

УДК 539.3

## ВОЗДЕЙСТВИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ГРУНТЕ НА ПОДЗЕМНЫЙ ТРУБОПРОВОД

НИКИТИН Л. В., ТЮРЕХОДЖАЕВ А. Н.

Подземные трубопроводы могут подвергаться воздействию сейсмических или взрывных волн, распространяющихся в грунте. В [1] рассмотрена стационарная задача о движении под действием сейсмической волны бесконечного трубопровода, моделируемого упругим стержнем, взаимодействующим через поверхность с окружающим грунтом.

В публикуемой работе, используя результаты [2], рассматривается нестационарное движение полубесконечного трубопровода — стержня, под воздействием распространяющейся в грунте ступенчатой ударной волны.

1. Трубопровод считается расположенным горизонтально, так что в невозмущенном состоянии на него действует равномерное давление. Начало оси  $x$  поместим на конце стержня и направим ее вдоль его оси. Пусть в момент времени  $t=0$  к концу стержня подходит плоская ступенчатая ударная волна, фронт которой перпендикулярен оси стержня и движется со скоростью  $c$ . Считаем, как и в [1], что трубопровод не вызывает сколько-нибудь заметных изменений в движении грунта, однако сам он вовлекается в движение движущимся с заданной скоростью  $v$  грунтом. Следует различать дозвуковое и сверхзвуковое по отношению к скорости звука  $a$  в стержне движение ударной волны в грунте.

Сначала рассмотрим наиболее часто встречающийся на практике случай  $a > c$ . Тогда по стержню впереди ударной волны в грунте распространяется волна, создающая движение в стержне относительно неподвижного грунта. Взаимодействие между поверхностью стержня и грунтом препятствует этому движению. Позади фронта ударной волны в грунте, напротив, грунт движется быстрее трубопровода и силы взаимодействия разгоняют стержень на этом участке. Будем считать, что взаимодействие грунта с поверхностью стержня описывается законом сухого трения Кулона. Тогда продольное напряжение  $\sigma$  и скорость сечений стержня  $v$  будут подчиняться системе уравнений, состоящей из уравнения движения и закона Гука

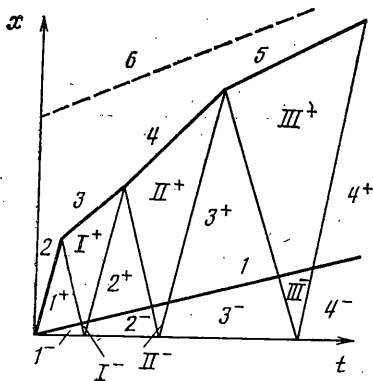
$$\partial\sigma/\partial x = \rho\partial v/\partial t + \kappa q, \quad \partial\sigma/\partial t = E\partial v/\partial x \quad (1.1)$$

где  $E$  — модуль упругости стержня,  $\rho$  — плотность,  $q$  — предельная сила трения на единицу длины стержня, отнесенная к площади поперечного сечения стержня, причем  $a = (E/\rho)^{1/2}$ . Величина  $\kappa$  представляет собой в случае относительного движения стержня и грунта знак разности скоростей движения стержня и грунта. В случае отсутствия относительного движения  $\kappa$  может принимать любое значение, не превышающее по модулю единицы. Следует подчеркнуть, что во всех случаях величина  $\kappa$  должна быть определена в процессе решения.

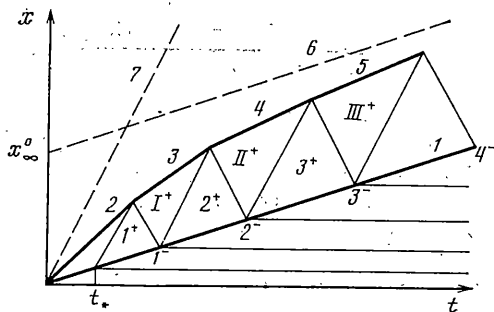
Общее решение системы уравнений (1.1) при фиксированном  $\kappa$  и постоянном  $q$  имеет вид

$$\sigma = \frac{1}{2}\kappa qx + f(at+x) - \varphi(at-x) \quad (1.2)$$

$$a\rho v = -\frac{1}{2}\kappa qat + f(at+x) + \varphi(at-x)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

В начальный момент считаем стержень ненапряженным и покоящимся

$$\sigma=0, \quad v=0 \quad (t=0) \quad (1.3)$$

Давление в грунте за фронтом ударной волны обозначим  $-\sigma_0$ . Тогда с момента  $t=0$  на торцевом сечении стержня  $x=0$  имеем

$$\sigma=-\sigma_0 \quad (x=0, t>0) \quad (1.4)$$

С помощью закона сохранения количества движения можно показать, что передний фронт вследствие разрыва в начальном условии начнет распространяться по стержню со скоростью звука  $a$ . Таким образом, часть области движения при  $a>c$  будет располагаться выше линии  $x=ct$  (фиг. 1, прямая 1). В этой части области стержень движется относительно покоящегося грунта так, что там нужно положить  $\kappa=+1$ . Предельная сила трения  $q^+=2\nu p_0/R$ , где  $\nu$  — коэффициент трения,  $R$  — радиус трубопровода, на этом участке стержня определяется давлением  $p_0$  в покоящемся грунте. В части области движения, лежащей ниже фронта ударной волны в грунте  $x=ct$ , грунт движется.

Предположим, что грунт движется быстрее стержня и вовлекает его в движение. Это предположение будет выполнено, если  $v_s > v_0 = \sigma_0 / (a\rho)$ . Тогда сила трения является активной и нужно положить  $\kappa=-1$  (фиг. 1). Кроме того, предельная сила трения будет уже другой  $q^- = 2\nu(p_0 + \sigma_0)/R$ , так как она определяется теперь давлением за фронтом ударной волны, отличным от статистического. В случае  $v_s < v_0$  движение сечений стержня, примыкающих к его концу  $x=0$ , некоторое время будет тормозиться силами трения, но затем всегда наступит момент, после которого за фронтом  $x=ct$  грунт будет двигаться быстрее стержня. Решение в области  $1^+$  между ударной волной  $x=at$  и волной в грунте  $x=ct$  и области  $1^-$  между волной  $x=ct$  и осью  $t$  нужно искать одновременно. Нижними индексами всюду в дальнейшем будем указывать номер области на фиг. 1, а верхними индексами (+) и (-) — величины, относящиеся к области выше или ниже линии  $x=ct$ .

Для нахождения входящих в общее решение (1.2) четырех произвольных функций для областей  $1^+$  и  $1^-$  имеем следующие условия. Передний фронт возмущения в стержне, как отмечалось, начинает распространяться как ударный. Условие сохранения количества движения с учетом условий (1.3) дает

$$\sigma + a\rho v = 0, \quad x = at \quad (1.5)$$

Ударный фронт в грунте  $x=ct$  разделяет области с различным значением силы трения. Из этого следует, что для стержня эта линия будет фронтом слабого разрыва

$$\sigma^+ = \sigma^-, \quad v^+ = v^-, \quad x = ct \quad (1.6)$$

Условия (1.4) — (1.6) позволяют найти решения в областях  $1^+$ ,  $1^-$

$$\sigma_1^+ = -\sigma_0 + \frac{1}{2}q^+x - \frac{(q^+ + q^-)ac}{a^2 - c^2}(at - x) \quad (1.7)$$

$$v_1^+ = v_0^{-1/2} \frac{q^+ t}{\rho} + \frac{(q^+ + q^-)c}{(a^2 - c^2)\rho} (at - x), \quad v_0 = \frac{\sigma_0}{a\rho}$$

$$\sigma_1^- = -\sigma_0 - \frac{(a-c)q^+ + 2aq^-}{2(a+c)} x, \quad v_1^- = v_0 + \frac{2cq^- - (a-c)q^+}{2(a+c)\rho} t \quad (1.8)$$

Как видно из этого решения, ударная волна вследствие трения затухает и при  $x = 2\sigma_0/q^+$  напряжение и скорость одновременно обращаются в нуль на фронте  $x = at$  (фиг. 1, прямая 2). В дальнейшем передний фронт возмущения отходит от характеристики и начинает распространяться с некоторой скоростью  $a_1$ , которую необходимо найти в процессе решения. Из условий на разрыве следует, что передний фронт перестает быть ударным и на нем выполняются условия

$$\sigma_1^+ = 0, \quad v_1^+ = 0, \quad x = x_1^0 + a_1 t \quad (1.9)$$

Величины с нижними латинскими индексами относятся к соответствующим областям фиг. 1 (прямая 3 соответствует  $x = x_1^0 + a_1 t$ ). Характеристика, разделяющая области I и 1, также оказывается линией слабого разрыва

$$\sigma_1 = \sigma_i, \quad v_1 = v_i, \quad x + at = 4\sigma_0/q^+ \quad (1.10)$$

Условия (1.6), (1.9), (1.10) позволяют найти решения в областях I<sup>+</sup> и I<sup>-</sup>:

$$\sigma_1^+ = \frac{a^2 q^+}{a^2 - a_1^2} (x - x_1^0 - a_1 t), \quad v_1^+ = \frac{a_1 q^+}{(a^2 - a_1^2)\rho} (a_1 t + x_1^0 - x) \quad (1.11)$$

$$\sigma_1^- = -\frac{2a\sigma_0}{a+a_1} + \frac{a^2 \theta q^+}{a^2 - c^2} (ct - x) - \frac{a^2 q^+}{a^2 - a_1^2} (a_1 t - x) \quad (1.12)$$

$$v_1^- = \frac{2v_0 a_1}{a+a_1} - \frac{c\theta q^+}{(a^2 - c^2)\rho} (ct - x) + \frac{a_1 q^+}{(a^2 - a_1^2)\rho} (a_1 t - x)$$

Входящие в формулы (1.9), (1.11) и (1.12) скорость переднего фронта возмущений  $a_1$  и  $x_1^0$  будут равны

$$\frac{a_1}{a} = \frac{4\theta ac - a^2 + c^2}{4\theta ac + a^2 - c^2}, \quad x_1^0 = \frac{2\sigma_0(a-a_1)}{aq^+}, \quad \theta = \frac{q^+ + q^-}{q^+} \quad (1.13)$$

Можно показать, что  $a_1 < a$ .

Аналогично находятся решения в последующих областях. Выписав решения в нескольких последовательных областях, можно установить, что решение в области с произвольным арабским номером  $n$  имеет вид

$$\sigma_n^+ = -\sigma_0 - \frac{ac\theta q^+}{a^2 - c^2} (at - x) + \frac{aq^+}{a+a_{n-1}} x \quad (1.14)$$

$$v_n^+ = v_0 + \frac{c\theta q^+}{(a^2 - c^2)\rho} (at - x) - \frac{q^+}{(a+a_{n-1})\rho} (a_{n-1}t + x_{n-1}^0)$$

$$\sigma_n^- = -\sigma_0 - aq^+ x \left( \frac{\theta}{a+c} - \frac{1}{a+a_{n-1}} \right)$$

$$v_n^- = v_0 + \frac{c\theta q^+}{(a+c)\rho} t + \frac{q^+}{(a+a_{n-1})\rho} (x_{n-1}^0 - a_{n-1}t)$$

Для областей с произвольным латинским номером  $N$  получим

$$\sigma_N^+ = -\frac{a^2 q^+}{a^2 - a_N^2} (a_N t - x + x_N^0), \quad v_N^+ = \frac{a_N q^+}{(a^2 - a_N^2)\rho} (a_N t - x + x_N^0)$$

$$\sigma_N^- = \frac{a^2 q^+ \theta}{a^2 - c^2} (ct - x) - \frac{a^2 q^+}{a^2 - a_N^2} (a_N t - x + x_N^0) \quad (1.15)$$

$$v_N^- = -\frac{c q^+ \theta}{(a^2 - c^2)\rho} (ct - x) + \frac{a_N q^+}{(a^2 - a_N^2)\rho} (a_N t - x - x_N^0)$$

Входящие в эти формулы скорости  $a_n$  участков переднего фронта и расстояние  $x_n^0$ , отсекаемые образующими эти участки прямыми на оси  $x$ , находятся как для арабских, так и для латинских номеров из рекуррентных соотношений

$$\frac{a_n}{a} = \frac{a^2 + aa_1 - aa_{n-1} + 3a_1 a_{n-1}}{3a^2 - aa_1 + aa_{n-1} + a_1 a_{n-1}}, \quad a_0 = a \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$x_n^0 = \frac{2(a-a_n)}{aq^+} \sigma_0 - \frac{a-a_n}{a+a_{n-1}} x_{n+1}^0 \quad x_0^0 = 0 \quad (1.16)$$

Рекуррентные формулы (1.16) получены следующим образом. Решение в области  $N^+$  находится по данным  $\sigma_{N^+} = v_{N^+} = 0$  вдоль участка переднего фронта  $x - x_n = a_n(t - t_n)$ , где  $x_n, t_n$  — точка излома переднего фронта. Рекуррентные формулы для них могут быть получены с помощью фиг. 1 (прямые 4, 5 соответствуют  $x = a_2 t + x_2^0$  и  $x = a_3 t + x_3^0$ ). Они здесь не приводятся ввиду громоздкости и в связи с тем, что они входят в приведенные соотношения лишь в виде комбинации  $x_n^0 = x_n - a_n t_n$ . Это дает возможность определить, в частности, функцию  $\varphi_{N^+}(\beta)$  через  $a_n$ . Из условия сохранения количества движения на границе областей  $N^+$  и  $n^-$  имеем  $\varphi_{N^+} = \varphi_{N^-}$ , откуда

$$\frac{a+a_n}{a-a_n} \beta + \frac{2a}{a-a_n} x_n^0 = \left( \frac{a-a_{n-1}}{a+a_{n-1}} + \frac{a+a_1}{a-a_1} \right) \beta + \frac{4\sigma_0}{q^+} - \frac{a}{a+a_{n-1}} x_{n-1}^0$$

Приравняв коэффициенты при  $\beta$  и свободные члены в этом равенстве, получим формулы (1.16). Можно показать, что в силу первого равенства (1.16) второе выполняется тождественно. Из анализа (1.16) можно установить, что  $a_2 > a_1$ ,  $a_3 < a_2$  и т. д. В пределе скорость переднего фронта возмущений, как следует из (1.16), становится равной

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b = \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)^2 + 4a^2 c^2 \theta^2 - a^2 + c^2}}{2c\theta} \quad (1.17)$$

Отметим также полезное для понимания дальнейших формул соотношение  $b/(a^2 - b^2) = c\theta/(a^2 - c^2)$ . Ломаная линия переднего фронта выходит на асимптоту (штриховая прямая 6 на фиг. 1 соответствует  $x = bt + x_\infty^0$ ):

$$x = (a^2 - b^2) \sigma_0 / (q^+ a^2) + bt \quad (1.18)$$

Асимптотический вид решений при больших временах для областей, помеченных арабскими и римскими цифрами, становится одинаковым

$$\sigma_n^+ \cong -\sigma_0 - \frac{a^2 q^+}{a^2 - b^2} (bt - x) \quad (1.19)$$

$$v_n^+ \cong \frac{b}{a} v_0 + \frac{bq^+}{(a^2 - b^2)\rho} (bt - x)$$

$$\sigma_n^- \cong -\sigma_0 - \frac{a^2(b-c)q^+}{c(a^2 - b^2)} x, \quad v_n^- \cong \frac{b}{a} v_0 + \frac{b(b-c)q^+}{(a^2 - b^2)\rho} t$$

Из анализа полученного решения следует, что напряжения в стержне всюду сжимающие. Видно, что максимального значения по абсолютной величине напряжения достигают на фронте волны в грунте. В первой области при  $x = ct$  напряжения возрастают по закону

$$\sigma = -\sigma_0 - \frac{1}{2} [(a-c)q^+ + 2aq^-] ct / (a+c) \quad (1.20)$$

При больших временах закон нарастания имеет вид

$$\sigma = -\sigma_0 - a^2(b-c)q^+ t / (a^2 - b^2) \quad (1.21)$$

2. Если лобовое сопротивление невелико и его можно не учитывать, т. е. положить в (1.4)  $\sigma_0 = 0$  (но не в падающей волне), то решение значительно упрощается. Передний фронт возмущения в этом случае распространяется с постоянной скоростью, равной  $b$ . При этом решение в

угле между передним фронтом  $x=bt$  (прямая 2) и линией  $x=ct$  (прямая 1) будет (фиг. 2):

$$\sigma^+ = -\frac{a^2 q^+}{a^2 - b^2} (bt - x), \quad v^+ = \frac{b q^+}{(a^2 - b^2) \rho} (bt - x) \quad (2.1)$$

В области между  $x=ct$  и осью  $t$  решение имеет вид

$$\sigma^- = \frac{a^2 (b-c) q^+}{c(a^2 - b^2)} x, \quad v^- = \frac{b(b-c) q^+}{(a^2 - b^2) \rho} t \quad (2.2)$$

Эти решения, так же как и решения (1.14), (1.15) с учетом лобового сопротивления, справедливы лишь до тех пор, пока скорость сечений стержня не сравняется со скоростью движения грунта. Как видно из приведенных решений, это рано или поздно произойдет. В случае, когда лобовое сопротивление не учитывается, как видно из (2.2), скорость в области 1- мгновенно в момент  $t_*$ , равный

$$t_* = (a^2 - b^2) \rho v_s / [b(b-c) q^+] \quad (2.3)$$

сравнивается со скоростью движения грунта. Возникает вопрос, что произойдет в последующие моменты времени? Анализ различных предположений относительно характера дальнейшего движения приводит к заключению, что единственно возможной будет следующая волновая картина. В точке  $x_* = ct_*$ ,  $t_*$  образуется распространяющаяся со скоростью звука  $a$  волна слабого разрыва  $x - x_* = a(t - t_*)$ , вдоль которой скорость и абсолютное значение напряжений убывают до нуля при встрече с волной  $x = bt$ . Ниже линии  $x = ct$  всюду скорости сечений стержня приобретают скорость движения грунта и, следовательно, двигаются с ним как единое целое. Напряжение в части стержня  $0 < x < x_*$  в последующие моменты времени не меняется и определяется формулой (2.2). Решение в области 1 (фиг. 2) между характеристикой  $x - x_* = a(t - t_*)$  и линией  $x = ct$  находится при помощи общего решения (1.2) с использованием закона сохранения количества движения вдоль характеристики и условия равенства скорости сечений стержня скорости движения грунта  $v_s$  вдоль линии  $x = ct$ :

$$\begin{aligned} \sigma_1^+ &= -a \rho v_s - \frac{a q^+}{(a+b)(a-c)} (abt - (a-b-c)x) \\ v_1^+ &= v_s + \frac{b q^+}{(a+b)(a-c) \rho} (ct - x) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Сопоставление (2.4) с (2.1) показывает, что волна  $x - x_* = a(t - t_*)$  действительно является волной слабого разрыва. Напряженное состояние в области совместного движения грунта и стержня 1- получим, если в (2.4) положим  $t = x/c$ :

$$\sigma_1^- = -a \rho v_s - a(b-c) q^+ x / (c(a+b)) \quad (2.5)$$

Далее передний фронт отходит от линии  $x = bt$  и движется с некоторой заранее неизвестной скоростью  $b_1$ . Решение в области  $I^+$  (фиг. 2) между передним фронтом  $x = bt$  и характеристикой  $x - x_1 = -a(t - t_1)$ , где  $x_1 = -b(a-c)t_*/(a-b)$ ,  $t_1 = (a-c)t_*/(a-b)$  — точка излома переднего фронта, находится по данным  $\sigma_1^+ = 0$ ,  $v_1^+ = 0$  вдоль первой линии и закону сохранения количества движения  $\sigma_1^+ - \sigma_1^- = a \rho (v_1^+ - v_1^-)$  вдоль второй линии. Эти три условия позволяют найти две неизвестные функции в общем решении (1.2) и неизвестную скорость фронта  $b_1$ . В результате

$$\begin{aligned} \sigma_1^+ &= -\frac{a^2 q^+}{a^2 - b^2} (b_1(t - t_1) - x + x_1), \quad b_1 = \frac{b(a+c)}{a+2b-c} \\ v_1^+ &= \frac{b_1 q^+}{(a^2 - b_1^2) \rho} (b_1(t - t_1) - x + x_1) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Аналогично находится решение в последующих областях. Нетрудно установить, что для областей с произвольным арабским номером  $n$  реше-

ние имеет вид

$$\sigma_n^+ = -a\rho v_s - \frac{aq^+ x_n^0}{a+b_n} - \frac{aq^+}{(a+b_n)(a-c)} (ab_n t - (a+b_n - c)x) \quad (2.7)$$

$$v_n^+ = v_s + \frac{b_n q^+}{(a+b_n)(a-c)\rho} (ct - x), \quad b_n = \frac{b_{n-1}(a+c)}{a+2b_{n-1}-c}, \quad b_0 = b$$

где  $x_n^0 = x_n - b_n t_n$  — расстояние от начала координат до точки пересечения прямой, образующей  $n$ -й участок переднего фронта, с осью  $x$ , а  $b_n$  — скорость переднего фронта на этом участке. В примыкающей к этой области зоне совместного движения стержня и среды как единого целого напряжение будет

$$\sigma_n^- = -a\rho v_s - \frac{aq^+ x_n^0}{a+b_n} - \frac{aq^+(b_n - c)}{c(a+b_n)} x \quad (2.8)$$

В областях с произвольным латинским номером  $N$  получим

$$\sigma_N^+ = -\frac{a^2 q^+}{a^2 - b_N^2} (b_N t - x - x_N^0), \quad v_N^+ = \frac{b_N q^+}{(a^2 - b_N^2)\rho} (b_N t - x - x_N^0). \quad (2.9)$$

Рекуррентная формула для комбинации  $x_n^0 = x_n - b_n t_n$ , в которую только и входят координаты точек излома переднего фронта в соотношения (2.7) — (2.9), имеет вид, аналогичный (1.16):

$$x_n^0 = 2\rho v_s (a - b_n) / q^+ + (a - b_n) x_{n-1}^0 / (a + b_{n-1}) \quad (2.10)$$

Формула (2.10), как и формула в (2.7) для скорости  $b_n$ , находится как находились скорости  $a_n$  и параметры  $x_n^0$  в (1.16). Ломаная линия переднего фронта возмущений выходит на асимптоту (фиг. 2; прямые 3—7 соответствуют  $x = x_1^0 + b_1 t$ ,  $x_2^0 + b_2 t$ ,  $x_3^0 + b_3 t$ ,  $x_\infty^0 + ct$ ,  $at$ ):

$$x = (a^2 - c^2)\rho v_s / (c q^+) + ct \quad (2.11)$$

так что предельные скорость фронта возмущений  $b_\infty$  и координата  $x_\infty^0$  равны:  $b_\infty = \lim b_n = c$ ,  $x_\infty^0 = \lim x_n^0 = (a^2 - c^2)\rho v_s / (c q^+)$  при  $n \rightarrow \infty$ . При больших временах решение принимает одинаковый для областей с арабскими и латинскими индексами вид

$$\sigma^+ = -\frac{a^2 \rho v_s}{c} - \frac{a^2 q^+}{a^2 - c^2} (ct - x) \quad (2.12)$$

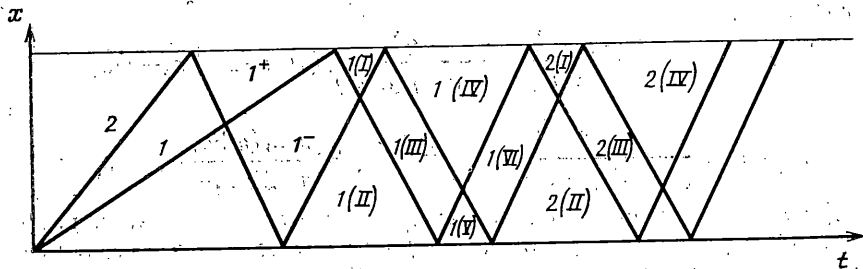
$$v^+ = v_s + \frac{c q^+}{(a^2 - c^2)\rho} (ct - x)$$

Как видно из (2.12), а также из (2.8), напряжения в полубесконечном трубопроводе всюду сжимающие и максимальны по абсолютной величине при  $x = ct$ , где они стремятся к значению

$$\sigma = a^2 \rho v_s / c. \quad (2.13)$$

**3. Появление растягивающих напряжений при дозвуковых скоростях** связано с конечностью длины трубопровода. В самом деле, пусть длина трубопровода  $l$  будет меньше, чем  $a(a-b)\rho v_s / ((b-c)q^+)$ , так, чтобы выравнивание скоростей трубопровода и грунта происходило после момента прихода отраженной волны. До прихода отраженной от конца стержня  $x=l$  волны с фронтом  $x-l+a(t-l/b)=0$  решение будет по-прежнему описываться формулами (2.1) и (2.2). В дальнейшем появятся отраженные от обоих концов трубопровода волны, фронты которых распространяются со скоростью звука  $a$  (фиг. 3). Решение в областях  $1^+$  и  $1^-$  (фиг. 3) находится по граничному условию  $\sigma_1^+ = 0$  при  $x=l$ , условию сохранения количества движения  $[\sigma] = a\rho[v]$  вдоль фронта  $x-l+a(t-l/b)=0$  и условиям непрерывности  $[\sigma] = [v] = 0$  вдоль линии  $x=ct$  (прямая  $l$ ):

$$\sigma_1^+ = \frac{aq^+}{a-b} (l-x), \quad v_1^+ = \frac{q^+}{(a-b)\rho} (bt-l) \quad (3.1)$$



Фиг. 3

$$\sigma_1^- = \frac{a(ac+bc-ab)q^+}{c(a^2-b^2)}x + \frac{a^2bq^+}{a^2-b^2}t - \frac{aq^+l}{a-b}$$

$$v_1^- = \frac{bq^+}{(a^2-b^2)\rho}x + \frac{b(a+b-c)}{(a^2-b^2)\rho}t - \frac{q^+l}{(a-b)\rho}$$

С помощью (3.1), (2.1) и (2.2) убеждаемся, что на фронте  $x-l+a(t-l/b)=0$  напряжения и скорости остаются непрерывными. В последующих областях плоскости движения решение может быть получено аналогично. Предположим, что выполняется неравенство  $2bc > a(b-c)$ . Тогда последующие области будут иметь вид, изображенный на фиг. 3 (прямая 2 соответствует  $x=bt$ ). В противном случае повторно отраженная от обоих концов стержня волна придет к концу стержня  $x=l$  раньше, чем волна в грунте, и решение нужно будет строить с учетом этого факта. Последующие области в этом случае можно разбить на шесть характерных типов I, II, ... VI (фиг. 3). Области каждого типа занумеруем числом  $n$ , так что, например, 3 (II) означает третью область второго типа, а  $\sigma_3^{II}$  — напряжения в этой области. В треугольных областях, примыкающих к концу стержня  $x=l$ , типа I решение имеет вид

$$\sigma_n^I = \frac{a^2(b-c)q^+}{c(a^2-b^2)}(l-x), \quad v_n^I = \frac{b(b-c)q^+}{(a^2-b^2)\rho} \left( t + (2n-1) \frac{al}{bc} \right) \quad (3.2)$$

В таких же областях типа IV решение будет

$$\sigma_n^{IV} = -\frac{a(ac+2bc-ab)q^+}{c(a^2-b^2)}(l-x) \quad (3.3)$$

$$v_n^{IV} = \frac{b(2a+b-c)q^+}{(a^2-b^2)\rho}t + \frac{2n(ab-ac-2bc)-a(b+c)}{c(a^2-b^2)\rho}q^+l$$

Как видно из (3.2), напряжения в областях типа I являются растягивающими и максимального значения достигают при  $x=a(b-c)l/(2bc)$ :

$$\max \sigma_n^I = \frac{a^2(b-c)(2bc+ac-ab)}{2bc^2(a^2-b^2)}q^+l \quad (3.4)$$

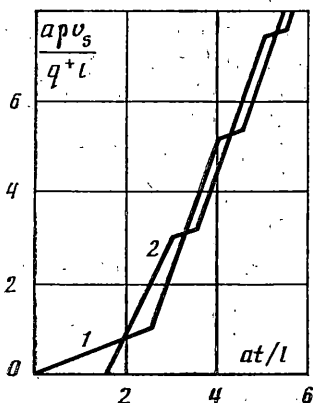
В пределе при  $c \rightarrow a$  оно равно  $1/2 q^+ l$ . Напряжения в областях типа IV всегда сжимающие. Максимального по абсолютной величине значения они достигают при  $x=(2bc+ac-ab)l/(bc)$  и совпадают с (3.4).

В треугольных областях, примыкающих к переднему концу стержня  $x=0$ , решения в областях типа II будут

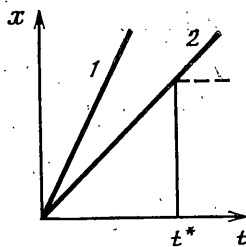
$$\sigma_n^{II} = \frac{a(ac+2bc-ab)q^+}{c(a^2-b^2)}x, \quad v_n^{II} = v_n^{IV} \quad (3.5)$$

Напряжения здесь также являются растягивающими. Максимального значения они достигают там же, где и напряжения в области типа I. В областях типа V напряжения будут сжимающими

$$\sigma_n^V = -\frac{a^2(b-c)q^+}{c(a^2-b^2)}, \quad v_n^V = \frac{b(b-c)q^+}{(a^2-b^2)\rho} \left( t + \frac{2na}{bc}l \right) \quad (3.6)$$



Фиг. 4



Фиг. 5

Их максимальные по абсолютной величине значения совпадают с (3.4). Для оставшихся областей типов III и VI решение ввиду громоздкости не приводится. Отметим лишь, что все выявленные волны оказываются волнами слабого разрыва.

Скорости сечений стержня возрастают и, очевидно, в некоторый момент достигнут скорости движения грунта  $v_s$ . После этого стержень будет двигаться как единое целое с грунтом. Пусть  $\theta = 5/2$ ,  $c = a/4$ . Тогда  $b = a/2$ . В этом случае области I, III и V, VI вырождаются и все сечения стержня движутся с одной и той же скоростью. В момент времени

$$t = \sqrt[3]{3\rho v_s / q^+ + 8/3} l / a \quad (3.7)$$

одновременно все сечения стержня приобретают скорость движения грунта  $v_s$ . В общем случае сечения стержня останавливаются не одновременно. На фиг. 4 представлено изменение во времени скоростей переднего 1 и заднего 2 концов стержня для  $c = a/3$ ,  $b = 2a/3$ ,  $\theta = 3.2$ . Как видно, скорости концов стержня после двукратного отражения переднего фронта волны отличаются незначительно. Поэтому момент прекращения волновых движений в стержне с хорошей точностью можно определить, приравняв скорость одного из концов стержня скорости грунта  $v_s$ .

4: Представляет интерес рассмотреть также случай сверхзвукового движения волны в грунте  $c > a$ , так как эффективная скорость распространения волн по трубопроводу за счет наличия зазоров в стыках может оказаться меньше скорости ударной волны в грунте [1]. В этом случае передний фронт возмущения в стержне будет распространяться со скоростью  $c$  (фиг. 5) и являться волной слабого разрыва (прямая 1 соответствует  $x = ct$ )

$$\sigma = 0, \quad v = 0 \quad (x = ct) \quad (4.1)$$

Сила трения будет, очевидно, активной, так что нужно положить  $\kappa = -1$ . Решение, которое будет справедливым до характеристики  $x = at$  (прямая 2), получим в виде

$$\sigma = -\frac{a^2 q^-}{c^2 - a^2} (ct - x), \quad v = \frac{c q^-}{(c^2 - a^2) \rho} (ct - x) \quad (4.2)$$

Для построения решения в угле между характеристикой  $x = at$  и осью  $t$  имеем условия

$$[\sigma] + a\rho[v] = 0 \quad (x = at), \quad \sigma = 0 \quad (x = 0) \quad (4.3)$$

которые приводят к решению

$$\sigma = -a q^- x / (c + a), \quad v = c q^- t / (c + a) \rho \quad (4.4)$$

В момент времени

$$t = t^* = (c + a) \rho v_s / (c q^-) \quad (4.5)$$

скорость движения участка стержня  $0 < x < at^*$  достигает значения ско-



рости движения грунта. Анализ различных схем движения показывает, что этот участок стержня в дальнейшем движется с грунтом как единое целое со скоростью  $v_s$ , а фронт  $x=at$  с момента  $t=t^*$  становится ударным и после его прохождения сечения стержня также приобретает скорость  $v_s$ , которая затем остается неизменной. При этом на участке стержня  $0 < x < at^*$  распределение напряжений будет

$$\sigma = -aq^-x/(c+a) \quad (4.6)$$

На участке  $at^* < x < at$  распределение напряжений становится

$$\sigma = -apv_s + (c-a)q^-x/(c+a) \quad (4.7)$$

Как видно из (4.7), напряжения, начиная с

$$x = a(c+a)\rho v_s / ((c-a)q^-) \quad (4.8)$$

становятся растягивающими, причем максимального значения они достигают на ударном фронте  $x=at$  и могут стать очень большими.

В предельном случае  $c=a$  передний фронт совпадает с характеристикой  $x=at$ . Остается только одна область движения, расположенная между этим фронтом и осью  $t$ . Решение в этой области вплоть до момента выравнивания скоростей  $t_* = t^* = 2\rho v_s / q^-$  получается из формул (1.8), (2.2) и (4.4) предельным переходом  $c \rightarrow a$ . В соответствующих случаях, описываемых (2.2) и (4.4), получается один и тот же результат:

$$\sigma = -\frac{1}{2}q^-x, \quad v = \frac{1}{2}q^-t/\rho \quad (4.9)$$

Решение, получающееся из (1.8), как и должно быть, отличается вследствие учета лобового сопротивления от решения (4.9) на постоянную  $\sigma_0$ .

Приведенный анализ распространения нестационарных волн в трубопроводе, вызванных воздействием на него ударной волны в грунте, показал, что при дозвуковом случае ( $c < a$ ) в длинном трубопроводе возникают только сжимающие напряжения. Растягивающие напряжения в этом случае появляются в трубопроводе конечной длины за счет отражения волн от торцов. Величины растягивающих напряжений не превышают значения  $q^-l/2$ . Сжимающие напряжения при неограниченной длине трубопровода растут неограниченно. В сверхзвуковом случае ( $c > a$ ) растягивающие напряжения появляются и в трубопроводе неограниченной длины.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А., Рашидов Т. Р. О действии сейсмической волны на подземный трубопровод. — Изв. АН УзССР. Сер. техн., 1971, № 1, с. 37–42.
2. Никитин Л. В. Распространение волн в упругом стержне при наличии сухого трения. — Инж. журн., 1963, т. 3, вып. 1, с. 126–130.

Москва, Алма-Ата

Поступила в редакцию  
4.IV.1985