [Q_0 c_M (1 - \tau c_N^2) - S_0 \delta] (1 - \tau c_N^2) / [\delta c_N (c_M (1 - \tau c_M^2) - c_N (1 - \tau c_N^2))], \\ M &= 3 - N, \quad Q_0 = \Sigma [-b_N + c_N (1 - 2\tau b_N) / (1 - \tau c_N^2)] \times \\ &\times c_M (1 - \tau c_M^2) g_0(0) / [c_M (1 - \tau c_M^2) - c_N (1 - \tau c_N^2)] - g_0'(0), \\ S_0 &= -2(c_1 b_1 F_1 + c_2 b_2 F_2)\end{aligned}$$

Здесь $\omega_{n0N}^{(1)}$ — начальное значение нормальной составляющей вектора $[v_{i,n}^{(1)}]$ на фронте безвихревой волны. По известным $\omega_{n0N}^{(1)}$ и $v_{in0}^{(1)}$ можно определить по формулам (2.16) значения $\omega_{nN}^{(1)}$ и $[v_{i,n}^{(1)}]$.

Аналогично определяются начальные значения $\omega_{n01}^{(2)}, \omega_{n02}^{(2)}, v_{in0}^{(2)}$. Для этого дифференцируется уравнение (2.2) по времени t дважды и полагается $t=0, x_3=0$. Эти значения имеют вид

$$\begin{aligned}v_{1n0}^{(2)} &= -(2/c_3) \Sigma (c_N \omega_{n0N,1}^{(1)} + b_N \omega_{0N,1}) \\ v_{2n0}^{(2)} &= -(2/c_3) \Sigma (c_N \omega_{n0N,2}^{(1)} + b_N \omega_{0N,2}) \\ [v_{3n0}^{(2)}] &= 2 \Sigma \omega_{0N,\alpha\alpha}, \quad \omega_{n0N}^{(2)} = F_{nN}^{(2)} \exp(-d(y_1^2 + y_2^2))\end{aligned}\quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}F_{nN}^{(2)} &= [Q_1 c_M (1 - \tau c_M^2) - S_1 \delta] (1 - \tau c_N^2) / \{\delta c_N [c_M (1 - \tau c_M^2) - c_N (1 - \tau c_N^2)]\}, \\ M &= 3 - N\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_1 &= \Sigma \{-\delta (1 - \tau c_N^2)^{-1} F_N b_N^2 - 2\delta c_N (1 - \tau c_N^2)^{-2} [-(1 - \tau c_N^2) (-F_{nN}^{(1)} b_N + \\ &+ a_N F_N - 2F_N c_N d(d(y_1^2 + y_2^2) - 1)) - c_N (1 - 2\tau b_N) F_N b_N] + \\ &+ \delta c_N^2 (1 - \tau c_N^2)^{-3} [c_N (1 - 2\tau b_N) (1 - \tau c_N^2) F_{nN}^{(1)} + (b_N (1 - 2\tau b_N) - \\ &- c_N^2 (1 - 5\tau b_N + 10\tau^2 b_N^2 - 8\tau^3 b_N^3)) F_N]\} + g_0''(0)\end{aligned}$$

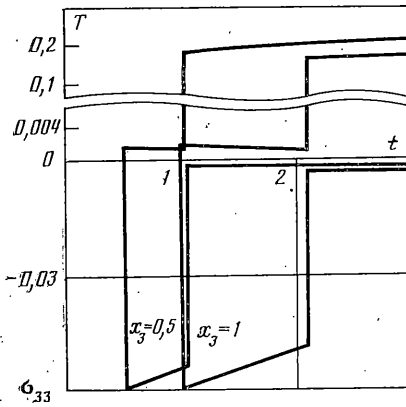
$$\begin{aligned}S_1 &= \Sigma \{3c_N (-c_N b_N F_{nN}^{(1)} + c_N a_N F_N - b_N^2 F_N) + 2d[d(y_1^2 + y_2^2) - \\ &- 1] [-3c_N^3 F_N + 4c_3^2 (c_N - c_3) F_N]\}\end{aligned}$$

Значения $\omega_{nN}^{(2)}$ и $[v_{i,n}^{(2)}]$ определяются по формулам (2.17) с использованием соотношений (3.3), а значения разрывов физических параметров вторых производных по нормали к волновой поверхности определяются с помощью соотношений (2.14) и (2.15).

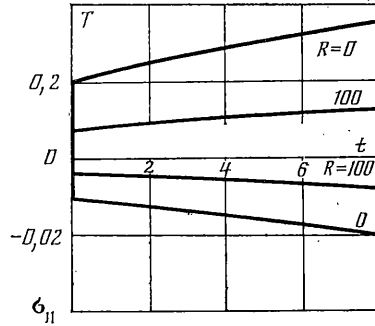
Подставляя соотношения (2.4), (2.5), (2.11), (2.12), (2.14), (2.15) в лучевой ряд (2.2), получим аналитические решения для температуры и напряжения с точностью до малых третьего порядка.

Для иллюстрации полученных решений рассмотрим в качестве примера алюминий со следующими теплофизическими и механическими характеристиками [4, 8]: $\rho=2700$ кг/м³, $\lambda_0=209,3$ Вт/(м·град), $\alpha_T=2,29 \cdot 10^{-5}$ град⁻¹, $\nu=0,33$, $E=7 \cdot 10^{10}$ Н/м², $c_3=2,279 \cdot 10^6$ Дж/(м³·град), $\tau_0=10^{-11}$ с, $T_0=300^\circ$ К ($\tau=4,18$, $\eta=0,25$, $\delta=0,028$).

На фиг. 1 представлены профили температур T и напряжений σ_{33} от времени t для глубин $x_3=0,5$; 1 ($x_1=x_2=0$). При расчетах принималось $g_0(t)=F_0=0,1$ и $d=0,0001$, что соответствует тепловому потоку величиной $4,2 \cdot 10^{12}$ Вт/м. Для большей наглядности графики для температуры изображены с помощью двух масштабов. Единицы напряжений, температур, рас-



Фиг. 1



Фиг. 2

стояний и времени равны соответственно $1,4 \cdot 10^9$ Н/м², 300° К, $14,8 \cdot 10^{-9}$ м, $2,4 \cdot 10^{-12}$ с.

После прихода первого фронта термоупругой волны напряжение σ_{33} и температура T испытывают скачкообразные изменения. При $t=0,49$ сжимающие напряжения достигают величины $\sigma_{33}=-0,0599$ на глубине $x_3=0,5$ и значения $\sigma_{33}=-0,0598$ на глубине $x_3=1$ ($t=0,98$), что позволяет проследить затухающий характер термоупругой волны. Затухание волн характерно для связанной теории термоупругости. До прихода второго фронта термоупругой волны материал разгружается, т. е. сжимающие напряжения уменьшаются. Если после прихода первого фронта термоупругой безвихревой волны температура изменяется незначительно ($\Delta T=0,002$), то после прихода второго фронта изменение температуры составляет $\Delta T=0,158$, т. е. основной вклад в изменение температуры дает второй фронт термоупругой волны. Интересно отметить, что до прихода второго фронта температура убывает. На глубине $x_3=0,5$ она уменьшается на 14%, а на глубине $x_3=1$ — на 24%. Это можно объяснить тем, что уменьшение сжимающих напряжений сопровождается охлаждением материала. Сравнение значений для температуры и напряжения показывает, что превышение предела прочности материала $\sigma_{\text{пр}}=89,6 \cdot 10^6$ Н/м² наступает раньше, чем достижение температуры плавления $T_L=658^\circ$ С, что важно для определения несущей способности конструкции.

Графики зависимости (фиг. 2) для напряжений σ_{11} от времени t ($x_1=R$, $x_2=x_3=0$) показывают, что наибольший вклад в разрушение материала дают радиальные напряжения.

Из соотношений (2.4), (2.5), (2.11), (2.12), (2.14), (2.15) с помощью лучевого ряда (2.2) можно получить $\sigma_{11}(x_1, 0, 0, t) - \sigma_{22}(x_1, 0, 0, t) = K\varphi(x_1, \xi)$, где $K=4\eta F_1 c_1 d/b_1$, $\varphi(x_1, \xi) = (\exp(-\xi) - \exp(-k\xi)) x_1^2 \xi^2 \times \exp(-dx_1^2)$, $k=b_2/b_1$, $\xi=b_1 t$. Можно показать, что $k>1$. Функция $\varphi(x_1, \xi)$ принимает максимальное значение в точке $x_1=1$ в момент времени $t=2,0$ при $k>4$ (для алюминия $k=91$).

Разлагая функцию $\exp(-b_N t)$, входящую в выражения для напряжений σ_{11} и температуры T , в ряд Тейлора и сохраняя члены до третьего порядка, получим аппроксимационные зависимости для радиального напряжения и температуры на границе ($x_1=x_2=0$):

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(0, 0, 0, t) &= \sum (\zeta_{0N} + \zeta_{1N}t + \zeta_{2N}t^2 + \zeta_{3N}t^3) \\ T(0, 0, 0, t) &= \sum (\theta_{0N} + \theta_{1N}t + \theta_{2N}t^2 + \theta_{3N}t^3) \end{aligned}$$

$$\zeta_{0N} = s_N F_N / c_N, \quad \zeta_{1N} = -s_N F_{nN}^{(1)} - 2c_N b_N F_N,$$

$$\zeta_{2N} = [3/2 c_N b_N^2 - 3/2 s_N a_N - (3c_N^2 - 4\eta) c_N d + 4c_3^3 d] F_N +$$

$$+ 3/2 s_N b_N F_{nN}^{(1)} + 1/2 s_N c_N F_{nN}^{(2)}, \quad \zeta_{3N} = [-1/3 (2c_N^2 - \eta) b_N^3 / c_N +$$

$$+ 2c_N^2 a_N b_N + 2(2c_N^2 - \eta) c_N b_N d + 1/2 s_N b_N c_N e_{nN}^2 (2b_N + c_N (-1 + 4\tau b_N -$$

$$\begin{aligned}
& -8\tau^2 b_N^2))] F_N + [-c_N^2 b_N^2 + 1/2 s_N c_N a_N + s_N c_N^2 d] E_{nN}^{(1)} - 1/2 s_N c_N b_N F_{nN}^{(2)} \\
& \quad s_N = c_N^2 - 2\eta, \quad r_N = (1 - \tau c_N^2)^{-1}, \quad e_N = 1 - 2\tau b_N \\
& \quad \theta_{0N} = \delta \tau c_N r_N F_N, \quad \theta_{1N} = \delta c_N e_N r_N^2 F_N - \delta \tau c_N^2 e_N F_{nN}^{(1)} \\
& \quad \theta_{2N} = \delta \{ [c_N^3 \tau b_N e_N^2 r_N^2 - 3\tau c_N^3 d r_N - c_N b_N e_N r_N^2 - 1/2 c_N^2 r_N (a_N \tau (1 - \tau^2 c_N^4) + \\
& \quad + c_N (-1 + 4\tau b_N - 3\tau^2 b_N^2) - \tau^3 b_N^2 c_N^3)] F_N - 1/2 c_N^2 (1 - \tau b_N (3 - \tau c_N^2)) r_N^2 F_{nN}^{(1)} + \\
& \quad \quad + 1/2 \tau c_N^3 r_N F_{nN}^{(2)} \} \\
& \quad \theta_{3N} = \delta \{ [1/2 \tau c_N^3 b_N e_N^2 r_N^2 (2b_N + c_N^2 (-1 + 4\tau b_N - 8\tau^2 b_N^2)) - \\
& \quad - 1/2 c_N r_N^2 (1 - \tau b_N (1 + \tau c_N^2)) (a_N c_N + 2c_N^2 d - b_N^2) + \\
& \quad + \tau c_N^2 r_N (a_N + 3c_N d) b_N + 1/2 c_N^2 b_N r_N^3 (a_N \tau (1 - \tau^2 c_N^4) + \\
& \quad + c_N (-1 + 4\tau b_N - 3\tau^2 b_N^2) - \tau^3 b_N^2 c_N^3) - 1/6 \tau c_N r_N b_N^3] F_N + \\
& \quad + 1/2 [\tau c_N^3 r_N (a_N + 2c_N d) + c_N^2 e_N r_N^2 b_N] F_{nN}^{(1)} - 1/2 \tau c_N^3 r_N b_N F_{nN}^{(2)} \}
\end{aligned}$$

В безразмерных переменных, например, для алюминия эти соотношения переписываются в виде $\sigma_{11}(0, 0, 0, t) = -F_0(1, 02 + 0,12t + 0,0004t^2 + 0,0016t^3)$, $T(0, 0, 0, t) = F_0(2, 02 + 0,24t + 0,005t^2 + 0,002t^3)$. По данным формулам можно оценить величины σ_{11} и T в момент времени t .

ЛИТЕРАТУРА

1. Апполонов В. В., Барчуков А. И., Карлов Н. В., Прохоров А. М., Шефтер Э. М. Термическое воздействие мощного лазерного излучения на поверхность твердого тела. — Квантовая электроника, 1975, т. 2, № 2, с. 380—390.
2. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
3. Постригач Я. С., Коляно Ю. М. Обобщенная термомеханика. Киев: Наук. думка, 1976. 310 с.
4. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М.: Высш. шк., 1967. 599 с.
5. Шагалов А. Г. Разрывные решения в связанной задаче термоупругости. — Механика деформируемых сред: Сб. статей. Куйбышев: Изд-во Куйбышев. ун-та, 1979, вып. 4, с. 85—90.
6. Бабичева Л. А., Быховцев Г. И., Вервейко Н. Д. Лучевой метод решения динамических задач в упруговязкопластических средах. — ПММ, 1973, т. 37, № 1, с. 145—155.
7. Мак-Коннел А. Д. Введение в тензорный анализ. С приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматгиз, 1963. 411 с.
8. Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г. Справочник по элементарной физике. М.: Наука, 1982. 208 с.

Куйбышев

Поступила в редакцию
4.X.1985