

УДК 539.3

**ПЛОСКАЯ СТАЦИОНАРНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ
КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ**

ФОМИН В. М.

Периодические статические контактные задачи теории упругости рассматривались различными исследователями [1-7]. Очевидно, представляет интерес и стационарная динамическая периодическая контактная задача для упругой полуплоскости, а тем более такие задачи, в которых амплитуды и фазы нагрузок на штампах принимают произвольные, не зависящие одно от другого значения.

Для решения подобных задач предлагается алгоритм, основанный на теории линейных представлений групп, при применении которого исходная задача распадается на ряд так называемых обобщенно-симметрических задач, связанных с определенными соотношениями между фазами нагрузок, приложенных к различным штампам. Искомое решение получается суперпозицией решений обобщенно-симметрических задач.

Следует отметить, что и сами обобщенно-симметрические задачи (периодическая, антипериодическая и др.) имеют определенное теоретическое и прикладное значение.

1. Рассмотрим множество X точек оси x , инвариантное относительно трансляций t_m ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) на вектора ta , кратные основному вектору a и отражений σ_{v_k} в плоскостях σ_k , перпендикулярных оси и пересекающих ее в точках $x=kl$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $l=|a|/2$, фиг. 1; a). Преобразования t_m ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) и σ_{v_k} ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) образуют пространственную группу C_{1h}^1 [8]. Назовем основным отрезок $[0, 2l]$, а основной элементарной ячейкой — отрезок $[0, l]$ и присвоим им обозначения S_0 и S_{01} соответственно.

Система элементарных ячеек $S_{mn}=t_m h_n S_{01}$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $h_n \in H$, $n=1, 2$) образует покрытие множества X . Через H обозначена точечная группа, состоящая из двух элементов: тождественного преобразования h_1 и $h_2=\sigma_{v_0}$. В дальнейшем точку x оси будем обозначать x_0 , если $x \in S_0$, а в некоторых случаях, когда возникнет необходимость, x_{0p} , если $x \in S_{0p}$ ($p=1, 2$).

Введем функции $\psi_n(x_0)$ ($n=1, 2$), определенные на основном отрезке S_0 , следующим образом: $\psi_n(x_0)=\delta_{pn}$ ($x_0 \in S_{0p}$), δ_{pn} — символ Кронекера, $n, p=1, 2$.

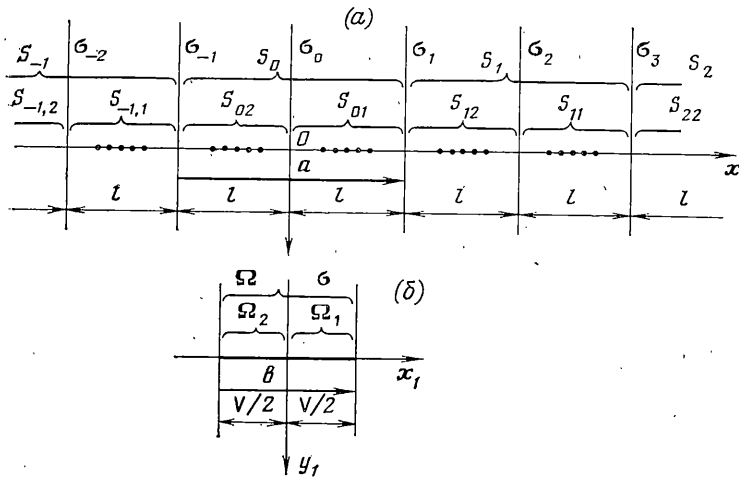
Разложим каждую из этих функций на составляющие, преобразующиеся по неэквивалентным неприводимым представлениям точечной группы H_k некоторого вектора $k \in \Omega$ (Ω — зона Бриллюэна [9]):

$$\psi_n(x_0) = \sum_{k=1}^N \psi_{nk}(x_0, k), \quad \psi_{nk}(x_0, k) = \frac{1}{N_k} \sum_{h \in H_k} \tau^{(k)}(h^{-1}) h \psi_n(x_0)$$

где M — число неэквивалентных неприводимых представлений группы H_k , $\tau^{(k)}$ — элемент матрицы k -го представления этой группы (для C_{1h}^1 эта матрица одномерна), N_k — порядок H_k .

Очевидно, любая функция, заданная на основном отрезке, может быть представлена в следующем виде:

$$F(x_0) = \sum_{n=1}^N F(x_{0n}) \psi_n(x_0) \tag{1.1}$$



Фиг. 1

Из теории представлений пространственных групп следует, что функции

$$\Phi_{nj}(x, \mathbf{k}) = g_j \psi_{nj}(x_0, g_j \mathbf{k}) \exp(-ig_j \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_m) \quad (x_0 \in S_0, x = t_m x_0; \\ j=1, L; m=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1.2)$$

при фиксированных n, k и \mathbf{k} преобразуются по неприводимому представлению группы C_{4h}^1 . В формуле (1.2) через g_j ($j=1, L; L=1, 2$) обозначены элементы группы H , участвующие в разложении ее на левые смежные классы по подгруппе H_k .

Для ограниченной функции $f(x)$ ($x \in X$) ряд

$$F(x_0, \alpha) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(t_m x_0) \exp(im\alpha) \quad (x_0 \in S_0) \quad (1.3)$$

определяет при фиксированном x_0 обобщенную функцию на отрезке $\Gamma\{-\pi \leq \alpha \leq \pi\}$ с отождествленными концами. В качестве основных принимаются бесконечно дифференцируемые функции на Γ .

Тогда $f(t_m x_0) = i/2 (F, \exp(-im\alpha)) / \pi$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Это равенство может быть записано так:

$$f(t_m x_0) = (F, \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_m)) / V \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1.4)$$

где функция $F(x_0, \mathbf{k})$ рассматривается как обобщенная на зоне Бриллюэна Ω ($\mathbf{k} = \alpha \mathbf{b} / (2\pi)$, $\mathbf{b} = 2\pi \mathbf{a} / |\mathbf{a}|^2$, $V = |\mathbf{b}|$).

Обозначим через Δ_X множество ограниченных функций на X , для которых дискретное преобразование Фурье (1.3) имеет вид

$$F(x_0, \mathbf{k}) = F_1(x_0, \mathbf{k}) + \sum_{r=1}^J F_2(x_0, \mathbf{k}_r) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_r) \quad (1.5)$$

Здесь $F_1(x_0, \mathbf{k})$ — кусочно-непрерывная функция, определенная всюду в Ω , за исключением конечного числа точек, и интегрируемая там в смысле главного значения по Коши, $\delta(\mathbf{k})$ — дельта-функция. Подставив (1.5) в (1.4), получим

$$f(x) = \frac{1}{V} \int_{\Omega} F_1(x_0, \mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_m) d\Omega_{\mathbf{k}} + \frac{1}{V} \sum_{r=1}^J F_2(x_0, \mathbf{k}_r) \exp(-i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{a}_m) \quad (1.6)$$

Обозначим через Ω_1 основную элементарную ячейку зоны Бриллюэна, т. е. отрезок $[0, V/2]$ оси x_1 (фиг. 1, б). Тогда $\Omega = \bigcup_p \Omega_p$, $\Omega_p = h_p \Omega_1$ ($h_p \in H$).

Разбивая интегрирование по области Ω в формуле (1.6) на интегрирование в подобластях Ω_p ($p=1, 2$), учитывая (1.1) и (1.2), будем иметь

$$f(x) = \frac{1}{V} \int \sum_{\Omega_1, n, j=1}^2 F_1(x_{0n}, g_j \mathbf{k}) \Phi_{n1j}(x, \mathbf{k}) d\Omega_{\mathbf{k}} + \\ + \frac{1}{V} \sum_{r=1}^J \sum_{\kappa=1}^{M_r} \sum_{n=1}^2 F_2(x_{0n}, \mathbf{k}_r) \Phi_{n\kappa 1}(x, \mathbf{k}_r) \quad (1.7)$$

Здесь $x = t_m x_{0p}$, $x_{0p} \in S_{0p}$ ($p=1, 2$), M_r — число неэквивалентных неприводимых представлений группы вектора \mathbf{k}_r .

Таким образом, справедлива

Теорема. Произвольная функция из Δ_x имеет дискретно-континуальное разложение (1.7) по функциям $\Phi_{n\kappa j}(x, \mathbf{k})$, преобразующимся по неприводимым представлениям группы C_{1h}^1 .

Отметим, что основанный на формуле (1.7) алгоритм позволяет раскладывать на обобщенно-симметрические составляющие (т. е. преобразующиеся по неприводимым представлениям группы C_{1h}^1) функции на X более общего вида, чем алгоритм в работе [10].

Если вектору $\mathbf{k} \in \Omega$ соответствует двумерное неприводимое представление группы C_{1h}^1 , то при помощи преобразования

$$\Phi_{h1j}(x, \mathbf{k}) = {}^{1/2} [\theta_{11}(x, \mathbf{k}) + (-1)^{n+j} \theta_{22}(x, \mathbf{k})]^{-1/2} (-1)^j i [\theta_{12}(x, \mathbf{k}) - \\ - (-1)^{n+j} \theta_{21}(x, \mathbf{k})] \quad (1.8)$$

($n, j=1, 2$; i — мнимая единица) можно осуществить переход к функциям $\theta_{nj}(x, \mathbf{k})$, ($j=1, 2$), преобразующимся при каждом n ($n=1, 2$) по вещественному неприводимому представлению:

$$\theta_{nj}(g x, \mathbf{k}) = \sum_{q=1}^2 \tau_{qj}^{\mathbf{k}}(g^{-1}) \theta_{nq}(x, \mathbf{k}) \quad (g \in C_{1h}^1, n, j=1, 2) \quad (1.9) \\ \tau_{qq}^{\mathbf{k}}(t_m) = \cos m\alpha, \quad \tau_{qj}^{\mathbf{k}}(t_m) = (-1)^j \sin m\alpha \quad (q \neq j) \\ \tau_{qq}^{\mathbf{k}}(\sigma_{V_m}) = (-1)^{q+1} \cos m\alpha, \quad \tau_{qj}^{\mathbf{k}}(\sigma_{V_m}) = -\sin m\alpha \quad (q \neq j) \\ (\alpha = \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}, \alpha \neq 0, \pi; q, j=1, 2)$$

Если же вектору \mathbf{k} соответствует приводимое представление, являющееся прямой суммой двух одномерных представлений ($\alpha=0, \pi$), то вводим обозначения

$$\theta_{n\kappa}(x, \mathbf{k}) = \Phi_{n\kappa 1}(x, \mathbf{k}) \quad (n, \kappa=1, 2) \quad (1.10)$$

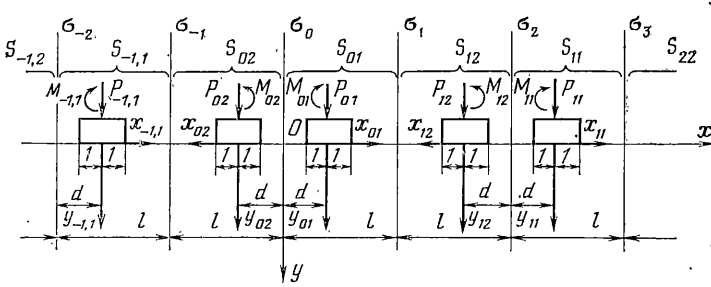
Подставив (1.10) и (1.8) в (1.7), будем иметь

$$f(x) = \frac{1}{V} \int \sum_{\Omega_1, p, q=1}^2 F_1^{(pq)}(\mathbf{k}) \theta_{pq}(x, \mathbf{k}) d\Omega_{\mathbf{k}} + \frac{1}{V} \sum_{r=1}^J \sum_{p, q=1}^2 F_2^{(pq)}(\mathbf{k}_r) \theta_{pq}(x, \mathbf{k}_r) \quad (1.11)$$

$$F_m^{(11)}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^m \sum_{n=1}^2 F_m(x_{0n}, g_j \mathbf{k}),$$

$$F_m^{(12)}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \sum_{j=1}^m \sum_{n=1}^2 (-1)^j F_m(x_{0n}, g_j \mathbf{k})$$

$$F_m^{(21)}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \sum_{j=1}^m \sum_{n=1}^2 (-1)^n F_m(x_{0n}, g_j \mathbf{k})$$



Фиг. 2

$$F_m^{(22)}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^m \sum_{n=1}^2 (-1)^{n+j} F_m(x_{0n}, g_j \mathbf{k}) \quad (m=1, 2)$$

для \mathbf{k} , которому соответствует двумерное неприводимое представление, и $F_2^{(pq)}(\mathbf{k}) = F_2(x_{0p}, \mathbf{k})$ ($p, q=1, 2$) в противном случае.

2. На границе однородной упругой полуплоскости расположена система штампов, инвариантная относительно преобразований группы C_{1h^1} (фиг. 2). Штампам присваиваются номера в соответствии с нумерацией элементарных ячеек, на которых они расположены. На штампы действуют сосредоточенные вертикальные силы $P_{mp}(t) = P_{mp} \exp(i\omega t)$ и моменты $M_{mp}(t) = M_{mp} \exp(i\omega t)$ ($p=1, 2; m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Направим ось x вдоль границы полуплоскости, ось y — вертикально вниз. Переменные x, y и t безразмерны, масштаб длин принят равным a_0 (a_0 — половина ширины штампа), а масштаб времени — a_0/c_2 (c_2 — скорость распространения поперечной упругой волны). Предполагается, что трение между штампами и полуплоскостью отсутствует и длина площадки контакта равна длине штампа.

Амплитудные значения сил P_{mp} и моментов M_{mp} ($p=1, 2; m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) можно считать функциями, заданными на множестве X , имеющем на каждой из элементарных ячеек по одной точке. Будем полагать, что эти функции принадлежат Δ_x , а следовательно, для них возможны разложения (1.7), (1.11).

Следует иметь в виду, что значения нагрузок на штампах, контактных напряжений и перемещений необходимо задавать в локальных системах координат, построенных на каждой из элементарных ячеек и переходящих одна в другую при преобразованиях $g \in C_{1h^1}$ (фиг. 2). Система таких локальных координатных систем носит название инвариантной. Введение такой системы позволяет определить для указанных величин правило знаков, не изменяющееся при преобразованиях симметрии.

Из линейности постановки и симметрии задачи вытекает [11], что разложения, аналогичные (1.7) и (1.11), имеют место и для контактных напряжений и перемещений штампов. Отсюда следует, что решение задачи при произвольном нагружении сводится к решению серии обобщенно-симметрических задач, для каждой из которых нагрузки преобразуются по неприводимому представлению группы C_{1h^1} .

Рассмотрим решение обобщенно-симметрической задачи, соответствующей вектору $\mathbf{k} \in \Omega$ и номеру κ неприводимого представления группы H_κ . Обозначим через $l_{\kappa\kappa}$ размерность связанного с этой задачей неприводимого представления группы C_{1h^1} ($l_{\kappa\kappa}=1, 2$). Используем формулу (1.109) [12]:

$$v(x, t) = -P \exp(i\omega t) G_\omega(x) / (2\pi\mu) \quad (2.1)$$

$$G_\omega(x) = \int_{-\infty}^{\infty} R_1(\eta) \cos(\omega x \eta) d\eta, \quad R_1(\eta) = \sqrt{\eta^2 - \beta^2} / R(\eta)$$

$$R(\eta) = (2\eta^2 - 1)^2 - 4\eta^2 \sqrt{\eta^2 - \beta^2} \sqrt{\eta^2 - 1}, \quad \beta = c_2/c_1$$

где $v(x, t)$ — вертикальное перемещение граничной точки x полуплоскости

от действия вертикальной сосредоточенной гармонической силы, приложенной в начале координат, μ — постоянная Ламе, c_1 и c_2 — скорости продольной и поперечной упругих волн. Интеграл $G_\omega(x)$ понимается в смысле главного значения по Коши, а радикалы принимают следующие значения: $\sqrt{\eta} \geq 0$ при $\eta \geq 0$, $\sqrt{\eta} = i\sqrt{|\eta|}$ при $\eta < 0$.

Для исключения стоячих волн в соответствии с принципом предельного поглощения введем малое затухание в среду. Это приведет к смещению полюсов и точек ветвления функции $R_1(\eta)$ с вещественной оси [13]:

$$G_\omega^{(e)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} R_1^{(e)}(\eta) \cos(\omega x \eta) d\eta, \quad R_1^{(e)}(\eta) = \sqrt{\eta^2 - \beta_1^2} / R^{(e)}(\eta)$$

$$R^{(e)}(\eta) = (2\eta^2 - 1)^2 - 4\eta^2 \sqrt{\eta^2 - \beta_1^2} \sqrt{\eta^2 - \beta_2^2}$$

$$\beta_1 = \beta + i\varepsilon_1, \quad \beta_2 = 1 + i\varepsilon_2, \quad \varepsilon_j < 0, \quad |\varepsilon_j| \ll 1 \quad (j=1, 2)$$

Проводя разрезы на комплексной плоскости η аналогично [13] и выбирая ветвь, для которой $\operatorname{Re} \sqrt{\eta^2 - \beta_j^2} \geq 0$ ($j=1, 2$), получаем однозначную функцию $R_1^{(e)}(\eta)$, непрерывную на вещественной оси.

С другой стороны, если к границе полушарности приложена вертикальная распределенная нагрузка $p(x) \exp(i\omega t)$, то с помощью суперпозиции можно получить

$$v(x, t) = - \frac{\exp(i\omega t)}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} G_\omega^{(e)}(x - \xi) p(\xi) d\xi$$

Отсюда следует, что

$$v_j(x, t) = - \frac{\exp(i\omega t)}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} G_\omega^{(e)}(x - \xi) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^2 p_{jmn}(\xi) d\xi \quad (j=1, l_{k\kappa})$$

Здесь $v_j(x, t)$ — перемещение граничной точки x от действия нагрузки $p_j(x; t) = p_j(x) \exp(i\omega t)$ ($j=1, l_{k\kappa}$), преобразующейся по неприводимому представлению группы C_{4h}^1 , $p_{jmn}(x)$ — финитная функция, равная нулю на оси x всюду, за исключением отрезка S_{mn} , на котором она совпадает с $p_j(x)$.

Так как функции $p_j(x)$ ($j=1, l_{k\kappa}$) преобразуются по неприводимому представлению группы симметрии, то они, так же как и $\theta_{nj}(x, \mathbf{k})$, удовлетворяют соотношениям (1.9). Учитывая, что $S_{mn} = t_m [\sigma_{v0}]^{n-1} S_{01}$, получаем

$$v_j(x, t) = - \frac{\exp(i\omega t)}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^2 \int_0^l [\tau_{jn}^k(t_m) G_\omega^{(e)}(x - \xi - 2ml) + \tau_{jn}^k(\sigma_{vm}) G_\omega^{(e)}(x + \xi - 2ml)] p_{n01}(\xi) d\xi$$

Пусть функции $p_j(x)$ ($j=1, 2$) таковы, что (δ_{jr} — символ Кронекера, $\delta(x)$ — дельта-функция):

$$p_j(x_{01}) = p_{j01}(x) = \delta_{jr} \delta(x - u) \quad (j, r=1, l_{k\kappa}; x \in S_{01}) \quad (2.2)$$

Обозначая через $v_{jr}(x, u)$ амплитудные перемещения граничных точек от действия этой нагрузки, будем иметь

$$v_{jr}(x, u) = - \frac{1}{2\pi\mu} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\tau_{jr}^k(t_m) G_\omega^{(e)}(x - u - 2ml) + \tau_{jr}^k(\sigma_{vm}) G_\omega^{(e)}(x + u - 2ml)]$$

Используя равенство $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(i2ml\xi) = \frac{\pi}{l} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\xi - k \frac{\pi}{l}\right)$, получим

$$v_{jr}(x, u) = - \frac{T}{2\pi\mu} \sum_{p=1}^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{p(j+r)}}{\omega} R_1^{(e)}(\eta_{pk}) z_j(\omega \eta_{pk} x) z_r(\omega \eta_{pk} u) \quad (2.3)$$

$$\eta_{pk} = T[k - (-1)^p \alpha_1] / \omega, \quad T = \pi/l, \quad \alpha_1 = \alpha / (2\pi)$$

$$z_1(x) = \cos x, \quad z_2(x) = \sin x$$

При исчезновении малого затухания $R_1^{(e)}(\eta) \rightarrow R_1(\eta)$. Если $\eta_{pk} \neq \eta_1$ ($p=1, 2; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots; \eta = \pm \eta_1$ — нули функции $R(\eta)$), то $v_{jr}(x, u)$ остается ограниченной. Если же $\eta_{pk} = \pm \eta_1$ при некотором p и k , то при уменьшении затухания $v_{jr}(x, u)$ неограниченно возрастает. Это означает, что частоты $\omega_{pk} = |T[k - (-1)^p \alpha_1] / \eta_1|$ ($p=1, 2; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) являются резонансными для упругой полуплоскости при действии нагрузки (2.2). Они связаны с возникновением стоячих релеевских волн.

Составим уравнения движения штампов под действием сосредоточенных сил $P_{jmn} \exp(i\omega t)$ и моментов $M_{jmn} \exp(i\omega t)$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots; n=1, 2; j=1, l_{k\kappa}$), преобразующихся по неприводимому представлению C_{1h}^1

$$m_0 \frac{c_2^2}{a_0^2} \frac{d^2 w_{jmn}(t)}{dt^2} = P_{jmn} \exp(i\omega t) - P_{jmn}^*(t) \quad (2.4)$$

$$J_0 \frac{c_2^2}{a_0^2} \frac{d^2 \varphi_{jmn}(t)}{dt^2} = M_{jmn} \exp(i\omega t) - M_{jmn}^*(t)$$

$$(m=0, \pm 1, \pm 2, \dots; n=1, 2; j=1, l_{k\kappa})$$

Здесь m_0, J_0 — масса и осевой момент инерции штампа, $w_{jmn}(t)$ и $\varphi_{jmn}(t)$ — его вертикальное поступательное и угловое перемещения, $P_{jmn}^*(t)$ и $M_{jmn}^*(t)$ — главный вектор и главный момент реактивных сил основания.

Выделим стационарный режим движения штампов, т. е. положим $w_{jmn}(t) = w_{jmn} \exp(i\omega t)$, $\varphi_{jmn}(t) = \varphi_{jmn} \exp(i\omega t)$, $p_{jmn}(x, t) = p_{jmn}(x) \exp(i\omega t)$ ($p_{jmn}(x, t)$ — контактные напряжения). Отсюда следует

$$P_{jmn}^*(t) = P_{jmn}^* \exp(i\omega t), \quad M_{jmn}^*(t) = M_{jmn}^* \exp(i\omega t)$$

$$P_{jmn}^* = a_0 \int_{d-1}^{d+1} p_{jmn}(x) dx, \quad M_{jmn}^* = a_0^2 \int_{d-1}^{d+1} x p_{jmn}(x) dx \quad (2.5)$$

Тогда $w_{jmn} = -(P_{jmn} - P_{jmn}^*) / (m_0' \omega^2)$, $\varphi_{jmn} = -(M_{jmn} - M_{jmn}^*) / (J_0' \omega^2)$, $m_0' = m_0 c_2^2 / a_0^2$, $J_0' = J_0 c_2^2 / a_0^2$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots; n=1, 2; j=1, l_{k\kappa}$).

Предполагая, что угловые перемещения штампа малы, приравняем перемещения точек подошвы штампа перемещениям граничных точек полуплоскости

$$\int_{d-1}^{d+1} \sum_{r=1}^{l_{k\kappa}} v_{jr}(x, u) p_{rjn}(u) du = - \frac{P_{jmn} - P_{jmn}^*}{m_0' \omega^2}$$

$$- \frac{M_{jmn} - M_{jmn}^*}{J_0' \omega^2} (x-d) \quad (d-1 \leq x \leq d+1; m=0, \pm 1, \pm 2, \dots; n=1, 2; j=1, l_{k\kappa})$$

Сделав подстановку $x = s + d$, $u = i + d$, получим для основного штампа (т. е. находящегося на элементарной ячейке S_{01}) систему интегральных уравнений

$$\int_{-1}^1 \sum_{r=1}^{l_{k\kappa}} v_{qr}(s+d, t+d) p_{r01}(t+d) dt = - \frac{P_{q01} - P_{q01}^*}{m_0' \omega^2} - \frac{M_{q01} - M_{q01}^*}{J_0' \omega^2} s$$

$$(-1 \leq s \leq 1; q=1, l_{k\kappa})$$

Заметим, что если контактные напряжения и перемещения для основного штампа определены, то при помощи (1.9) можно получить значения этих величин для любого штампа.

3. Решение системы интегральных уравнений (2.6) будем искать в виде ряда по полиномам Чебышева

$$p_{q01}(t+d) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{qj} \frac{T_j(t)}{\sqrt{1-t^2}} \quad (3.1)$$

Подставим (3.1) в (2.6) и (2.5) при $m=0, n=1$, затем (2.6) умножим на $T_n(s)/(1-s^2)^{1/2}$ и проинтегрируем по s от -1 до $+1$. Используя равенства ($J_n(x)$ — бesselева функция первого рода):

$$\int_{-1}^1 \frac{T_{2n}(x)}{\sqrt{1-x^2}} \cos bx \, dx = (-1)^n \pi J_{2n}(b)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{T_{2n+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} \sin bx \, dx = (-1)^n \pi J_{2n+1}(b) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

и (2.3), будем иметь

$$P_{q01}^* = a_0 \pi A_{q0}^*, \quad M_{q01}^* = a_0^2 \pi / 2 \times A_{q1}$$

$$\sum_{q=1}^{l_{k\kappa}} \sum_{j=0}^{\infty} B_{rqnj} A_{qj} = \delta_{n0} d_0 \frac{P_{r01}}{\pi a_0 \omega^2} + \delta_{n1} 2d_1 \frac{M_{r01}}{\pi a_0^2 \omega^2} \quad (r=1, l_{k\kappa}; n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3.2)$$

$$d_0 = 2\pi^3 \mu a_0 / (m_0' T), \quad d_1 = \pi^3 \mu a_0^2 / (2J_0' T)$$

$$B_{rqnj} = \frac{g_{rqnj}}{\omega^2} + \sum_{s=1}^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{(r-q)s} \frac{R_1(\eta_{sk})}{\omega} h_{rnsk} h_{qjsh}$$

$$(r, q=1, l_{k\kappa}; n, j=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$g_{1100} = g_{2200} = d_0$, $g_{1111} = g_{2211} = d_1$, $g_{rqnj} = 0$ для остальных значений r, q, n, j . Если $l_{k\kappa} = 2$ ($\kappa=1$), то

$$h_{1jsh} = \pi [\delta_j'' (-1)^{j/2} \cos(\xi_{sh} d) - \delta_j' (-1)^{(j-1)/2} |\sin(\xi_{sh} d)|] J_j(|\xi_{sh}|) \quad (3.3)$$

$$h_{2jsh} = \pi [\delta_j'' (-1)^{j/2} \sin(\xi_{sh} d) + \delta_j' (-1)^{(j-1)/2} \times$$

$$\times \text{sign}(\xi_{sh}) \cos(\xi_{sh} d)] J_j(|\xi_{sh}|) \quad (3.4)$$

$$\delta_j' = -1/2 [(-1)^j - 1], \quad \delta_j'' = 1/2 [(-1)^j + 1], \quad \xi_{sk} = \omega \eta_{sk}$$

$$(s=1, l_{k\kappa}; j, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Если же $l_{k\kappa} = 1$ ($\kappa=1, 2$), то h_{11sh} вычисляется по формуле (3.3) для $\kappa=1$ и по формуле (3.4) для $\kappa=2$. При этом j в этих формулах полагается равным единице.

Покажем, что система (3.2) нормальна [14] и может быть решена при помощи редукции.

Рассмотрим функцию комплексного переменного

$$f_{\xi}(s) = \frac{s^2 \sqrt{\xi^2 + \beta^2 s^2}}{(2\xi^2 + s^2)^2 - 4\xi^2 \sqrt{\xi^2 + \beta^2 s^2} \sqrt{\xi^2 + s^2}}$$

Для выделения однозначных ветвей радикалов $\sqrt{\xi^2 + \beta^2 s^2}$ и $\sqrt{\xi^2 + s^2}$ при фиксированном вещественном ξ в плоскости s делаются разрезы от точек ветвления $s = \pm i\xi/\beta$, $s = \pm i\xi$ до бесконечности вдоль полуосей мнимой оси, на которых расположены эти точки. Выбираем те ветви радикалов, которые принимают положительные значения на действительной оси.

Можно показать [12, 15], что

$$f_{\xi}(s) = \rho_1(\zeta_1) \frac{|\xi| |\zeta_1|}{s^2 + (\xi \zeta_1)^2} + \frac{2|\xi|}{\pi} \int_1^{\infty} \rho(\zeta) \frac{\zeta}{s^2 + (\xi \zeta)^2} d\zeta \quad (3.5)$$

$$\rho(\zeta) = 0 \quad (|\zeta| < 1), \quad \rho(\zeta) = \rho_2(\zeta) \quad (1 \leq |\zeta| < 1/\beta), \quad \rho(\zeta) = \rho_3(\zeta) \quad (|\zeta| \geq 1/\beta)$$

$$\rho_1(\xi) = \frac{\xi \sqrt{1 - \beta^2 \xi^2}}{2(2 - \xi^2 - \beta^2 \sqrt{1 - \xi^2} / \sqrt{1 - \beta^2 \xi^2} - \sqrt{1 - \beta^2 \xi^2} / \sqrt{1 - \xi^2})}$$

$$\rho_2(\xi) = \frac{4\xi^2(1 - \beta^2 \xi^2) \sqrt{\xi^2 - 1}}{(2 - \xi^2)^4 + 16(1 - \beta^2 \xi^2)(\xi^2 - 1)}$$

$$\rho_3(\xi) = \frac{\xi^2 \sqrt{\beta^2 \xi^2 - 1}}{(2 - \xi^2)^2 + 4\sqrt{\beta^2 \xi^2 - 1} \sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad \xi_1 = \frac{1}{\eta_1}$$

Можно убедиться, что $\frac{1}{\omega} R_1\left(\frac{\xi}{\omega}\right) = -\lim_{s \rightarrow i\omega} f_\xi(s)$ ($\omega > 0, \operatorname{Re} s > 0$).

Из формул Сохоцкого — Племеля для интеграла типа Коши следует

$$\frac{1}{\omega} R_1\left(\frac{\xi}{\omega}\right) = -\rho_1(\xi_1) \frac{|\xi| |\xi_1|}{(\xi \xi_1)^2 - \omega^2} - \frac{2|\xi|}{\pi} \int_1^\infty \rho(\xi) \frac{\xi}{(\xi \xi)^2 - \omega^2} d\xi + \\ + i \frac{1}{|\xi|} \rho\left(\frac{\omega}{|\xi|}\right)$$

Поэтому

$$v_{qr}(x, u) = \frac{T}{2\pi\mu} \left[\rho_1(\xi_1) H_{qr}(\xi_1, x, u) + \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \rho(\xi) H_{qr}(\xi, x, u) d\xi - i Q_{qr}(x, u) \right] \\ (q, r=1, l_{k\kappa}) \quad (3.6)$$

$$H_{qr}(\xi, x, u) = \sum_{p=1}^2 \sum_{k=-\infty}^\infty (-1)^s \frac{|\xi_{pk}| \xi}{(\xi_{pk} \xi)^2 - \omega^2} z_q(\xi_{pk} x) z_r(\xi_{pk} u) \quad (3.7)$$

$$Q_{qr}(x, u) = \sum_{p=1}^2 \sum_{k=-\infty}^\infty (-1)^s \frac{1}{|\xi_{pk}|} \rho\left(\frac{\omega}{|\xi_{pk}|}\right) z_q(\xi_{pk} x) z_r(\xi_{pk} u), \quad s=p(q+r) \quad (3.8)$$

Выделяя при помощи метода А. Н. Крылова логарифмическую особенность в ряде (3.7) и учитывая, что в (3.8) имеется лишь конечное число слагаемых, будем иметь

$$v_{qr}(x, u) = {}_1/2 T [M \delta_{qr} \ln 1/|x-u| + W_{qr}(x, u)] / (\pi\mu)$$

$$M = 2 \frac{\rho_1(\xi_1)}{\xi_1 T} + \frac{4}{\pi T} \int_1^\infty \frac{\rho(\xi)}{\xi} d\xi$$

где $W_{qr}(x, u)$, ($q, r=1, l_{k\kappa}$) — комплекснозначные функции, имеющие кусочно-непрерывную вторую производную по каждому аргументу.

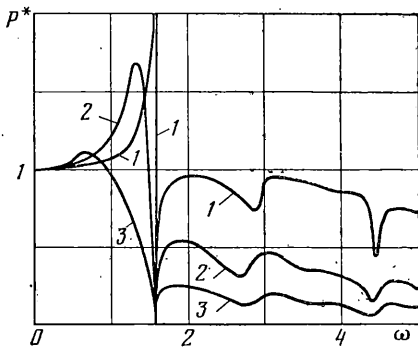
Повторяя выкладки, сделанные для системы (3.2), и используя известные соотношения

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_m(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} \ln \left| \frac{1}{\xi-\eta} \right| d\eta = \mu_m T_m(\xi) \\ \mu_0 = \ln 2, \quad \mu_m = m^{-1} \quad (m > 0)$$

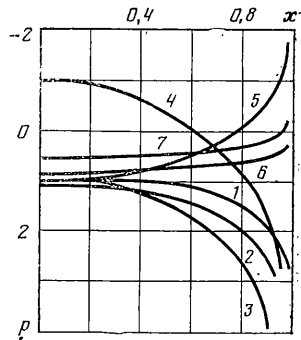
приходим к следующему представлению коэффициентов системы (3.2):

$$B_{rqnj} = \frac{g_{rqnj}}{\omega^2} + \frac{M\pi^2}{2} \mu_n \delta_{nj} \delta_{rq} + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 W_{rq}(\xi+d, \eta+d) \frac{T_n(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{T_j(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} d\xi d\eta \quad (3.9)$$

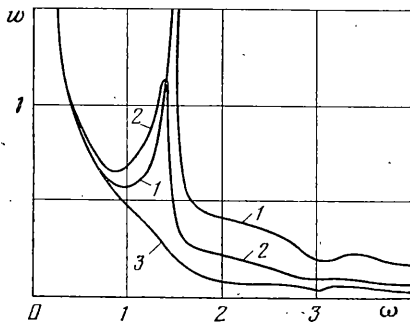
Дважды интегрируя по частям, убеждаемся в том, что абсолютная величина третьего слагаемого в (3.9) не превышает C/j^2 (при $n=0, j \geq 1$),



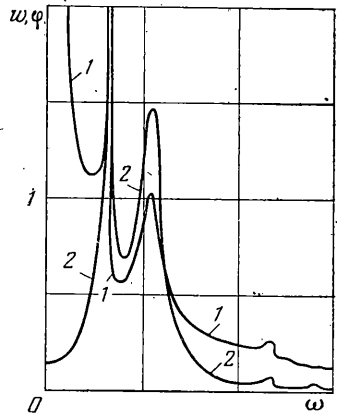
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

C/n^2 ($j=0, n \geq 1$), $C/(nj)^2$ ($n, j \geq 1$) (C — некоторая постоянная, не зависящая от n и j).

Производя в системе (3.2) подстановку $A_{qj} = A_{qj}^{(1)} / (g_{qqjj}/\omega^2 + M\pi^2\mu_j/2)^{1/2}$ и деля левые и правые части rn -й строки на $(g_{rrnn}/\omega^2 + M\pi^2\mu_n/2)^{1/2}$, приходим к системе

$$\sum_{q=1}^{l_{kx}} \sum_{j=0}^{\infty} (\delta_{rq}\delta_{nj} + B_{rqnj}^{(1)}) A_{qj}^{(1)} = \delta_{n0}d_0 \frac{P_{r01}^{(1)}}{\pi a_0 \omega^2} + \delta_{n1}2d_1 \frac{M_{r01}^{(1)}}{\pi a_0^2 \omega^2} \quad (r=1, l_{kx}; n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3.10)$$

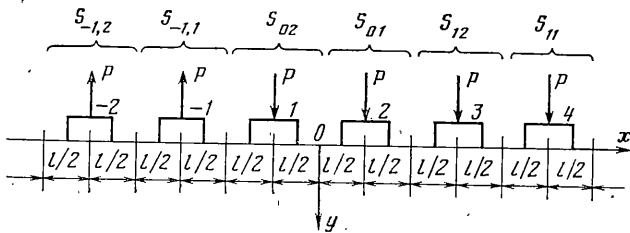
$$|B_{rqnj}^{(1)}| \leq \frac{C}{j^{1/2}} \quad (n=0, j \geq 1), \quad \frac{C}{n^{1/2}} \quad (j=0, n \geq 1), \quad \frac{C}{(jn)^{1/2}} \quad (n, j \geq 1) \quad (3.11)$$

Из неравенств (3.11) вытекает, что система (3.10) является нормальной системой [14], а значит, и она, и система (3.2) решаются при помощи редукции.

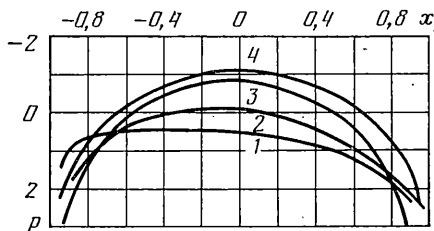
Рассмотрим далее ряд примеров.

1. *Периодическая контактная задача* ($d=l/2$) (фиг. 2). На штампы действуют одинаковые вертикальные гармонические силы $P_{mn} = \pi a_0 \cos \omega t$, $M_{mn}(t) = 0$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $n=1, 2$). В этом случае нагрузка инвариантна относительно преобразований симметрии, т. е. преобразуется по одномерному представлению при $k=0, \kappa=1$. Используем приведенный выше алгоритм и отделим в решении вещественную часть.

На фиг. 3 приведены графики зависимости амплитудных значений реакции основания под штампом от круговой частоты ω . Кривые соответствуют $\beta=0,524$, $l=4$, $d=2$ и различным значениям параметра d_0 . Кривая 1 соответствует $d_0=100$, кривая 2 — $d_0=25$, кривая 3 — $d_0=10$. Отметим, что с увеличением массы штампа параметр d_0 убывает. На графиках заметна общая закономерность уменьшения амплитудных значений реакции с увеличением частоты и массы штампа, на которую накладываются резонансные «горбы» и антирезонансные «впадины». Последние соответствуют резонансным частотам $\omega_k = 2Tk/\eta_1$ ($k=1, 2, 3, \dots$) полуплоскости. Так, при



Фиг. 7



Фиг. 8

$\omega = \omega_1$ наблюдается чистый антирезонанс — главный вектор реактивных сил основания обращается в нуль, но контактные напряжения нулю не равны — они самоуравновешены (фиг. 4, кривая 4).

На фиг. 4 приведены эпюры амплитудных контактных напряжений при $d_0 = 25$ для некоторых значений ω , позволяющие проследить за эволюцией этих эпюр при изменении частоты в интервале $0 < \omega \leq 2,75$. Кривым 1–7 соответствуют $\omega = 0,01; 1,0; 1,25; 1,5; 1,55; 2,0; 2,75$. Эпюры построены таким образом, что им соответствуют положительные значения суммарной реакции.

На фиг. 5 изображены кривые, характеризующие изменение амплитудных перемещений штампа в зависимости от частоты для тех же значений d_0 , что и на фиг. 3. На этих графиках также можно заметить резонансные горбы и антирезонансные впадины, которые сглаживаются с увеличением массы штампа. Видна также тенденция к уменьшению амплитудных перемещений штампа с увеличением частоты.

2. Периодическая контактная задача с попарно расположенными штампами ($d \neq l/2$). На фиг. 6 построены кривые зависимости амплитудных значений линейных (1) и угловых (2) перемещений основного штампа от ω для $d_0 = 25, d_1 = 10, l = 4$ и $d = 1,5$. Появление дополнительных резонансов по сравнению с предыдущей задачей связано с возникновением вращательных колебаний штампа.

Отметим, что функции, графики которых приведены на фиг. 3, 5 и 6 принимают всюду конечные значения, за исключением амплитудных линейных перемещений штампа при $\omega = 0$.

3. На периодическую систему штампов, расположенную на границе однородной упругой полуплоскости, действуют гармонические силы $P_{mn}(t) = P \cos \omega t$ ($m \geq 0, n = -1, 2$), $P_{mn}(t) = -P \cos \omega t$ ($m < 0, n = 1, 2$), $P = \alpha a_0$ (фиг. 7). Функция $f(x) = P \operatorname{sign} m$ ($x \in S_{mn}, m \neq 0$), $f(x_{0n}) = P$ ($n = 1, 2$), заданная на множестве с группой симметрии C_{1h}^1 , методом, изложенным в [10], на обобщенно-симметрические составляющие не раскладывается. Используя методику, предложенную в п. 1, получаем для коэффициентов в формуле (1.11) следующие выражения:

$$F_1^{(11)} = 2, F_1^{(22)} = 2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \quad (\alpha = \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}).$$

$$F_1^{(21)} = F_1^{(22)} = F_2^{(pq)} = 0 \quad (p, q = 1, 2).$$

Далее проводим численное интегрирование в формуле (1.11), записанной для контактных напряжений, в которой вместо $\theta_{pq}(x, \mathbf{k})$ ($p, q = 1, l_{kk}$) подставлены напряжения, вызванные этими нагрузками. Для этого определяем их для конечного числа значений параметра $\alpha \in (0, \pi)$ с помощью описанного выше алгоритма.

На фиг. 8 показаны эпюры контактных напряжений, соответствующие амплитудным значениям главного вектора, под первым (1), пятым (2) и десятым (3) штампами (см. нумерацию штампов на фиг. 7). Легко видеть, что с увеличением номера распределение напряжений под штампом приближается к эпюре напряжений для периодической задачи (4) при тех же значениях параметров: $l = 4, d = 2, d_0 = 25, d_1 = 10, \omega = 1,5$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шгаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М: Гостехиздат, 1949. 270 с.
2. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками. — ПММ, 1969, т. 33, вып. 5, с. 813–843.

3. Морарь Г. А., Попов Г. Я. К периодической контактной задаче для полуплоскости с упругими накладками.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 1, с. 172–178.
4. Попов Г. Я. По поводу одной плоской контактной задачи для упругой полуплоскости.— Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 4, с. 153–157.
5. Нахмейн Е. Л., Нуллер В. М. Об одном методе решения контактных периодических задач для упругой полосы и кольца.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 3, с. 53–61.
6. Фомин В. М. Периодическая контактная задача для одного класса линейно-деформируемых упругих тел.— Прикл. механика, 1978, т. 14, № 7, с. 116–120.
7. Александров В. М., Коваленко В. Е. Периодические контактные задачи для упругой полосы.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1977, т. 30, № 4, с. 18–33.
8. Любарский Г. Я. Теория групп и ее применение в физике. М.: Физматгиз, 1958. 354 с.
9. Каплан И. Г. Симметрия многоэлектронных систем. М.: Наука, 1969. 407 с.
10. Бурьшкин М. Л. Разложение вектор-функции, определенной в области с пространственной группой симметрии в трансляционно-усеченном случае.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 7, с. 582–586.
11. Бурьшкин М. Л. Общая схема решения неоднородных линейных задач для симметричных механических систем.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 5, с. 849–861.
12. Сеймов В. М. Динамические контактные задачи. Киев: Наук. думка, 1976. 283 с.
13. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 283 с.
14. Каган В. Ф. Основания теории определителей. Одесса: Гос. изд-во Украины, 1922. 521 с.
15. Фомин В. М. Нестационарная динамическая периодическая контактная задача для однородной упругой полуплоскости.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 2, с. 315–323.

Одесса

Поступила в редакцию
3.X.1984