МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1987

УДК 531.383

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ПРИВОДИМОСТИ К НЕКОТОРЫМ ЗАДАЧАМ ДИНАМИКИ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ

КАЛЕНОВА В. И., МОРОЗОВ В. М.

Рассматриваются методические вопросы приводимости нестационарных линейных систем к стационарным. Предлагается конструктивный способ преобразования к стационарным системам нестационарных систем, описывающих поведение некоторых гироскопических систем: гировертикали с вращающимися сосудами, пространственного гирогоризонткомпаса, неавтономного гиростата.

Дается геометрическая интерпретация систем, интегрируемых в замкнутой форме, применительно к задаче интегрирования кинематических уравнений.

1. Различные свойства решений линейных систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами исследованы многими авторами. Трудности изучения таких систем известны. Фундаментальная матрица линейной нестационарной системы в общем случае не может быть найдена в замкнутой форме, поэтому для построения приближенных решений линейных нестационарных систем представляет интерес выделение классов систем, интегрируемых в замкнутой форме, а также систем, приводящихся к стационарным при помощи преобразования, которое может быть конструктивно построено. Рассмотрим линейную нестационарную систему

$$X^{\boldsymbol{\cdot}}=A(t)X \tag{1.1}$$

Здесь X — n-мерный вектор состояния системы, $A(t)$ — матрица размерности $n\times n$, элементы которой — непрерывно дифференцируемые функции времени t.

Известно, что в ряде случаев [1, 2] фундаментальная матрица системы может быть найдена в явном виде по элементам матрицы $A(t)$, в частности, когда $A(t)$ принадлежит одному из следующих классов: 1) $A(t)=A=\mathrm{const}$; 2) $A(t)$ — диагональная; 3) $A(t)$ — треугольная; 4) $A(t)$ удовлетворяет условию

$$\int A(\tau)\,d\tau A(t)=A(t)\int A(\tau)\,d\tau \tag{1.2}$$

Для выполнения условия (1.2) необходимо и достаточно [3], чтобы матрица $A(t)$ представлялась в виде

$$A(t)=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k(t)A_k \tag{1.3}$$

где $\alpha_k(t)$ — линейно независимые скалярные функции, а матрицы $A_k=\mathrm{const}$ попарно коммутативны $A_kA_j=A_jA_k$ (k, $j=1, 2\ldots m$); 5) $A(t)$ удовлетворяет уравнению

$$d(A(t)/\psi(t))/dt=A_1A(t)-A(t)A_1 \tag{1.4}$$

в котором $A_1=\mathrm{const}$, $\psi(t)$ — некоторая скалярная функция, $\psi(t)\neq0\ \forall t$.

Если матрица $A(t)$ удовлетворяет условиям (1.2), (1.3), фундаментальная матрица системы (1.1) имеет вид [4]:

$$\Phi(t)=\exp\left[\int_0^t A(\tau)\,d\tau\right]=\prod_{k=1}^{m}\exp[A_k\beta_k(t)]$$

$$\beta_k(t)=\int_0^t \alpha_k(\tau)\,d\tau \qquad (k=1,2,\ldots,m) \tag{1.5}$$

Если выполняются условия (1.4), то при помощи преобразования координат и времени

$$X=\exp[A_1g(t)]Y, \qquad \tau=g(t)=\int_0^t \psi(\tau_1)\,d\tau_1 \tag{1.6}$$

система (1.1) приводится к следующей стационарной системе:

$$dY/d\tau=A_2Y, \qquad A_2=\lim_{t\to 0}\,(A(t)/\psi(t))-A_1 \tag{1.7}$$

6) Матрица $A(t)$ представляется в виде суммы матриц $A_i(t)$ [2]:

$$A(t)=\sum_{i=1}^{m}A_i(t) \tag{1.8}$$

таких, что можно построить матрицы

$$F_i(t)=T_{i-1}^{-1}A_i(t)\,T_{i-1}(t) \qquad (i=1,2,\ldots,m) \tag{1.9}$$

$$T_0(t)=E, \quad T_i(t)=\Phi_i(t)T_{i-1}(t) \quad (i=1,\ 2,\ldots,m)$$

причем $\Phi_i(t)$ — решение уравнения $\Phi_i^{\bullet}=F_i(t)\Phi_i$ ($\Phi_i(0)=E$).

Если построенные таким образом матрицы $F_i(t)$ относятся к одному из перечисленных выше классов 1)—5), то система (1.1) с матрицей $A(t)$, удовлетворяющей условиям (1.8), (1.9), также относится к классу систем, интегрируемых в замкнутой форме. Фундаментальная матрица системы (1.1) в этом случае представляется в виде

$$\Phi(t)=\prod_{i=1}^{m}\Phi_i(t) \tag{1.10}$$

2. Рассмотрим некоторые задачи теории гироскопических систем с использованием п. 1.

1. Уравнения возмущенного движения пространственного гирогоризонткомпаса имеют вид [5]:

$$X^{\bullet}=A(t)X \tag{2.1}$$

$$A(t)=\begin{Vmatrix} 0 & \nu & 0 & \Omega(t)\\ -\nu & 0 & \Omega(t) & 0\\ 0 & -\Omega(t) & 0 & -\nu\\ -\Omega(t) & 0 & \nu & 0 \end{Vmatrix}$$

Здесь X_i ($i=1,\ 2,\ 3,\ 4$) — компоненты вектора X, причем $X_1=$ $=V(t)\alpha/\sqrt{gR}$, $X_2=\beta$, $X_3=\gamma$, $X_4=2B\sin\varepsilon_0\delta/ml\sqrt{gR}$, $V(t)$ — величина абсолютной скорости точки подвеса, $\Omega(t)$ — проекция абсолютной угловой скорости чувствительного элемента гирокомпаса на геоцентрическую вертикаль места, $\nu=\sqrt{g/R}$, $2B\cos\varepsilon_0=mlV$, B, m, l, ε_0 — параметры конструкции гирокомпаса, α, β, γ, δ — углы, определяющие ориентацию осей чувствительного элемента в некоторой неподвижной системе координат.

Нетрудно показать, что матрица $A(t)$ системы (2.1) удовлетворяет условию (1.2) и может быть представлена в виде (1.3) ($\alpha_1=1$, $\alpha_2(t)=$

$=\Omega(t)$):

$$A_1=\begin{Vmatrix} B_1 & 0_2 \\ 0_2 & -B_1 \end{Vmatrix}, \quad A_2=\begin{Vmatrix} 0_2 & B_2 \\ -B_2 & 0_2 \end{Vmatrix}$$

$$B_1=\begin{Vmatrix} 0 & \nu \\ -\nu & 0 \end{Vmatrix}, \quad B_2=\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A_1A_2=A_2A_1$$

где 0_2 — нулевая матрица размерности 2×2. Тогда замена переменных

$$X=\exp\left[A_2\int_0^t \Omega(\tau)\,d\tau\right]Y \tag{2.2}$$

приводит систему (2.1) к стационарной системе

$$Y^\bullet=A_1Y \tag{2.3}$$

Фундаментальная матрица исходной системы (2.1) может быть вычислена, согласно (1.5), по формуле

$$\Phi(t)=\exp[A_1t]\exp\left[A_2\int_0^t \Omega(\tau)\,d\tau\right]$$

В [6, 7] (см. также [8]) рассмотрена приводимость системы (2.1) к стационарной системе (2.3). Путем непосредственного интегрирования системы (2.1) в [7] определена замена переменных $X=TY$, осуществляющая преобразование системы (2.1) в систему (2.3).

Отметим также, что уравнения движения двухгироскопической вертикали [5, 7] аналогичны уравнениям (2.1). Матрица этой системы также удовлетворяет условию (1.2) и замена переменных типа (2.2) приводит ее к виду (2.3).

2. Уравнения движения гировертикали, корректируемой при помощи вращающихся сосудов, имеют вид [9]:

$$X^\bullet=A(t)X \tag{2.4}$$

$$A(t)=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & c\sin\omega t \\ 0 & 0 & c\cos\omega t \\ -b\cos\omega t & -b\sin\omega t & -b \end{Vmatrix}$$

Здесь b, c — постоянные параметры системы, ω — скорость вращения платформы с установленными на ней сосудами. Матрица $A(t)$ системы (2.4) удовлетворяет уравнению (1.4) (при $\psi(t)\equiv1$) с матрицей $A_1=\|\alpha_{ij}\|$: $\alpha_{ij}=0$, за исключением $\alpha_{12}=-\omega$, $\alpha_{21}=\omega$. Замена переменных вида (1.6) $X=\exp[A_1t]Y$ приводит систему (2.4) к стационарной системе вида (1.7), в которой

$$A_2=\begin{Vmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & -c \\ -b & 0 & -b \end{Vmatrix}$$

Фундаментальная матрица решений системы (2.4) может быть построена по формуле

$$X=\exp(A_1t)\exp(A_2t)=T_1T_2 \tag{2.5}$$

Матрица T_1, очевидно, есть матрица поворота вида

$$T_1=\begin{Vmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Характеристическое уравнение матрицы A_2 имеет вид

$$\lambda^3+b\lambda^2+\omega^2\lambda+\omega^2b-b\omega c=0 \tag{2.6}$$

При заданных числовых значениях параметров системы b, c, ω построение матрицы $T_2=\exp(A_2t)$ и нахождение точного решения системы уравнений (2.4) не представляет труда.

В [9] найдены лишь приближенные решения системы (2.4) в предположении, что скорость прецессии гироскопа мала по сравнению со скоростью перетекания жидкости $X_3^{\boldsymbol{\cdot}}$. Приближенные значения корней уравнения (2.6) при выполнении условий $b<\omega$, $c<\omega$ имеют вид

$$\lambda_1=-b+\frac{bc}{\omega}+\ldots,\qquad \lambda_2=-\frac{bc}{2\omega}\pm i\omega\left(1-\frac{b^2c}{2\omega^3}\right)+\ldots$$

Эти выражения соответствуют приближенным решениям системы (2.4), указанным в [9].

3. В [10] рассматривается нестационарная система, описывающая возмущенное движение неавтономного гиростата в линейном приближении

$$X^{\boldsymbol{\cdot}}=A(t)\,X,\quad A(t)=\begin{Vmatrix}0 & r-\beta & -mq\\ -(r-\beta) & 0 & mp\\ lq & -lp & 0\end{Vmatrix}\tag{2.7}$$

Здесь m, l, β — постоянные параметры системы, p, q, r — заданные функции времени: $p=C_1\cos\varphi+C_2\sin\varphi$, $q=-C_1\sin\varphi+C_2\cos\varphi$, $r=\delta+f(t)$, C_1, C_2, δ — постоянные величины, $f(t)$ — произвольная функция времени $\varphi(t)=\int f(\tau)d\tau$, $\tau\in[0,t]$.

Система (2.7) относится к указанному в п. 1 классу систем, интегрируемых в замкнутой форме.

Представим матрицу $A(t)$ в виде (1.8):

$$A(t)=A_1(t)+A_2(t)$$

$$A_1=\begin{Vmatrix}0 & f(t) & 0\\ -f(t) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{Vmatrix},\quad A_2=\begin{Vmatrix}0 & n & -mq\\ -n & 0 & mp\\ lq & -lp & 0\end{Vmatrix}$$

$$n=\delta-\beta$$

Согласно процедуре построения фундаментальной матрицы (1.9), (1.10), построим матрицы

$$F_1=A_1,\qquad \Phi_1=\exp\left[\int_0^t A_1(\tau)\,d\tau\right]$$

$$T_1=\Phi_1(t),\quad F_2=T_1^{-1}A_2T_1,\quad \Phi_2^{\boldsymbol{\cdot}}=F_2\Phi_2$$

Матрица Φ_1 имеет вид

$$\Phi_1=\begin{Vmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}$$

Тогда

$$F_2=\begin{Vmatrix}0 & n & -mC_2\\ -n & 0 & mC_1\\ lC_2 & -lC_1 & 0\end{Vmatrix}$$

Фундаментальная матрица системы (2.7) вычисляется по формуле (1.10)

$$\Phi=\Phi_1\Phi_2=\exp\left[\int_0^t A_1(\tau)\,d\tau\right]\exp(F_2t)$$

Заметим, что преобразование

$$X=T_1(t)\,Y\tag{2.8}$$

приводит систему (2.7) к стационарному виду

$$Y^{\boldsymbol{\cdot}}=F_2Y\tag{2.9}$$

Преобразование (2.8) является преобразованием Ляпунова, поэтому задача об устойчивости системы (2.7) эквивалентна задаче об устойчивости системы (2.9).

В [10] приведено преобразование, отличное от (2.8), которое приводит исходную систему к другой стационарной системе. Однако следует отметить, что способ получения указанного преобразования в [10] не обсуждается.

Таким образом, рассмотренные примеры демонстрируют эффективность применения регулярной методики приведения нестационарных систем к стационарным в задачах динамики гироскопических систем.

Заметим, что все преобразования типа преобразований поворота (переход во вращающуюся систему координат) являются частными случаями рассмотренных в п. 1 преобразований. Применяя указанные математические операции, можно установить приводимость исходной системы, не вдаваясь в механическую сущность задачи, а затем дать механическую интерпретацию полученного результата.

3. Классификация систем, интегрируемых в замкнутой форме, применительно к задаче интегрирования кинематических уравнений допускает достаточно прозрачную геометрическую интерпретацию. Рассмотрим линейную систему

$$X^{\bullet}=\omega^{\vee}(t)X \tag{3.1}$$

$$\omega^{\vee}=\begin{Vmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{Vmatrix}$$

в которой $X=\|X_1X_2X_3\|^T$ — вектор направляющих косинусов некоторой оси подвижной системы координат $OXYZ$, вращающейся с угловой скоростью $\omega(t)=\|\omega_1\omega_2\omega_3\|^T$ относительно системы координат $o\xi\eta\zeta$. Матрица ориентации $A_{X\xi}$ трехгранника $OXYZ$ относительно трехгранника $o\xi\eta\zeta$, как известно, удовлетворяет уравнению

$$A_{X\xi}{}^{\bullet}=\omega^{\vee}(t)A_{X\xi} \tag{3.2}$$

Пусть вектор $\boldsymbol{\omega}(t)$ сохраняет неизменное направление $\boldsymbol{\omega}^0$ в системе координат $o\xi\eta\zeta$: $\boldsymbol{\omega}(t)=\varphi(t)\boldsymbol{\omega}^0$, $\varphi(t)$ — скалярная функция, $|\boldsymbol{\omega}^0|=1$. Нетрудно показать, что при этом матрица $\omega^{\vee}(t)$ систем (3.1), (3.2) удовлетворяет условию (1.2). Тогда решение системы (3.1) представляется в виде (1.5). Заметим, что этот результат легко получить непосредственно из системы (3.2) путем замены времени $\tau=\int\varphi(\tau_1)d\tau_1$ $(t_0\leqslant\tau_1\leqslant t)$ и интегрирования системы $dA_{X\xi}{}^0/d\tau=\omega^{\vee 0}A_{X\xi}{}^0$. Пусть вектор $\boldsymbol{\omega}(t)$ представляется в виде

$$\boldsymbol{\omega}(t)=\psi(t)\boldsymbol{\omega}^*(t) \tag{3.3}$$

причем $\psi(t)$ — некоторая скалярная функция, а вектор $\omega^*(t)$ подчиняется уравнению (матрица $b^{\vee}$ соответствует постоянному вектору $\mathbf{b}$):

$$\omega^{*\bullet}=b^{\vee}\omega^* \tag{3.4}$$

Матрица $\omega^{\vee}(t)$ в этом случае удовлетворяет уравнению (1.4) при $A_1=b^{\vee}$. Тогда в соответствии с п. 1 заменой координат и времени (1.6) система (3.1) приводится к виду (1.7), причем $A_2=\lim\omega^{\vee}(t)/\psi(t)-b^{\vee}$.

Фундаментальная матрица системы (3.2) определяется по формуле

$$A_{X\xi}=\exp(b^{\vee}t)\exp[(\omega^{\vee}(0)-b^{\vee})t] \tag{3.5}$$

Для геометрической интерпретации задачи (3.2), (3.3) положим для простоты $\psi(t)=\mathrm{const}$ и введем промежуточную систему координат $OX_1Y_1Z_1$, относительно которой вектор $\boldsymbol{\omega}(t)$ вращается с постоянной угловой скоростью $\mathbf{b}$ $(\omega^{\bullet}=b^{\vee}\omega)$. Тогда матрица ориентации A_{XX_1} трехгранника $OXYZ$ относительно трехгранника $OX_1Y_1Z_1$ имеет вид $A_{XX_1}(t)=\exp(b^{\vee}t)\times A_{XX_1}(0)$.

Трехгранник $OX_1Y_1Z_1$ вращается относительно трехгранника $o\xi\eta\zeta$ с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\omega}(0)-\mathbf{b}$. Матрица ориентации определяется выражением $A_{X_1\xi}=\exp(\Omega^{\vee}t)A_{X_1\xi}(0)$.

Считаем, что в начальный момент $t=0$ трехгранник $OX_1Y_1Z_1$ совпадает с трехгранником $OXYZ$ $(A_{XX_1}(0)=E)$. Тогда матрица ориентации трехгранника $OXYZ$ относительно трехгранника $o\xi\eta\zeta$ вычисляется по формуле

$$A_{X\xi}=A_{XX_1}A_{X_1\xi}=\exp(b^{\vee}t)\exp(\Omega^{\vee}t)A_{X\xi}(0) \tag{3.6}$$

что совпадает с формулой (3.5). Пусть вектор $\boldsymbol{\omega}(t)$ представляется в виде

$$\boldsymbol{\omega}=\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{\omega}^{(i)}(t) \tag{3.7}$$

так, что матрица $\omega^{\vee}(t)$ удовлетворяет условиям (1.8) и (1.9). Тогда фундаментальная матрица системы (3.2) вычисляется по формуле (1.10).

Нетрудно показать, что этот случай интегрируемости кинематических уравнений может геометрически интерпретировать следующая [11]

Теорема. Чтобы система (3.2) допускала решение в замкнутой форме, необходимо и достаточно, чтобы вектор мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$ мог быть задан в форме

$$\boldsymbol{\omega}(t)=\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{\omega}^{(i)}(t)$$

в которой $\boldsymbol{\omega}^{(1)}(t)$ — мгновенная угловая скорость системы $OX_1Y_1Z_1$ по отношению к системе $o\xi\eta\zeta$, причем $\boldsymbol{\omega}^{(1)}$ имеет неизменное направление в системе $o\xi\eta\zeta(\boldsymbol{\omega}^{(1)}=\varphi(t)\boldsymbol{\omega}^{(0)})$; вектор $\boldsymbol{\omega}^{(i)}(t)$ имеет неизменное направление в системе $OX_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$ и является мгновенной угловой скоростью системы $OX_iY_iZ_i$ относительно системы $OX_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$ ($i=2, 3,\dots m$), при этом $OX_mY_mZ_m$ совпадает с системой $OXYZ$.

При выполнении условий этой теоремы матрица ориентации системы координат $OXYZ$ относительно системы $o\xi\eta\zeta$ определяется по формуле

$$A_{X\xi}(t)=A_m(t)\dots A_2(t)A_1(t) \tag{3.8}$$

$$A_k(t)=\exp\left[\int_0^t\varphi_k(\tau)\,d\tau\,\omega^{\vee(k)}\right]A_k(0)\qquad(k=1,2,\dots,m)$$

что соответствует (1.10).

Покажем, что случаи интегрируемости системы (3.2) при условии (3.4) можно геометрически интерпретировать при помощи приведенной теоремы.

Сопоставляя выражение (3.6) с формулой (3.8), получим (при $m=2$), что если $\varphi_k(t)=\text{const}$, $A_2(0)=E$, $A_1(0)=A_{X\xi}(0)$, то выражения (3.6) и (3.8) совпадают. Это означает, что в данном случае (матрица $\omega^{\vee}(t)$ удовлетворяет условию (1.3)) вектор $\boldsymbol{\omega}(t)$ представим в виде суммы двух слагаемых

$$\boldsymbol{\omega}(t)=\boldsymbol{\omega}^{(1)}(t)+\boldsymbol{\omega}^{(2)}(t) \tag{3.9}$$

причем $\boldsymbol{\omega}^{(1)}(t)=\boldsymbol{\Omega}$ — вектор, постоянный в системе $OX_1Y_1Z_1$, вектор $\boldsymbol{\omega}^{(2)}(t)$ по условию теоремы постоянен в системе координат $OXYZ$: $\boldsymbol{\omega}^{(2)}_{X}=\mathbf{b}$. В проекциях на оси трехгранника $OXYZ$ соотношение (3.9) имеет вид $\omega(t)=b+A_{XX_1}\Omega=b+\exp(b^{\vee}t)\Omega=b+\exp(b^{\vee}t)(\omega(0)-b)=\exp(b^{\vee}t)\omega(0)$, что согласуется с уравнением (3.4).

Равенство (3.9) показывает, что вектор $\boldsymbol{\omega}(t)$, удовлетворяющий уравнению (3.4), может быть представлен в виде суммы двух векторов $\mathbf{b}$ и $\boldsymbol{\Omega}$, каждый из которых является постоянным в определенной системе координат.

Пример. Пусть вектор $\boldsymbol{\omega}(t)$ задан в виде

$$\omega(t)=\|-b\sin\nu t,\ b\cos\nu t,\ a\|^{T}\quad(b=\text{const},\ a=\text{const})$$

Матрица $\omega^{\vee}(t)$ удовлетворяет уравнению (1.4) при $\psi(t)=1$ и

$$A_1=\begin{Vmatrix}0&-\nu&0\\ \nu&0&0\\ 0&0&0\end{Vmatrix}$$

Система (3.1) в этом случае имеет решение

$$X = \exp(A_1 t) \exp(A_2 t) X_0$$

$$A_2 = \omega^{\vee}(0) - A_1 = \begin{Vmatrix} 0 & a+\nu & -b \\ -(a+\nu) & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Полученные результаты, очевидно, распространяются на кинематические уравнения, записанные в параметрах Родрига — Гамильтона.

При исследовании различных задач динамики твердого тела рассмотренные случаи интегрируемости кинематических уравнений могут оказаться полезными, так как позволяют, формально следуя процедурам п. 1°, находить фундаментальную матрицу для достаточно сложных нестационарных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Еругин Н. П.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами. Минск: Изд-во АН БССР, 1963. 272 с.
2. *Wu M.-Y.* A successive decomposition method for the solution of linear time-varying systems.— Intern. J. Control, 1981, v. 33, No. 1, p. 181–186.
3. *Морозов В. В.* О коммутативных матрицах.— Учен. зап. Казан. ун-та, 1952, т. 112, кн. 9, с. 17–20.
4. *Wu M.-Y.* Transformation of a linear time-varying system into a linear time-invariant system.— Intern. J. Control, 1978, v. 27, No. 4, p. 589–602.
5. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
6. *Кошляков В. Н.* О приводимости уравнений движения гирогоризонткомпаса.— ПММ, 1961, т. 25, вып. 5, с. 801–805.
7. *Ляшенко В. Ф.* О приводимости уравнений движения гирогоризонткомпаса и двухгироскопической вертикали.— ПММ, 1962, т. 26, вып. 2, с. 369–372.
8. *Кошляков В. Н.* Теория гироскопических компасов. М.: Наука, 1972. 344 с.
9. *Ройтенберг Я. Н.* Гироскопы. М.: Наука, 1966. 399 с.
10. *Дружинин Э. И.* Об устойчивости движения неавтономного гиростата.— Укр. мат. ж., 1972, т. 24, № 6, с. 744–751.
11. *Зубов В. И.* Аналитическая динамика гироскопических систем. Л.: Судостроение, 1970. 317 с.

Москва

Поступила в редакцию
5.V.1985