МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1987

УДК 539.3

ФАКТОРИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО ОПЕРАТОРА И НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛОГ МЕТОДА ВКБ В ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН

ЛОКШИН А. А., САГОМОНЯН Е. А.

В публикуемой работе рассматривается задача о распространении волны напряжений в полубесконечном стержне с плавно меняющейся плотностью $\rho=\rho(\gamma x)$, $0<\gamma\ll 1$. Предполагается, что деформация и напряжение в стержне связаны соотношением $\varepsilon=a(\sigma)$. Уравнение, описывающее распространение напряжений в этом стержне, удается асимптотически факторизовать с равномерно малой погрешностью $O(\gamma^2)$. Получаемое в результате пренебрежения этой погрешностью одноволновое асимптотическое решение задачи представляет собой естественный аналог первого приближения ВКБ. Найдены условия, необходимые и достаточные для того, чтобы указанная выше факторизация была не асимптотической, а точной. Получены обобщения теоремы об асимптотической факторизации на случай $\varepsilon=\varepsilon(\gamma t, \gamma x, \sigma)$, $\rho=\rho(\gamma t, \gamma x)$. Следует подчеркнуть, что амплитуда σ не предполагается малой. При малых σ полученные результаты переходят в известные формулы Ландау – Уизема (см. [1, 2]). Основным инструментом для доказательства полученных в работе теорем является точная факторизация нелинейного волнового оператора с постоянными коэффициентами [3, 4]. В работе получена также теорема о равномерной асимптотической факторизации линейного волнового оператора с плавно меняющимися коэффициентами. С помощью этой теоремы легко может быть построено равномерное асимптотическое приближение к общему решению соответствующего уравнения.

1. Рассмотрим полубесконечный стержень плотности $\rho=\rho(\gamma x)$, $0<\gamma\ll 1$, в котором напряжение и деформация связаны соотношением $\varepsilon=a(\sigma)$. Уравнение для напряжений в стержне, как нетрудно проверить, имеет вид

$$\frac{\partial^2 a(\sigma)}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\rho(\gamma x)}\frac{\partial\sigma}{\partial x}=0 \tag{1.1}$$

Для простоты будем предполагать, что функция ρ ограничена вместе с двумя первыми производными и $\rho\geqslant\mathrm{const}>0$.

Поставим следующую задачу для уравнения (1.1):

$$\sigma=\partial\sigma/\partial t=0 \text{ при } x>0,\ t=0,\quad \sigma(t,0)=\sigma_0(t) \tag{1.2}$$

Здесь $\sigma_0(t)$ – гладкая функция, равная нулю при $t<0$. Для поставленной задачи удается построить асимптотическое решение с равномерно малой погрешностью (при $\gamma\to 0$), пригодное при произвольных амплитудах (до момента возникновения ударной волны). Докажем вначале следующую теорему.

Теорема 1. Уравнение (1.1) представимо в виде

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{a'(\sigma)}\mp\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{\rho(\gamma x)}}+\frac{1}{4}\frac{\gamma\rho'}{\rho^{3/2}}\frac{d}{d\sigma}\int_0^\sigma\left(\frac{a'(\eta)}{a'(\sigma)}\right)^{1/4}d\eta\right)\right\}\times$$
$$\times\left\{\sqrt{a'(\sigma)}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\pm\left(\frac{1}{\sqrt{\rho(\gamma x)}}\frac{\partial\sigma}{\partial x}-\frac{1}{4}\frac{\gamma\rho'}{\rho^{3/2}}\int_0^\sigma\left(\frac{a'(\eta)}{a'(\sigma)}\right)^{1/4}d\eta\right)\right\}=O(\gamma^2) \tag{1.3}$$

(одновременно выбираются либо верхние, либо нижние знаки). Здесь величина $O(\gamma^2)$ равномерно мала, если σ – ограниченная функция, и выражается формулой

$$O(\gamma^2)=\frac{\gamma^2}{4\rho^3}\int_0^\sigma\left(\frac{a'(\eta)}{a'(\sigma)}\right)^{1/4}d\eta\cdot\left[\rho''\rho-2\rho'^2+\frac{1}{4}\rho'^2\frac{d}{d\sigma}\int_0^\sigma\left(\frac{a'(\eta)}{a'(\sigma)}\right)^{1/4}d\eta\right] \tag{1.4}$$

При перемножении скобок в (1.3) предполагается, что оператор, стоящий правее, действует раньше. Например $\partial_t\sqrt{a'(\sigma)}\sqrt{a'(\sigma)}\partial_t\sigma\equiv\partial_t(a'(\sigma)\partial_t\sigma)$. Справедливость утверждения теоремы проверяется непосредственным перемножением скобок в (1.3).

2. Из теоремы 1 ясно, что в одноволновом приближении в поставленной задаче уравнение (1.1) следует заменить уравнением 1-го порядка

$$\sqrt{a'(\sigma)}\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\frac{1}{\sqrt{\rho(\gamma x)}}\frac{\partial\sigma}{\partial x}-\frac{1}{4}\frac{\gamma\rho'(\gamma x)}{\rho^{3/2}(\gamma x)}\int_0^\sigma\left(\frac{a'(\eta)}{a'(\sigma)}\right)^{1/4}d\eta=0 \tag{2.1}$$

Будем решать задачу (2.1), (1.2), не предполагая амплитуды малыми. Поэтому проводимый ниже анализ будет справедлив лишь до момента возникновения ударной волны, когда, как известно, для конечных амплитуд теряется одноволновость процесса.

Уравнения характеристик для (2.1) имеют вид

$$\frac{dt}{dx}=\sqrt{a'(\sigma)\rho(\gamma x)},\qquad \frac{d\sigma}{dx}=\frac{1}{4}\frac{\gamma\rho'(\gamma x)}{\rho(\gamma x)}\int_0^\sigma\left(\frac{a'(\eta)}{a'(\sigma)}\right)^{1/4}d\eta \tag{2.2}$$

Эти уравнения удается проинтегрировать в квадратурах:

$$\int_0^\sigma(a'(\eta))^{1/4}d\eta=\left(\frac{\rho(\gamma x)}{\rho(0)}\right)^{1/4}\int_0^{\sigma_0(\tau)}(a'(\eta))^{1/4}d\eta,\qquad t=\int_0^x\sqrt{a'(\sigma)\rho(\gamma z)}\,dz+\tau \tag{2.3}$$

Формулы (2.3) и являются искомым равномерным асимптотическим приближением к решению поставленной задачи. Наконец, расстояние, на котором происходит градиентная катастрофа, определяется как наименьшая абсцисса точек огибающей семейства (2.3).

3. Пусть теперь и плотность ρ, и нелинейная функция a являются плавно меняющимися функциями от пространственной координаты, а также от времени: $\rho=\rho(\gamma t,\ \gamma x)$, $a=a(\gamma t,\ \gamma x,\ \sigma)$. Тогда нелинейное волновое уравнение для напряжений примет вид

$$\frac{\partial^2a(\gamma t,\gamma x,\sigma)}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\rho(\gamma t,\gamma x)}\frac{\partial\sigma}{\partial x}=0 \tag{3.1}$$

Будем предполагать, что: $a(\tau,\ \xi,\ 0)=0$; $a_\sigma'(\tau,\ \xi,\ \sigma)>0$; функции $a(\tau,\ \xi,\ \sigma)$ и $\rho(\tau,\ \xi)$ ограничены вместе со своими производными 1-го и 2-го порядков; $\rho(\tau,\ \xi)\geqslant\mathrm{const}>0$. (Здесь $\tau\equiv\gamma t$, $\xi\equiv\gamma x$.) Справедлив следующий результат.

Теорема 2. Уравнение (3.1) представимо в виде

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{a_\sigma'(\gamma t,\gamma x,\sigma)}\mp\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{\rho(\gamma x)}}+\gamma f_1^\pm(\gamma t,\gamma x,\sigma)\right\}\times$$
$$\times\left\{\sqrt{a_\sigma'(\gamma t,\gamma x,\sigma)}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\pm\frac{1}{\sqrt{\rho(\gamma x)}}\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\gamma f_2^\pm(\gamma t,\gamma x,\sigma)\right\}=O(\gamma^2) \tag{3.2}$$

$$f_1^\pm(\tau,\xi,\sigma)=\frac{1}{2}\frac{d}{d\sigma}\left\{(a_\sigma')^{-1/4}\int_0^\sigma(a_\sigma')^{-7/4}[\pm(\sqrt{a_\sigma'/\rho})_\xi'+\right.$$
$$\left.+\sqrt{\rho a_\sigma'}\,(\sqrt{a_\sigma'/\rho})_\tau'+a_{\tau\sigma}'']d\sigma\right\}-\sqrt{\rho}(\sqrt{a_\sigma'/\rho})_\tau'$$

$$f_2^{\pm}(\tau, \xi, \sigma) = \frac{1}{2}(a_\sigma')^{-1/4} \int_0^\sigma (a_\sigma')^{-1/4} \left[\pm \left(\sqrt{\frac{a_\sigma'}{\rho}} \right)_\xi' + \right. \tag{3.3}$$

$$\left. + \sqrt{\rho a_\sigma'} \left(\sqrt{\frac{a_\sigma'}{\rho}} \right)' + a_{\tau\sigma}'' \right] d\sigma$$

а величина $O(\gamma^2)$ равномерно мала при ограниченном σ и обращается в нуль при $\sigma=0$. (В (3.2) у всех членов разложения выбираются одновременно верхние или нижние знаки. Оператор, стоящий правее, действует раньше.)

Для доказательства этой теоремы достаточно перемножить скобки в (3.2) с соблюдением указанных правил. Нетрудно видеть, что при $a=$ $=a(\sigma)$, $\rho=\rho(\gamma x)$ теорема 3 переходит в теорему 1.

Пренебрегая теперь величиной $O(\gamma^2)$ в правой части (3.2), волну, распространяющуюся, например, вправо, можно описать уравнением

$$\sqrt{a_\sigma'(\gamma t, \gamma x, \sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\rho(\gamma t, \gamma x)}} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \gamma f_2^+(\gamma t, \gamma x, \sigma) = 0 \tag{3.4}$$

Это уравнение, очевидно, можно решать с помощью характеристик:

$$\frac{dt}{dx} = \sqrt{\rho(\gamma t, \gamma x, \sigma) a_\sigma'(\gamma t, \gamma x, \sigma)}, \qquad \frac{d\sigma}{dx} = -\gamma \sqrt{\rho(\gamma t, \gamma x)} f_2^+(\gamma t, \gamma x, \sigma) \tag{3.5}$$

Система обыкновенных уравнений (3.5) в квадратурах, вообще говоря, не интегрируется (в отличие от системы (2.2)). Однако работать с ней, конечно, намного проще, чем с исходным уравнением (3.1).

Теорема 3. Уравнение

$$\frac{\partial^2 A(\gamma t, \gamma x)\sigma}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho(\gamma t, \gamma x)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0 \tag{3.6}$$

представимо в виде

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{A} \mp \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{\rho}} + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{A_\tau' \pm (\sqrt{A/\rho})_\xi'}{\sqrt{A}} - \sqrt{\rho} (\sqrt{A/\rho})_\tau' \right) \right\} \times$$

$$\times \left\{ \sqrt{A} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \pm \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\gamma}{2} \sigma \left(\frac{A_\tau' \pm (\sqrt{A/\rho})_\xi'}{\sqrt{A}} + \sqrt{\rho} (\sqrt{A/\rho})_\tau' \right) \right\} = O(\gamma^2) \tag{3.7}$$

где величина $O(\gamma^2)$ равномерно мала при ограниченном σ и обращается в нуль при $\sigma=0$. (Как и выше, при перемножении операторных скобок предполагается, что оператор, стоящий правее, действует раньше. Одновременно выбираются верхние или нижние знаки.)

Эта теорема вытекает из теоремы 3, если положить $a=A(\gamma t, \gamma x)\sigma$.

В силу линейности уравнения (3.6) полученное разложение позволяет, очевидно, строить равномерное асимптотическое приближение к общему (а не только одноволновому) решению уравнения (3.6). Соответствующие формулы легко могут быть получены методом характеристик. Заметим также, что разложение (3.7) нетривиально в том смысле, что оно не является следствием преобразования Грина — Лиувилля.

В заключение авторы приносят благодарность Н. В. Зволинскому за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д.* Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения.— ПММ, 1945, т. 9, вып. 9, с. 496–500.
2. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
3. *Локшин А. А.* Нелинейная ударная волна в наследственной среде и точная факторизация нелинейного волнового оператора.— Изв. АН СССР. МТТ, 1985, № 6, с. 104–108.
4. *Локшин А. А.* Факторизация нелинейного волнового оператора и ее применение к исследованию ударных волн в нелинейной теории упругости.— Изв. АН СССР. МТТ, 1986, № 2, с. 134–141.

Москва

Поступила в редакцию 28.VI.1985