

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ
С ТОНКИМ УПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

МОВЧАН А. Б., НАЗАРОВ С. А.

Исследованию деформации упругого тела, содержащего инородное включение в случае, когда один из его характерных размеров много меньше остальных, посвящено большое количество публикаций (см. [1-6] и имеющуюся там библиографию). Ставший уже классическим метод изучения подобных задач сводится к замене включения поверхностью, на которой заданы скачки смещений и напряжений. В публикуемой работе рассматривается плоская деформация области с тонким включением конечных размеров, когда отношение ширины включения к его длине характеризуется малым безразмерным параметром ε . Кроме того, предполагается, что отношение модулей Юнга включения и матрицы имеет порядок $O(1)$ по сравнению с ε . Приводится математически строгий анализ асимптотики (по ε) напряженно-деформированного состояния составного тела. Основное внимание уделяется исследованию поведения решения вблизи кромок включения, где возникает явление пограничного слоя.

1. Постановка задачи. Пусть Ω — подобласть \mathbb{R}^2 , содержащая отрезок $M = \{x : x_2 = 0, |x_1| \leq a\}$, и $h_{\pm}(t) = (a^2 - t^2)^{1/2} h_{\pm}^{\circ}(t)$, где $h_{\pm}^{\circ}(t)$ — гладкие (класса C^{∞}) функции на отрезке $[-a, a]$. Будем считать, что значения функций h_{\pm}° в концах этого отрезка совпадают, т. е. $h_{+}^{\circ}(\pm a) = h_{-}^{\circ}(\pm a) = b_{\pm}$. Введем зависящие от малого безразмерного положительного параметра ε области $G_{\varepsilon} = \{x : |x_1| < a, -\varepsilon h_{-}(x_1) < x_2 < \varepsilon h_{+}(x_1)\}$ и $\Omega_{\varepsilon} = \Omega \setminus G_{\varepsilon}$ (фиг. 1). Отметим, что в крайних точках $O_{\pm} = (\pm a, 0)$ контур ∂G_{ε} имеет малые радиусы кривизны $a\varepsilon^2 b_{\pm}$.

Предположим, что область Ω_{ε} заполнена материалом с константами Ламе λ и μ , а область G_{ε} — материалом с константами λ_* и μ_* . Будем считать, что отношение E_*/E модулей Юнга включения и матрицы много больше ε и много меньше ε^{-1} , т. е. жесткость включения сравнима с жесткостью матрицы.

Рассмотрим задачу о деформации области Ω с тонким включением G_{ε} под действием самоуравновешенной внешней нагрузки $\mathbf{p}(x)$. Вектор \mathbf{u} смещений удовлетворяет системе уравнений Ламе

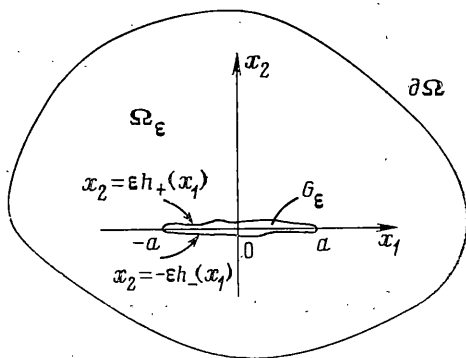
$$\mu \Delta \mathbf{u}(\varepsilon, x) + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u}(\varepsilon, x) = 0, \quad x \in \Omega_{\varepsilon} \quad (1.1)$$

$$\mu_* \Delta \mathbf{u}_*(\varepsilon, x) + (\lambda_* + \mu_*) \text{grad div } \mathbf{u}_*(\varepsilon, x) = 0, \quad x \in G_{\varepsilon} \quad (1.2)$$

с краевыми условиями и условиями на линии ∂G_{ε} контакта

$$\sigma^{(n)}(u; \varepsilon, x) = \mathbf{p}(x), \quad x \in \partial \Omega \quad (1.3)$$

$$\mathbf{u}_*(\varepsilon, x) = \mathbf{u}(\varepsilon, x), \quad \sigma_*^{(n)}(u_*; \varepsilon, x) = \sigma^{(n)}(u; \varepsilon, x), \quad x \in \partial G_{\varepsilon} \quad (1.4)$$



Фиг. 1

В (1.1) и (1.4) звездочкой отмечены величины, отвечающие включению, \mathbf{n} — внешняя нормаль, $\boldsymbol{\sigma}^{(n)}$ — вектор напряжений. Далее будет использоваться также обозначение $\boldsymbol{\sigma}^{(j)} = (\sigma_{j1}, \sigma_{j2})$ ($j=1, 2$).

2. Первые члены асимптотики. Следуя [7, 8], введем переменную $\xi = (2x_2 + \varepsilon(h_-(x_1) - h_+(x_1)))/(2\varepsilon H(x_1))$, где $H(x_1) = h_+(x_1) + h_-(x_1)$ — приведенная толщина включения.

Асимптотику смещений u_* в тонкой области G_ε вдали от ее кромок (вне окрестностей точек O_\pm) будем искать в виде ряда

$$u_*(\varepsilon, x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w^{(k)}(x_1, \xi) \quad (2.1)$$

Справедливы равенства

$$\begin{aligned} \partial_1 W(x_1, \xi) &= \partial_1 W(x_1, \xi) + \{[h_-'(x_1) - h_+'(x_1)]/(2H(x_1)) - \\ &- \xi H'(x_1)/H(x_1)\} \partial_\xi W(x_1, \xi), \quad \partial_2 W(x_1, \xi) = [\varepsilon H(x_1)]^{-1} \partial_\xi W(x_1, \xi) \end{aligned}$$

Здесь и далее используются обозначения $\partial_j W = \partial W / \partial x_j$, $\partial_\xi W = \partial W / \partial \xi$. Поэтому

$$L_* (\partial / \partial x) w^{(0)}(x, \xi) = [\varepsilon H(x_1)]^{-2} Q_* \partial_\xi^2 w^{(0)}(x_1, \xi) + O(\varepsilon^{-1}) \quad (2.2)$$

где L_* — матричный оператор из (1.2), $Q_* = \text{diag}(\mu_*, 2\mu_* + \lambda_*)$. Значит, в силу (1.2) $w^{(0)}$ — линейная функция.

Вектор нормали \mathbf{n} к ∂G_ε при $\pm x_2 > 0$ равен $(1 + \varepsilon^2 h_\pm'(x_1)^2)^{-1/2} (-\varepsilon h_\pm'(x_1), \pm 1)$. Поэтому при $x_2 = \pm \varepsilon h_\pm(x_1)$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\mathbf{u}; \varepsilon, x) &= \pm \boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{u}; \varepsilon, x) - \varepsilon h_\pm'(x_1) \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{u}; \varepsilon, x) \mp \\ &\mp 1/2 \varepsilon^2 h_\pm'(x_1)^2 \boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{u}; \varepsilon, x) + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Подставим ряд (2.1) в условия сопряжения (1.4). Воспользовавшись соотношениями (2.3), имеем

$$\mathbf{u}(\varepsilon, x_1, \pm \varepsilon h_\pm(x_1)) = \mathbf{w}^{(0)}(x_1, \pm 1/2) + O(\varepsilon) \quad (2.4)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{u}; \varepsilon, x_1, \pm \varepsilon h_\pm(x_1)) = [\varepsilon H(x_1)]^{-1} Q_* \partial_\xi w^{(0)}(x_1, \pm 1/2) + O(1) \quad (2.5)$$

Таким образом, из (2.5) получим, что $\partial w^{(0)} / \partial \xi = 0$, т. е. вектор $w^{(0)}$ зависит лишь от переменной x_1 .

Рассмотрим второй член асимптотики (2.1). Уточняя с этой целью соотношения (2.2) и (2.5), получаем, что

$$\begin{aligned} L_* (\partial / \partial x) u_*(\varepsilon, x) &= [\varepsilon H(x_1)]^{-2} Q_* \partial_\xi^2 w^{(0)}(x_1, \xi) + \\ &+ \varepsilon^{-1} \{H(x_1)^{-2} Q_* \partial_\xi^2 w^{(1)}(x_1, \xi) + (\lambda_* + \mu_*) (\partial_1 + b(x_1, \xi) \partial_\xi) H(x_1)^{-1} \times \\ &\times J \partial_\xi w^{(0)}(x_1, \xi)\} + O(1), \quad x \in G_\varepsilon \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{u}; \varepsilon, \pm \varepsilon h_\pm(x_1)) &= [\varepsilon H(x_1)]^{-1} Q_* \partial_\xi w^{(0)}(x_1, \pm 1/2) + \\ &+ H(x_1)^{-1} Q_* \partial_\xi w^{(1)}(x_1, \pm 1/2) + \mathbf{B}_* (\partial_1 + b(x_1, \xi) \partial_\xi) w^{(0)}(x_1, \pm 1/2) + \\ &+ O(\varepsilon), \quad |x_1| < a \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $b(x_1, \xi) = (h_-'(x_1) - h_+'(x_1) - 2H'(x_1)\xi)/(2H(x_1))$, \mathbf{B}_* и \mathbf{J} — матрицы с элементами $B_{*11} = B_{*22} = 0$; $B_{*12} = \mu_*$, $B_{*21} = \lambda_*$ и $J_{11} = J_{22} = 0$, $J_{12} = J_{21} = 1$.

Таким образом, для $w^{(1)}$ должны быть выполнены соотношения

$$\begin{aligned} Q_* \partial_\xi^2 w^{(1)}(x_1, \xi) &= O(\varepsilon), \quad \xi \in (-1/2, 1/2) \\ H(x_1)^{-1} Q_* \partial_\xi w^{(1)}(x_1, \pm 1/2) &= -\mathbf{B}_* \partial_1 w^{(0)}(x_1, \pm 1/2) + \\ &+ \boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{u}; \varepsilon, x_1, \pm \varepsilon h_\pm(x_1)) + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Поскольку второе слагаемое в (2.8) не зависит от ξ , вектор $w^{(1)}$, удовлетворяющий (2.8), существует в том и только в том случае, если имеет место равенство

$$\boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{u}; \varepsilon, x_1, \varepsilon h_+(x_1)) = \boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{u}; \varepsilon, x_1, -\varepsilon h_-(x_1)) + O(\varepsilon) \quad (2.9)$$

Будем искать главный член асимптотики вектора \mathbf{u} в матрице Ω_ε в виде $\mathbf{u}(\varepsilon, x) = \mathbf{v}^{(0)}(x) + O(\varepsilon)$, $x \in \Omega_\varepsilon$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ область Ω_ε трансформируется в область $\Omega_0 = \Omega \setminus M$. Ясно, что вектор $\mathbf{v}^{(0)}$ следует подчинить однородным уравнениям Ламе в Ω_0 . Найдем краевые условия для $\mathbf{v}^{(0)}$ на берегах M^\pm отрезка M . С этой целью выделим в соотношениях (2.4), (2.9) члены порядка $O(1)$, отбросив оставшиеся. Тогда получим, что $\mathbf{v}^{(0)}$ удовлетворяет следующим условиям согласования:

$$\mathbf{v}^{(0)}(x_1, +0) = \mathbf{v}^{(0)}(x_1, -0) \quad (2.10)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{v}^{(0)}; x_1, +0) = \boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{v}^{(0)}; x_1, -0), \quad |x_1| < a$$

При этом два первых члена ряда (2.1) будут вычисляться по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{(0)}(x_1, \xi) &= \mathbf{v}^{(0)}(x_1, 0); \quad \mathbf{w}^{(1)}(x_1, \xi) = \mathbf{W}^{(1)}(x_1) + H(x_1)\xi \mathbf{Q}_*^{-1} \times \\ &\times \{ \boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{v}^{(0)}; x_1, 0) - \mathbf{B}_* \partial_1 \mathbf{v}^{(0)}(x_1, 0) \} = \mathbf{W}^{(1)}(x_1) + H(x_1)\xi \{ \mathbf{Q}_*^{-1} \mathbf{Q} \partial_2 \mathbf{v}^{(0)}(x_1, 0) + \\ &+ \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{B} - \mathbf{B}_*) \partial_1 \mathbf{v}^{(0)}(x_1, 0) \} \end{aligned} \quad (2.11)$$

где $\mathbf{W}^{(1)}$ — неизвестный вектор, подлежащий дальнейшему определению; матрицы \mathbf{Q} , \mathbf{B} задаются так же, как и \mathbf{Q}_* , \mathbf{B}_* с заменой λ_* , μ_* на λ , μ .

Итак, поле смещений $\mathbf{v}^{(0)}$ является решением задачи о деформации области Ω (без включения) внешней нагрузкой \mathbf{p} .

3. Второй член асимптотики. Будем искать приближение к \mathbf{u} в Ω_ε в виде

$$\mathbf{u}(\varepsilon, x) = \mathbf{v}^{(0)}(x) + \varepsilon \mathbf{v}^{(1)}(x) + O(\varepsilon^2) \quad (3.1)$$

Как и ранее, $\mathbf{v}^{(1)}$ удовлетворяет однородной системе Ламе в Ω_0 . Из первого уравнения в (1.4), учитывая (2.11) и (3.1), выводим соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(0)}(x_1, 0) + \varepsilon (\pm^{1/2} H(x_1) \mathbf{Q}_*^{-1} (\mathbf{Q} \partial_2 \mathbf{v}^{(0)}(x_1, 0) + (\mathbf{B} - \mathbf{B}_*) \partial_1 \mathbf{v}^{(0)}(x_1, 0)) + \\ + \mathbf{W}^{(1)}(x_1)) + O(\varepsilon^2) = \mathbf{v}^{(0)}(x_1, \pm \varepsilon h_\pm(x_1)) + \varepsilon \mathbf{v}^{(1)}(x_1, \pm \varepsilon h_\pm(x_1)) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

или, что то же

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(0)}(x_1, 0) + \varepsilon (\pm^{1/2} H(x_1) \mathbf{Q}_*^{-1} (\mathbf{Q} \partial_2 \mathbf{v}^{(0)}(x_1, 0) + (\mathbf{B} - \mathbf{B}_*) \partial_1 \mathbf{v}^{(0)}(x_1, 0)) + \\ + \mathbf{W}^{(1)}(x_1)) = \mathbf{v}^{(0)}(x_1, 0) + \varepsilon (\mathbf{v}^{(1)}(x_1, \pm 0) \pm h_\pm(x_1) \partial_2 \mathbf{v}^{(0)}(x_1, \pm 0)) \end{aligned}$$

Отсюда определяются значение неизвестной вектор-функции $\mathbf{W}^{(1)}$ в (2.11) и условия скачка $[\mathbf{v}^{(1)}](x_1) = \mathbf{v}^{(1)}(x_1, +0) - \mathbf{v}^{(1)}(x_1, -0)$ на M :

$$2\mathbf{W}^{(1)}(x_1) = \mathbf{v}^{(1)}(x_1, +0) + \mathbf{v}^{(1)}(x_1, -0) + (h_+(x_1) - h_-(x_1)) \partial_2 \mathbf{v}^{(0)}(x_1, 0) \quad (3.2)$$

$$[\mathbf{v}^{(1)}](x_1) = H(x_1) \{ \mathbf{Q}_*^{-1} (\mathbf{B} - \mathbf{B}_*) \partial_1 \mathbf{v}^{(0)}(x_1, 0) + (\mathbf{Q}_*^{-1} \mathbf{Q} - \mathbf{I}) \partial_2 \mathbf{v}^{(0)}(x_1, 0) \} \quad (3.3)$$

Чтобы вычислить скачок напряжений $\boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{v}^{(1)}, \cdot)$ на отрезке M , найдем коэффициент $\mathbf{w}^{(2)}$ ряда (2.1). С учетом равенств (2.11) и (2.6) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_* (\partial/\partial x) \mathbf{u}_*(\varepsilon, x) = \{ H(x_1)^{-2} \mathbf{Q}_* \partial_\xi^2 \mathbf{w}^{(2)}(x_1, \xi) + \mathbf{Q}^{(1)} \partial_1^2 \mathbf{v}^{(0)}(x_1, 0) + \\ + (\lambda_* + \mu_*) \mathbf{J} \mathbf{Q}_*^{-1} \mathbf{Q}_* \partial_{12}^2 \mathbf{v}^{(0)}(x_1, 0) \} + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{Q}^{(1)} = \text{diag} (2\mu_* + \lambda - \mu_*(\lambda - \lambda_*), (2\mu_* + \lambda_*)^{-1}, \lambda_* \mu_*^{-1} \mu - \lambda_* + \mu)$$

В силу (2.3) и уравнений равновесия получаем соотношения

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\mathbf{v}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{v}^{(1)}; \varepsilon, x_1, \pm \varepsilon h_\pm(x_1)) = \pm \boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{v}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{v}^{(1)}; x_1, \pm 0) + \\ + \varepsilon h_\pm(x_1) \partial_2 \boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{v}^{(0)}; x_1, 0) + O(\varepsilon^2) - \varepsilon h_\pm'(x_1) \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{v}^{(0)}; x_1, \pm 0) + \\ + O(\varepsilon^2) = \pm \boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{v}^{(0)}; x_1, 0) + \varepsilon \{ \pm \boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{v}^{(1)}; x_1, \pm 0) - \\ - \partial_1 (h_\pm(x_1) \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{v}^{(0)}; x_1, 0)) \} + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Аналогичные вычисления приводят к формулам

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_*^{(\xi n)} (\mathbf{w}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{w}^{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{w}^{(2)}; \varepsilon, x_1, \pm \varepsilon h_\pm(x_1)) = \pm (H(x_1))^{-1} \times \\ \times \mathbf{Q}_* \partial_\xi \mathbf{w}^{(1)}(x_1, \pm^{1/2}) + \mathbf{B}_* \partial_1 \mathbf{w}^{(0)}(x_1) + \varepsilon \{ \pm (H(x_1)^{-1} \mathbf{Q}_* \partial_\xi \mathbf{w}^{(2)}(x_1, \pm^{1/2}) + \\ + \mathbf{B}_* (\partial_1 + b(x_1, \pm^{1/2}) \partial_\xi) \mathbf{w}^{(1)}(x_1, \pm^{1/2})) - h_\pm'(x_1) (\mathbf{P}_* \partial_1 \mathbf{w}^{(0)}(x_1) + \end{aligned}$$

$$+H(x_1)^{-1}D_*\partial_\xi w^{(1)}(x_1, \pm^{1/2})\} + O(\varepsilon^2) \quad (3.6)$$

где P_* и D_* — матрицы с элементами $P_{*11}=2\mu_*+\lambda_*$, $P_{*22}=\mu_*$, $P_{*12}=-P_{*21}=0$, $D_{*11}=D_{*22}=0$, $D_{*12}=\lambda_*$, $D_{*21}=\mu_*$.

Выделяя в (3.4) коэффициент при ε^0 и приравнявая коэффициенты при ε^1 из правых частей соотношений (3.5) и (3.6), получаем, что $w^{(2)}$ удовлетворяет краевой задаче для обыкновенного дифференциального (по ξ) уравнения с параметром x_1 :

$$\partial_\xi^2 w^{(2)}(x_1, \xi) = F(x_1), \quad |\xi| < 1/2; \quad \partial_\xi w^{(2)}(x_1, \pm^{1/2}) = F^\pm(x_1) \quad (3.7)$$

Очевидно, что условием разрешимости (3.7) является равенство $F(x_1) = F^+(x_1) - F^-(x_1)$, которое после подстановки выражений для F и F^\pm принимает вид условий скачка напряжений на отрезке M :

$$\begin{aligned} [\sigma_{21}(v^{(1)})](x_1) &= -2\partial_1 \{H(x_1) [\alpha_1 \partial_1 v_1^{(0)}(x_1, 0) + \alpha_2 \partial_2 v_2^{(0)}(x_1, 0)]\} \\ [\sigma_{22}(v^{(1)})](x_1) &= 0, \quad |x_1| < a \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\alpha_j = (2\mu_* + \lambda_*)^{-1} [(\lambda_* - \lambda) \mu_* + (2\delta_{j2} \mu_* + \lambda_*) (\mu_* - \mu)] \quad (j=1, 2)$$

Итак, поле смещений $v^{(1)}$ удовлетворяет однородным уравнениям Ламе в Ω_0 , однородным краевым условиям (1.3) на $\partial\Omega$ и условиям скачка (3.3), (3.8) на отрезке M . Решение $v^{(1)}$ указанной задачи существует, поскольку интегралы по $[-a, a]$ от правых частей соотношений (3.8) равны нулю, т. е. скачок вектора напряжений самоуравновешен.

4. Асимптотика $v^{(1)}$ вблизи концов отрезка M . Поскольку $H(x_1) = O(r_\pm^{1/2})$ при $r_\pm \rightarrow 0$ и $v^{(0)}$ — гладкая в Ω вектор-функция, то для скачков $v^{(1)}$ и $\sigma^{(2)}(v^{(1)}; x)$ вблизи концов $(\pm a, 0)$ отрезка M справедливы представления

$$\begin{aligned} [v^{(1)}](x_1) &= r_\pm^{1/2} \sqrt{2ab_\pm} \{Q_*^{-1}(B - B_*) \partial_1 v^{(0)}(\pm a, 0) + \\ &+ (Q_*^{-1}Q - I) \partial_2 v^{(0)}(\pm a, 0)\} + O(r^{3/2}) \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} [\sigma_{21}(v^{(1)})](x_1) &= -r_\pm^{-1/2} \sqrt{2a} b_\pm \{ \alpha_1 \partial_1 v_1^{(0)}(\pm a, 0) + \\ &+ \alpha_2 \partial_2 v_2^{(0)}(\pm a, 0) \} + O(r^{1/2}), \quad [\sigma_{22}(v^{(1)})](x_1) = 0 \end{aligned}$$

где (r_\pm, θ_\pm) — полярные координаты с центрами $(\pm a, 0)$, такие, что берега M^+ , M^- отрезка M задаются равенствами $\theta_\pm = \pi$, $\theta_\pm = -\pi$ и $r_\pm \leq 2a$.

Наличие корневой особенности скачка напряжений на M приводит к появлению сингулярности в тензоре $\sigma(v^{(1)})$. Действительно, используя результаты [9], получаем следующие представления:

$$v^{(1)}(x) = r_\pm^{1/2} \xi^\pm(\theta_\pm) + V(x) + O(r^{3/2}) \quad (4.2)$$

$$\sigma(v^{(1)}; x) = r_\pm^{-1/2} \Xi^\pm(\theta_\pm) + \sigma(V; x) + O(r^{1/2}) \quad (4.3)$$

Здесь V — гладкая в Ω вектор-функция, а угловые части $\xi^\pm(\theta_\pm)$ и $\Xi^\pm(\theta_\pm)$ задаются равенствами

$$\begin{aligned} (\xi_\rho^\pm(\theta_\pm), \xi_\theta^\pm(\theta_\pm)) &= C_1 [\cos(3/2\theta_\pm), -\sin(3/2\theta_\pm)] + C_2 [\sin(3/2\theta_\pm), \\ &+ \cos(3/2\theta_\pm)] + C_3 [\cos(1/2\theta_\pm), (2\kappa+1)(2\kappa-1)^{-1} \sin(1/2\theta_\pm)] + C_4 [\sin(1/2\theta_\pm), \\ &+ (2\kappa+1)(2\kappa-1)^{-1} \cos(1/2\theta_\pm)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Xi_{rr}^\pm(\theta_\pm), \Xi_{r\theta}^\pm(\theta_\pm), \Xi_{\theta\theta}^\pm(\theta_\pm)) &= \mu \{ C_1 [\cos(3/2\theta_\pm), -\sin(3/2\theta_\pm), \\ &- \cos(3/2\theta_\pm)] + C_2 [\sin(3/2\theta_\pm), \cos(3/2\theta_\pm), -\sin(3/2\theta_\pm)] + \\ &+ C_3 [2\mu(\lambda+5\mu)^{-1} \cos(1/2\theta_\pm), (\lambda+\mu)(\lambda+5\mu)^{-1} \sin(1/2\theta_\pm), \\ &- 3(\lambda+\mu)(\lambda+5\mu)^{-1} \cos(1/2\theta_\pm)] + C_4 [2\mu(\lambda+5\mu)^{-1} \sin(1/2\theta_\pm), \\ &- (\lambda+\mu)(\lambda+5\mu)^{-1} \cos(1/2\theta_\pm), -3(\lambda+\mu)(\lambda+5\mu)^{-1} \sin(1/2\theta_\pm)] \} \end{aligned} \quad (4.4)$$

где $\kappa = (\lambda+3\mu)(\lambda+\mu)^{-1}$; C_1, C_2, C_3, C_4 — постоянные, определенные формулами

$$\begin{aligned} C_1 &= \sqrt{2a} b_\pm [4(\lambda+2\mu)]^{-1} \{ [(\lambda_* - \lambda)(2\mu_* + \lambda_*)^{-1} ((3\lambda+7\mu)\mu_*\mu^{-1} - (\lambda+\mu)) + \\ &+ (3\lambda+7\mu)\mu^{-1} (\mu - \mu_*)] \partial_1 v_1^{(0)}(\pm a, 0) + (2\mu_* + \lambda_*)^{-1} [2(\lambda+\mu)(\mu - \mu_* + \lambda - \lambda_*) - \\ &- (3\lambda+7\mu)\mu^{-1} (\mu\lambda_* - \lambda\mu_*)] \partial_2 v_2^{(0)}(\pm a, 0) \} \end{aligned}$$

$$C_2 = -\sqrt{2a} b_{\pm} 3(\lambda + \mu) [4(\lambda + 2\mu)]^{-1} (\mu - \mu_*) \mu^{-1} \{ \partial_1 v_2^{(0)}(\pm a, 0) + \partial_2 v_1^{(0)}(\pm a, 0) \}$$

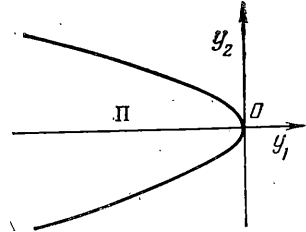
$$C_3 = -(\lambda + 5\mu) [4(\lambda + 2\mu)]^{-1} \sqrt{2a} b_{\pm} \{ [(\mu + \mu_*) (2\mu_* + \lambda_*)^{-1} (\lambda - \lambda_*) \mu^{-1} - (\mu - \mu_*) \mu^{-1} \partial_1 v_1^{(0)}(\pm a, 0) + [(2\mu_* + \lambda_*)^{-1} (2(\mu - \mu_*) + 2(\lambda - \lambda_*) + \lambda_* - \lambda \mu_* \mu^{-1})] \partial_2 v_2^{(0)}(\pm a, 0) \}$$

$$C_4 = (\lambda + 5\mu) [4(\lambda + 2\mu)]^{-1} \sqrt{2a} b_{\pm} (\mu - \mu_*) \mu_*^{-1} [\partial_1 v_2^{(0)}(\pm a, 0) + \partial_2 v_1^{(0)}(\pm a, 0)]$$

5. Пограничный слой вблизи кромки включения. Как показано в п. 3, построенная асимптотика решения задачи (3.3), (3.8) обладает сингулярностью в концах $(\pm a, 0)$ включения G_ε . В то же время решение исходной краевой задачи никаких особенностей не имеет и, следовательно, вблизи кромки включения представления (2.1) и (3.1) непригодны. Как обычно, в этом случае возникает влияние пограничного слоя. Для отверстий подобные задачи исследовались в [8, 10–14].

Рассмотрим один из концов включения G_ε , для определенности, точку O_+ . Введем замену координат $x \rightarrow y = \varepsilon^{-2} (x_1 - a, x_2)$. После такой замены и перехода к $\varepsilon = 0$ контур ∂G_ε трансформируется в параболу $\partial \Pi$, что вытекает из соотношений

$$y_2 = \pm \varepsilon [a^2 - (a + \varepsilon^2 y_1)^2]^{1/2} h_{\pm}^\circ(a + \varepsilon^2 y_1) = \pm b_+ [(-2a y_1)^{1/2} + O(\varepsilon^2 |y_1|)] \quad (5.1)$$



Фиг. 2

Положим $\Pi = \{y : y_1 < 0, |y_2| \leq b_+ (-2a y_1)^{1/2}\}$ (фиг. 2). Вблизи O_\pm для вектора \mathbf{u} выполняются однородные уравнения равновесия (1.1), (1.2) и однородные условия сопряжения (1.4). Значит, пограничный слой \mathbf{Z} должен являться решением систем уравнений

$$\mu \Delta \mathbf{Z}(y) + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{Z}(y) = 0, \quad y \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Pi} \quad (5.2)$$

$$\mu_* \Delta \mathbf{Z}_*(y) + (\lambda_* + \mu_*) \text{grad div } \mathbf{Z}_*(y) = 0, \quad y \in \Pi \quad (5.3)$$

с условиями сопряжения на параболе

$$\mathbf{Z}(y) = \mathbf{Z}_*(y), \quad \sigma^{(n)}(\mathbf{Z}; y) = \sigma_*^{(n)}(\mathbf{Z}_*; y), \quad y \in \partial \Pi \quad (5.4)$$

Найдем условия на бесконечности, которым следует подчинить вектор \mathbf{Z} . С этой целью воспользуемся асимптотиками $\mathbf{v}^{(j)}, \mathbf{w}^{(j)}$ при $j=0, 1$. Согласно (3.1), вблизи точки O_+ справедливы формулы

$$\mathbf{v}^{(0)}(x) + \varepsilon \mathbf{v}^{(1)}(x) = \mathbf{v}^{(0)}(a, 0) + (x - O_+) \nabla \mathbf{v}^{(0)}(a, 0) + O(r_+^2) + \varepsilon \mathbf{V}(a, 0) + \varepsilon r_+^{1/2} \xi^+ (\theta_+) + O(\varepsilon r_+)$$

где \mathbf{V} и ξ^+ — вектор-функции из представлений (4.2), (4.3). Таким образом, в зоне $|x - O_+| \sim O(\varepsilon^{1+\delta})$, $\delta > 0$ в координатах ξ получаем

$$\mathbf{v}^{(0)}(x) + \varepsilon \mathbf{v}^{(1)}(x) = \mathbf{v}^{(0)}(a, 0) + \varepsilon \mathbf{V}(a, 0) + \varepsilon^2 (y \cdot \nabla \mathbf{v}^{(0)}(a, 0) + \rho_+^{1/2} \xi^+ (\theta_+)) + O(\varepsilon^{2+\delta}) \quad (\rho_+ = \varepsilon^{-2} r_+) \quad (5.5)$$

Кроме того, тензор напряжений в той же зоне удовлетворяет соотношениям

$$\sigma(\mathbf{v}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{v}^{(1)}, \varepsilon, x) = \sigma(\mathbf{v}^{(0)}; a, 0) + O(a - x_1) + \varepsilon r_+^{-1/2} \Phi^+ (\theta_+) + O(\varepsilon) = \sigma(\mathbf{v}^{(0)}; a, 0) + \rho_+^{-1/2} \Xi^+ (\theta_+) + O(\varepsilon) \quad (5.6)$$

Найдем теперь асимптотические представления вектора смещений внутри G_ε вблизи кромки включения. Имеем

$$\mathbf{w}^{(0)}(x_1) + \varepsilon \mathbf{w}^{(1)}(x_1, \xi) = \mathbf{w}^{(0)}(a) + (x_1 - a) \partial_1 \mathbf{w}^{(0)}(a) + O((x_1 - a)^2) + \varepsilon [\mathbf{W}^{(1)}(x_1) + H(x_1) \xi \{ \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q} \partial_2 \mathbf{v}^{(0)}(x_1, 0) \} +$$

Поскольку $+Q_*^{-1}(\mathbf{B}-\mathbf{B}_*)\partial_1 \mathbf{v}^{(0)}(x_1, 0)\} + O(\varepsilon(a-x_1)^{3/2})$

$$\begin{aligned} \zeta &= \varepsilon^{-1}(x_2 + [-2a(x_1-a)]^{1/2}(h_+^{\circ}(a) - h_-^{\circ}(a) + O(x_1-a))) \times \\ &\quad \times [[-2a(x_1-a)]^{1/2}(h_+^{\circ}(a) + h_-^{\circ}(a) + O(x_1-a))]^{-1} = \\ &= \varepsilon^{-1}(x_2[2b_+[-2a(x_1-a)]^{1/2}]^{-1} + O(|x_2|(a-x_1)^{1/2} + (a-x_1)^2)) = \\ &= y_2[2b_+[-2ay_1]^{1/2}]^{-1} + O(\varepsilon^3|y_1|(1+\varepsilon|y_1|)) \end{aligned}$$

то, используя равенства (2.11), (3.2), находим, что в G_ε при $a-x_1 \sim \varepsilon^{1+\delta}$ справедлива формула

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{(0)}(x_1) + \varepsilon \mathbf{w}^{(1)}(x_1, \zeta) &= \mathbf{v}^{(0)}(a, 0) + \varepsilon \mathbf{V}(a, 0) + \\ + \varepsilon^2 \{ &y_1 \partial_1 \mathbf{v}^{(0)}(a, 0) + y_2 Q_*^{-1} [Q \partial_2 \mathbf{v}^{(0)}(a, 0) + (\mathbf{B}-\mathbf{B}_*) \partial_1 \mathbf{v}^{(0)}(a, 0)] + \\ &+ 1/2(-y_1)^{1/2} [\xi^+(0) + \xi^+(2\pi)] \} + O(\varepsilon^{2+\delta}) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Соответственно, напряжения записываются в виде

$$\sigma_*(\mathbf{w}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{w}^{(1)}; \varepsilon, x) = \Sigma(\mathbf{v}^{(0)}) + O(\varepsilon^\delta) \quad (5.8)$$

$$\Sigma^{(2)}(\mathbf{v}^{(0)}) \equiv (\Sigma_{21}(\mathbf{v}^{(0)}), \Sigma_{22}(\mathbf{v}^{(0)})) = \sigma^{(2)}(\mathbf{v}^{(0)}; a, 0)$$

$$\Sigma_{11}(\mathbf{v}^{(0)}) = \lambda_*(2\mu_* + \lambda_*)^{-1} \sigma_{22}(\mathbf{v}^{(0)}; a, 0) + 4\mu_*(\mu_* + \lambda_*)(2\mu_* + \lambda_*)^{-1} \partial_1 v_1^{(0)}(a, 0)$$

Итак, используя метод сращиваемых асимптотических разложений, получаем, что вблизи точки O_+ асимптотику решения \mathbf{u} задачи (1.1)–(1.4) следует искать в виде

$$\mathbf{u}(\varepsilon, x) \sim \mathbf{v}^{(0)}(a, 0) + \varepsilon \mathbf{V}(a, 0) + \varepsilon^2 \mathbf{Z}(y) \quad (5.9)$$

Здесь \mathbf{Z} – решение однородной задачи (5.2)–(5.4), подчиненное соотношениям

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{z}; y) &= \sigma(\mathbf{v}^{(0)}; a, 0) + \rho_+^{-1/2} \Xi(\theta_+) + o(\rho^{-1/2}), \quad y \in \mathbf{R}^2 \setminus \Pi, \quad \rho \rightarrow \infty \\ \sigma_*(\mathbf{Z}; y) &= \Sigma(\mathbf{v}^{(0)}) + o(1), \quad y \in \Pi, \quad \rho \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (5.10)$$

в которых $\Sigma(\mathbf{v}^{(0)})$ – тензор, введенный в (5.8). Отметим, что формулы (5.9), (5.10) находятся из условий совпадения асимптотик правой части (5.9) при $|y| \rightarrow \infty$ с асимптотиками (5.5)–(5.8).

Известно [15], что решение задачи (5.2)–(5.4), (5.10) вычисляется по комплексным потенциалам

$$\begin{aligned} \varphi^*(z) &= \mu_*(1+\kappa)(A+B)z, \quad \psi^*(z) = 2\mu_*(1+\kappa)(A-B+2iC)z \\ \varphi(z) &= z(\mu_* + \mu\kappa)(A+B) + z(\mu_* - \mu)(A-B) + 2(\mu_* - \mu)(A-B + \\ + 2iC) [&i2ab_\pm^2 - z + (-8iab_\pm^2 z)^{1/2}], \quad \psi(z) = 2\{(\mu_*\kappa + \mu)(A-B+2iC)z + \\ + [&2iab_\pm^2 - z + (-8iab_\pm^2 z)^{1/2}] [(\mu_*(\kappa-1) - \mu(\kappa_*-1))(A+B) + \\ + &(\mu_* - \mu)(A-B-2iC)(1+\kappa - (-2iab_\pm^2 z^{-1})^{1/2}) \} \end{aligned} \quad (5.11)$$

где A, B, C – некоторые постоянные. Пусть (d, τ) – полярные координаты с центром в фокусе $(-ab_\pm^2/2, 0)$ параболы Π , такие, что $\tau \in (-\pi, \pi)$ и ось Oy_1 задается равенством $\tau=0$. Найденные по комплексным потенциалам (5.11) компоненты тензора напряжений в Π и в $\mathbf{R}^2 \setminus \Pi$ задаются, соответственно, формулами

$$\begin{aligned} (\sigma_{11}^*, \sigma_{12}^*, \sigma_{22}^*) &= 4\mu_*(1+\kappa)(B, C, A) \quad (5.12) \\ (\sigma_{aa}, \sigma_{a\tau}, \sigma_{\tau\tau}) &= (\kappa-1)(\lambda+\mu) \{ B[\mu_*\mu^{-1} + (\kappa_*-3)] + \\ + &A(\kappa_*+1) \} (1, 0, 1) + 4\mu_*(1+\kappa)C(-\sin(2\tau), -\cos(2\tau), \sin(2\tau)) + \\ + &\{ B[2\mu_*(\kappa-1) - \mu(\kappa_*-3)] - \mu A(\kappa_*+1) \} (-\cos(2\tau), \sin(2\tau), \cos(2\tau)) + \\ + &b_\pm(2a/d)^{1/2} \{ [3(\mu_* - \mu)(A-B) + 2(\mu_*(\kappa-1) - \mu(\kappa_*-1))(A+B) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +B) [\cos (^{3/2}\tau), -\sin (^{3/2}\tau), \cos (^{3/2}\tau)] + 6C(\mu_* - \mu) \times \\
& \times [\sin (^{3/2}\tau), \cos (^{3/2}\tau), -\sin (^{3/2}\tau)] + (A-B)(\mu_* - \mu)(2\kappa - 1)(\lambda + \\
& + \mu)(\lambda + 5\mu)^{-1} [5 \cos (^{1/2}\tau), \sin (^{1/2}\tau), 3 \cos (^{1/2}\tau)] - \quad (5.13) \\
& - 2C(\mu_* - \mu)(2\kappa - 1)(\lambda + \mu)(\lambda + 5\mu)^{-1} [5 \cos (^{1/2}\tau), -\cos (^{1/2}\tau), 3 \sin (^{1/2}\tau)] \} + \\
& + 2(ab_{\pm}^2/d)^{1/2}(\mu - \mu_*) \{ [2C - (A-B)] [\sin (^{1/2}\tau), \cos (^{1/2}\tau), -\sin (^{1/2}\tau)] + \\
& + [2C + A - B] [\cos (^{1/2}\tau), -\sin (^{1/2}\tau), -\cos (^{1/2}\tau)] \}
\end{aligned}$$

Отметим, что асимптотическое представление на бесконечности для компонент $\sigma_{\rho\rho}$, $\sigma_{\rho\theta}$, $\sigma_{\theta\theta}$ тензора напряжений, записанных в полярных координатах (ρ, θ) , описывается с точностью $O(\rho^{-1})$ формулами, аналогичными (5.13). Поэтому, совмещая (5.12), (5.13) с условиями (5.10), находим значения постоянных A, B, C :

$$(B, C, A) = [4\mu_*(1+\kappa)]^{-1} (\Sigma_{11}(v^{(0)}), \Sigma_{12}(v^{(0)}), \Sigma_{22}(v^{(0)})) \quad (5.14)$$

Итак, пограничный слой Z определяется по комплексным потенциалам (5.11), в которых постоянные A, B и C имеют вид (5.14).

Непосредственной проверкой можно установить, что если постоянные A, B и C подчинить равенствам (5.14), то коэффициенты при $d^{-1/2}$ в (5.13) совпадут с угловыми частями (4.4) в асимптотике (4.3) тензора напряжений $\sigma(v^{(1)}; x)$. Именно это обстоятельство позволяет осуществить сравнение пограничного слоя с приближениями к решению u , построенными в пп. 2 и 3.

6. Обоснование асимптотического разложения. Вдали от кромок включения G_ε решение задачи (1.1)–(1.4) представляется в виде (3.1) при $x \in \Omega_\varepsilon$ и (2.1) при $x \in G_\varepsilon$. В малых окрестностях точек $(\pm a, 0)$ асимптотика решения описывается при помощи пограничного слоя Z и задается формулой (5.9). С целью математического обоснования указанных представлений сконструируем единое приближение для смещений u . При этом понадобятся вспомогательные построения.

Пограничный слой описывается при помощи решения задачи сопряжения параболы Π и области $R^2 \setminus \Pi$. Контур $\partial\Pi$ при переходе к исходным координатам $x = (\varepsilon^2 y_1, \pm a, \varepsilon^2 y_2)$, вообще говоря, не совпадает даже в малой окрестности точек O_\pm с контуром ∂G_ε . Для того чтобы учесть искажения, возникшие в формуле (5.1) при переходе к $\varepsilon = 0$, введем новые координаты $Y^\pm(\varepsilon, x)$. Рассмотрим точку O_+ . Область G_ε в полярных координатах (r_+, θ_+) задается соотношением $\theta_+ \in (-A_-(\varepsilon, r_-), A_+(\varepsilon, r_+))$, а парабола $\Pi - \theta \in (-\alpha(\rho), \alpha(\rho))$, где A_\pm и α – некоторые функции. Положим $Y^+(\varepsilon, x) = \varepsilon^{-2}(r_+ \cos \Theta(\varepsilon, r_+, \theta_+), r_+ \sin \Theta(\varepsilon, r_+, \theta_+))$, где $\Theta(\varepsilon, r_+, \theta_+) = -\alpha(\varepsilon^{-2}r_+) (2\theta_+ - A_+(\varepsilon, r_+) + A_-(\varepsilon, r_+)) (A_+(\varepsilon, r_+) + A_-(\varepsilon, r_+))^{-1}$. Отметим, что неравенство $|\Theta(\varepsilon, r_+, \theta_+)| \leq d(\varepsilon^{-2}r_+)$ определяет множество G_ε . Аналогично вводятся координаты Y^- . При этом координаты Y^\pm мало отличаются от растянутых естественных координат y^\pm , введенных в п. 5.

Сказанное относительно координат y^\pm в Ω_ε в равной мере относится и к области G_ε . Поэтому необходимо ввести в G_ε координаты $(\varepsilon^{-2}x_1, \eta^\pm(\varepsilon, x))$, где

$$\eta^\pm(\varepsilon, x) = \varepsilon^{-2}b_\pm(-2ax_1)^{1/2} \{2x_2 + \varepsilon[h_-(x_1) - h_+(x_1)]/[h_-(x_1) + h_+(x_1)]\}.$$

Обозначим через χ срезающую функцию из $C^\infty(R_1)$, такую, что $\chi(t) = 0$ при $t < d/4$ и $\chi(t) = 1$ при $t > d/2$, где $d = \min(a, \text{dist}(O_\pm, \partial\Omega))$. Кроме того, положим $X(\varepsilon, x) = (1 - \chi_+(\varepsilon^{-1}r_+))(1 - \chi_-(\varepsilon^{-1}r_-))$.

Асимптотическое приближение к решению u задачи (1.1)–(1.4), пригодное всюду в $\Omega_\varepsilon \cup G_\varepsilon$, определяется следующими формулами. Если $x \in \Omega_\varepsilon$, то

$$\begin{aligned}
U(\varepsilon, x) = & X(\varepsilon, x) (v^{(0)}(x) + \varepsilon v^{(1)}(x)) + \sum_{\pm} \chi(r_\pm) \{v^{(0)}(\pm a, 0) + \varepsilon V(\pm a, 0) + \\
& + \varepsilon^2 Z^\pm(Y^\pm(\varepsilon, x))\} - \sum_{\pm} X(\varepsilon, r) \chi(r_\pm) \{v^{(0)}(\pm a, 0) + \varepsilon[V(\pm a, 0) + r_\pm^{1/2} \xi^\pm(\Theta^\pm(\varepsilon, r_\pm, \theta_\pm))]\} \quad (6.1)
\end{aligned}$$

Аналогично при $x \in G_\varepsilon$ имеем

$$\begin{aligned}
U^*(\varepsilon, x) = & X(\varepsilon, x) (w^{(0)}(x_1) + \varepsilon w^{(1)}(x_1, \xi)) + \\
& + \sum_{\pm} X(\varepsilon, x) \{w^{(0)}(\pm a) + \varepsilon V(\pm a, 0) + \varepsilon^2 Z^{*,\pm}(\varepsilon^{-2}x_1, \eta^\pm(\varepsilon, x))\} - \\
& - \sum_{\pm} X(\varepsilon, x) \chi(r_\pm) \{w^{(0)}(\pm a) + \varepsilon[w^{(1)}(\pm a, \xi(\pm a, x_2)) + (x_1 \mp a) \partial_1 w^{(1)}(\pm a, \xi(\pm a, x_2))]\} \quad (6.2)
\end{aligned}$$

Отметим, что здесь использована модификация [16] метода сращиваемых асимптотических разложений [11, 17, 18].

Подставим векторное поле (6.1), (6.2) в краевую задачу (1.1)–(1.4). Образовавшаяся при этом невязка будет малой. В силу построений, приведенных в пп. 2–5, используя энергетическую оценку, неравенства Корна и Харди, приходим к соотношению $E(\mathbf{u}-U) = O(\varepsilon^2 |\log \varepsilon|^2)$, где E – функционал упругой энергии. Используя методику [19], можно вывести более точные оценки функции построенной асимптотики U и решения \mathbf{u} :

$$\mathbf{u}(\varepsilon, x) - U(\varepsilon, x) = O(\varepsilon^2 |\log \varepsilon|)$$

$$\sigma(\mathbf{u}-U; \varepsilon, x) = O(\varepsilon^2 |\log \varepsilon| (\varepsilon + \text{dist}(x, M))^{-1}) \quad (x \in \Omega_\varepsilon)$$

$$\mathbf{u}^*(\varepsilon, x) - U^*(\varepsilon, x) = O(\varepsilon^2 |\log \varepsilon|), \quad \sigma^*(\mathbf{u}^* - U^*; \varepsilon, x) = O(\varepsilon) \quad (x \in G_\varepsilon)$$

Приведенные соотношения сохраняются и для приближений (2.1), (3.1), (5.9), построенных ранее в пп. 2–5, так как в каждой из рассматриваемых зон они близки к U, U^* . Подчеркнем особо, что столь сложная конструкция (6.1), (6.2) необходима лишь при строгом обосновании асимптотического разложения решения задачи (1.1)–(1.4).

7. Широко известна (см., например, [20]) явная формула для напряжений, возникающих в равномерно растягиваемой плоскости с эллиптическим включением. Анализ этой формулы в случае тонкого эллипса показывает, что вблизи кромки включения второй член асимптотики (по ε) имеет корневую особенность.

Полученные в данной статье представления для смещений подтверждают этот факт для произвольных овальных тонких включений. Именно в главном напряженно-деформированном состоянии рассматриваемого составного тела $\Omega_\varepsilon \cup G_\varepsilon$ соответствует решению $\mathbf{v}^{(0)}$ задачи о деформации однородного тела (см. (2.10)). При этом, естественно, компоненты $\mathbf{v}^{(0)}$ и их производные являются гладкими функциями в Ω . Однако тензор напряжений, построенный по второму приближению $\mathbf{v}^{(1)}$, имеет корневые особенности вблизи концов O_\pm включения. Важным обстоятельством здесь является то, что порядок сингулярности определяется лишь геометрией кромки включения G_ε . Более того, указанные особенности порождены неоднородностями в условиях сопряжения (3.3) и (3.8), которые имеют вид

$$[\mathbf{v}^{(1)}](x_1) = H(x_1) \Phi(x_1), \quad [\sigma^{(2)}](\mathbf{v}^{(1)}; x_1) = \partial_1(H(x_1) \Psi(x_1)) \quad (7.1)$$

где Φ, Ψ – вектор-функции из $C^\infty([-a, a])$, H – приведенная толщина включения. Если $H(x_1) \sim H_\pm^\gamma r_\pm^{-1}$, $\gamma \in (0, 1)$, то напряжения в задаче с условиями (7.1) обладают сингулярностью $O(r_\pm^{\gamma-1})$. Таким образом, совпадение показателя сингулярности для $\sigma(\mathbf{v}^{(1)}; x)$ с классическим показателем в задаче о трещине случайно и обуславливается выбором функций h_\pm (см. п. 1), описывающих контур включения G_ε .

Поскольку ∂G_ε – гладкий контур, то напряжения $\sigma(\mathbf{u}; x)$ конечны всюду в области $\Omega_\varepsilon \cup G_\varepsilon$. Сглаживание особенностей, возникающих во втором приближении, осуществляется при помощи сращивания с пограничным слоем. При этом вектор $\varepsilon^2 \mathbf{Z}^\pm$ порождает ограниченные при $\varepsilon \rightarrow 0$ напряжения, так что окончательно компоненты тензора напряжений $\sigma(\mathbf{u}; x)$ в $\Omega_\varepsilon \cup G_\varepsilon$ ограничены не зависящей от ε постоянной. Отметим, что последнее имеет место лишь в случае, когда константы Ламе λ, μ и λ_*, μ_* сравнимы, т. е. их отношения суть величины $O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Если же считать, что эти отношения являются бесконечно большими при $\varepsilon \rightarrow 0$ (модель очень мягкого включения) или бесконечно малыми (модель очень жесткого включения), то вблизи кромок возникает существенная концентрация напряжений – напряжения становятся неограниченными при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Авторы выражают глубокую признательность Н. Х. Арутюняну и Н. Ф. Морозову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Подстригач Я. С. Условия скачка напряжений и перемещений на тонкостенном упругом включении в сплошной среде. – Докл. АН УССР. Сер. А, 1982, № 12, с. 30–32.
2. Бережницкий Л. Т., Деляевский М. В., Панасюк В. В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. Киев: Наук. думка, 1979. 400 с.
3. Caillerie D. The effect of athin inclusion of high rigidity in an elastic body. – Math. Meth. Appl. Sci., 1980, v. 2, No. 3, p. 251–270.
4. Канаун С. К. Тонкий дефект в однородной упругой среде. – В кн.: Исследования по теоретическим основам расчета строительных конструкций. Л.: Изд-е Ленингр. строит. ин-та, 1983, с. 75–84.
5. Кунец Я. И. Осесимметричное кручение упругого бесконечного пространства с тонким упругим включением переменной толщины. – В кн.: Механика неоднородных структур: Тез. докл. 1-й Всесоюз. конф., Львов, 1983. Киев: Наук. думка, 1983, с. 123–124.
6. Поддубляк А. П., Кунец Я. И. Осесимметричное кручение упругого полупространства с упругой шайбой. – Прикл. механика, 1983, т. 19, № 7, с. 66–70.
7. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи

- асимптотического интегрирования уравнений теории упругости.— ПММ, 1963, т. 27, № 4, с. 593–608.
8. Назаров С. А. Введение в асимптотические методы теории упругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. 117 с.
 9. Кондрагьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.— Тр. Моск. матем. о-ва, 1967, т. 16, с. 209–292.
 10. Geer J. F., Keller J. B. Uniform asymptotic solutions for potential flow around a thin airfoil and the electrostatic potential about a thin conductor.— SIAM J. Appl. Math., 1968, v. 16, No. 1, p. 75–101.
 11. Ильин А. М. Краевые задачи для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. I. Двумерный случай.— Мат. сб., 1976, т. 99, № 4, с. 514–537.
 12. Зорин И. С. О хрупком разрушении упругой плоскости, ослабленной тонким вырезом.— Вестн. ЛГУ. Математика, механика, астрономия, 1982, № 7, вып. 2, с. 11–16.
 13. Зорин И. С. К вопросу о хрупком разрушении упругой плоскости с тонким вырезом при двухосном напряженном состоянии.— Изв. АН СССР. МТТ, 1985, № 1, с. 188–192.
 14. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 255 с.
 15. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
 16. Назаров С. А., Ромашев Ю. А. Изменение коэффициента интенсивности при разрушении перемычки между двумя коллинеарными трещинами.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1982, № 4, с. 30–40.
 17. Ван-Дайк М. Д. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
 18. Федорюк М. В. Асимптотика решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа и Гельмгольца во внешности тонкого цилиндра.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1981, т. 45, № 1, с. 167–186.
 19. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярных возмущениях области. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1980. 206 с.
 20. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 247 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
20.V.1985