

УДК 539.3.01

РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ
УПРУГОГО КОНТАКТА ПОЛОСЫ И ПОЛУПОЛОСЫ

ЛОБОДА В. В.

Задачи упругого контакта полуполосы и полуплоскости, а также двух полуполос разной ширины рассматривались ранее [1, 2]. Метод, разработанный в [1], применен в [3] для исследования контактного взаимодействия полуполосы и полосы при симметричной нагрузке, действующей вдали от области контакта. В публикуемой работе методом интегральных преобразований получено решение сформулированной контактной задачи, приемлемой для любой нагрузки, действующей на сторонах полуполосы.

1. Рассматривается контактное взаимодействие полуполосы и полосы (фиг. 1) при плоской деформации с упругими характеристиками $E^{(1)}$, $\nu^{(1)}$ и $E^{(2)}$, $\nu^{(2)}$ соответственно при следующих граничных условиях вне зоны контакта:

$$u_i^{(2)}(-h, x_2) = 0 \quad (1.1)$$

$$\sigma_{1i}^{(2)}(0, x_2) = 0 \quad (|x_2| > b) \quad (1.2)$$

$$\sigma_{12}^{(1)}(x_1, -b) = P_i^-(x_1),$$

$$\sigma_{12}^{(1)}(x_1, b) = P_i^+(x_1) \quad (1.3)$$

Здесь и в дальнейшем верхние индексы (1), (2) относятся к характеристикам полуполосы и полосы соответственно; $i=1, 2$; $P_i^+(x_1)$, $P_i^-(x_1)$ — заданные компоненты внешней нагрузки, действующей на сторонах полуполосы.

Рассматриваются два случая контактного взаимодействия — жесткое сцепление и гладкий контакт

$$u_i^{(1)}(0, x_2) = u_i^{(2)}(0, x_2), \quad \sigma_{1i}^{(1)}(0, x_2) = \sigma_{1i}^{(2)}(0, x_2) \quad (1.4)$$

$$u_1^{(1)}(0, x_2) = u_1^{(2)}(0, x_2), \quad \sigma_{11}^{(1)}(0, x_2) = \sigma_{11}^{(2)}(0, x_2)$$

$$\sigma_{12}^{(i)}(0, x_2) = 0 \quad (|x_2| \leq b). \quad (1.5)$$

При условиях (1.1)–(1.4) или (1.1)–(1.3), (1.5) ищется решение уравнений равновесия ($\lambda^{(i)}$, $\mu^{(i)}$ — упругие постоянные Ламе):

$$(\lambda^{(i)} + \mu^{(i)}) \partial \theta^{(i)} / \partial x_j + \mu^{(i)} \Delta u_j^{(i)} = 0 \quad (j=1, 2) \quad (1.6)$$

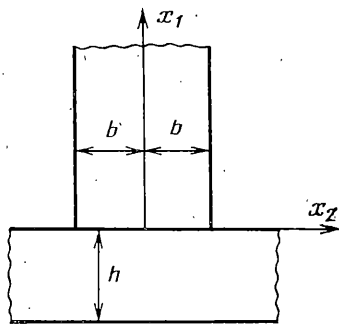
$$\theta^{(i)} = \partial u_1^{(i)} / \partial x_1 + \partial u_2^{(i)} / \partial x_2$$

Используя метод сечений и вводя неизвестные функции

$$q_i(x_2) = \sigma_{1i}^{(1)}(0, x_2) = \sigma_{1i}^{(2)}(0, x_2) \quad (|x_2| \leq b) \quad (1.7)$$

найдем отдельно решения задач для полосы и полуполосы.

Решение уравнений (1.6) для полосы ($i=2$) при граничных условиях (1.1) и $\sigma_{1i}^{(2)}(0, x_2) = q_i(x_2)$, $|x_2| \leq b$; $\sigma_{1i}^{(2)}(0, x_2) = 0$, $|x_2| > b$ получено путем применения комплексного преобразования Фурье [4].



Фиг. 1

Выражения для производных перемещений, необходимые в последующем анализе, имеют вид

$$u_1^{(2)'}(0, x_2) = \kappa_1 \int_{-b}^b \frac{q_1(y)}{y-x_2} dy - \pi \kappa_2 q_2(x_2) + \sum_{j=1}^2 \int_{-b}^b q_j(y) K_{1j}(x_2, y) dy \quad (1.8)$$

$$u_2^{(2)'}(0, x_2) = \pi \kappa_2 q_1(x_2) + \kappa_1 \int_{-b}^b \frac{q_2(y)}{y-x_2} dy + \sum_{j=1}^2 \int_{-b}^b q_j(y) K_{2j}(x_2, y) dy$$

$$u_i^{(j)'}(0, x_2) = \partial u_i^{(j)} / \partial x_2(0, x_2), \quad \kappa_1 = 2\kappa_3(1-\nu^{(2)})$$

$$\kappa_2 = \kappa_3(1-2\nu^{(2)}), \quad \kappa_3 = (1+\nu^{(2)}) / (\pi E^{(2)})$$

$$K_{11}(x_2, y) = K_{22}(x_2, y) = \kappa_1 \int_0^\infty (p\gamma_{1p}-1) \sin p(y-x_2) dp$$

$$K_{21}(x_2, y) = -K_{12}(x_2, y) = \kappa_2 \int_0^\infty (p\gamma_{2p}-1) \cos p(y-x_2) dp$$

$$\gamma_{1p} = (2\kappa \operatorname{sh} 2p_1 - 4p_1) / pD_p$$

$$\gamma_{2p} = [2\kappa \operatorname{ch} 2p_1 - 4p_1^2 / (1-2\nu^{(2)}) - 2\kappa] / pD_p$$

$$D_p = 2\kappa \operatorname{ch} 2p_1 + 4p_1^2 + \kappa^2 + 1, \quad \kappa = 3-4\nu^{(2)}, \quad p_1 = ph$$

где $K_{ij}(x_2, y)$ — регулярные функции. При получении соотношений (1.8) учтены формулы интегрирования

$$\int_{-b}^b q_i(y) dy \int_0^\infty \sin p(y-x_2) dp = \int_{-b}^b \frac{q_i(y)}{y-x_2} dy$$

$$\int_{-b}^b q_i(y) dy \int_0^\infty \cos p(y-x_2) dp = \pi q_i(x_2) \quad (1.9)$$

справедливость первой из которых вытекает из предельного значения интеграла [5]:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-pz} \sin p(y-x_2) dp = \frac{1}{y-x_2}$$

а вторая следует из свойств интегральных преобразований Фурье [4].

С целью решения задачи для полуполосы применим интегральные преобразования Фурье

$$u_1^\sim(t, x_2) = \int_0^\infty u_1^{(1)}(x_1, x_2) \sin tx_1 dx_1$$

$$u_2^\sim(t, x_2) = \int_0^\infty u_2^{(1)}(x_1, x_2) \cos tx_1 dx_1$$

к уравнениям (1.6) ($i=1$). Система уравнений в изображениях принимает вид

$$L_1^\sim \equiv \mu^{(1)} d^2 u_1^\sim / dx_2^2 - t \lambda_1 du_2^\sim / dx_2 - t^2 \lambda_2 u_1^\sim = -t \lambda_2 u_1^{(1)}(0, x_2)$$

$$L_2^\sim \equiv \lambda_2 d^2 u_2^\sim / dx_2^2 + t \lambda_1 du_1^\sim / dx_2 - t^2 \mu^{(1)} u_2^\sim =$$

$$= \lambda_1 \partial u^{(1)}(0, x_2) / dx_2 + \mu^{(1)} \partial u_2^{(1)}(0, x_2) / dx_1 \quad (1.10)$$

$$\lambda_1 = \lambda^{(1)} + \mu^{(1)}, \quad \lambda_2 = \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}$$

Представим граничные условия (1.3) в виде комбинации симметричной и антисимметричной относительно x_1 составляющих и рассмотрим от-

дельно симметричную и антисимметричную задачи

$$\sigma_{12}(x_1, \pm b) = \left\{ \begin{array}{l} \pm P_1(x_1) \\ P_1(x_1) \end{array} \right\}, \quad \sigma_{22}(x_1, \pm b) = \left\{ \begin{array}{l} P_2(x_1) \\ \pm P_2(x_1) \end{array} \right\} \quad (1.11)$$

Здесь и в дальнейшем верхнее выражение в фигурных скобках соответствует симметричному случаю, нижнее — антисимметричному.

Введем функции $U(x_2)$, $U^\sim(p)$, $q_2^*(x_2)$ и $q_2^\sim(p)$:

$$\int_0^\infty U^\sim(p) \chi_1(p, x_2) dp = U(x_2) = \begin{cases} u_1(0, x_2), & |x_2| \leq b \\ 0, & |x_2| > b \end{cases} \quad (1.12)$$

$$\int_0^\infty q_2^\sim(p) \chi_2(p, x_2) dp = q_2^*(x_2) = \begin{cases} q_2(x_2), & |x_2| \leq b \\ 0, & |x_2| > b \end{cases}$$

$$\chi_1(p, x_2) = \left\{ \begin{array}{l} \cos px_2 \\ \sin px_2 \end{array} \right\}, \quad \chi_2(p, x_2) = \left\{ \begin{array}{l} \sin px_2 \\ \cos px_2 \end{array} \right\}$$

Тогда система (1.10) может быть записана в форме

$$L_1^\sim = -t\lambda_2 \int_0^\infty U^\sim(p) \chi_1(p, x_2) dp, \quad |x_2| \leq b \quad (1.13)$$

$$L_2^\sim = - \int_0^\infty [\lambda^{(1)} p U^\sim(p) - q_2^\sim(p)] \chi_2(p, x_2) dp$$

Ее частное решение имеет вид

$$u_{1r}^\sim = \int_0^\infty \frac{t}{D_{pt}} \left[\left(t^2 + \frac{3\lambda^{(1)} + 4\mu^{(1)}}{\lambda_2} p^2 \right) U^\sim(p) + \frac{p}{2\mu^{(1)} e_1} q_2^\sim(p) \right] \chi_1(p, x_2) dp \quad (1.14)$$

$$u_{22}^\sim = \int_0^\infty \frac{1}{D_{pt}} \left[p \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} p^2 - t^2 \right) U^\sim(p) - \frac{1}{2\mu^{(1)}} \left(2t^2 + \frac{e_2}{e_1} p^2 \right) q_2^\sim(p) \right] \chi_2(p, x_2) dp$$

$$D_{pt} = (p^2 + t^2)^2, \quad e_1 = 1 - \nu^{(1)}, \quad e_2 = 1 - 2\nu^{(1)}$$

а общее с учетом свойств симметрии ищем в форме

$$u_{10}^\sim = -[c_1(t) + \kappa' c_2(t)/t] \chi_3(t, x_2) - c_2(t) x_2 \chi_4(t, x_2)$$

$$u_{20}^\sim = c_1(t) \chi_4(t, x_2) + c_2(t) x_2 \chi_3(t, x_2) \quad (1.15)$$

$$\chi_3(t, x_2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{ch } tx_2 \\ \text{sh } tx_2 \end{array} \right\}, \quad \chi_4(t, x_2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{sh } tx_2 \\ \text{ch } tx_2 \end{array} \right\}, \quad \kappa' = 3 - 4\nu^{(1)}$$

При этом $c_1(t)$ и $c_2(t)$ определяются из уравнений

$$du_1^\sim/dx_2 - tu_2^\sim|_{x_2=b} = P_1^\sim(t)$$

$$e_1 du_2^\sim/dx_2 + \nu^{(1)} tu_1^\sim|_{x_2=b} = \nu^{(1)} u_1^{(1)}(0, b) + e_2 P_2^\sim(t)/2$$

$$P_1^\sim(t) = \frac{1}{\mu^{(1)}} \int_0^\infty P_1(x_1) \sin tx_1 dx_1, \quad P_2^\sim(t) = \frac{1}{\mu^{(1)}} \int_0^\infty P_2(x_1) \cos tx_1 dx_1$$

$$u_i^\sim = u_{i0}^\sim + u_{ir}^\sim \quad (1.16)$$

Находя $c_i(t)$ и применяя обратное преобразование по x_1 [4] к соотношению (1.16), а также учитывая, что

$$U^\sim(p) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} U(y) \chi_1(p, y) dy, \quad q_2^\sim(p) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} q_2^*(y) \chi_2(p, y) dy$$

получаем после ряда преобразований следующие выражения для деформации и напряжения, которые необходимы в последующем анализе:

$$u_2^{(1)}(0, x_2) = \kappa' \lambda_3 \int_{-b}^b \frac{q_2(y)}{x_2 - y} dy - e_2 \lambda_4 \int_{-b}^b \frac{U'(y)}{x_2 - y} dy - \Omega_1(x_2, v^{(1)}) \quad (1.17)$$

$$\sigma_{11}^{(1)}(0, x_2) = -e_2 \lambda_5 \int_{-b}^b \frac{q_2(y)}{x_2 - y} dy - \lambda_6 \int_{-b}^b \frac{U'(y)}{x_2 - y} dy + \Omega_2(x_2, 1) \quad (1.18)$$

$$\lambda_3 = (4\pi\mu^{(1)} e_1)^{-1}, \quad \lambda_4 = (2\pi e_1)^{-1}, \quad \lambda_{i+4} = \lambda_{i+2} (1 + v^{(1)})^{-1}$$

$$\Omega_i(x_2, \beta) = \lambda_{2i+1} \int_{-b}^b q_2(y) M_1^\circ(x_2, y, \beta) dy - \lambda_{2i+2} \int_{-b}^b U'(y) M_2^\circ(x_2, y, \beta) dy + Q^\circ(x_2, \beta) \quad (1.19)$$

$$M_i^\circ(x_2, y, \beta) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\delta_t} M_i^*(x_2, y, t, \beta) dt \quad (1.20)$$

$$M_i^*(x_2, y, t, \beta) = [f_{i1}(y, t, \beta) \chi_3(t, x_2) + f_{i2}(y, t, \beta) t x_2 \chi_4(t, x_2)] \exp[-(b-y)t]$$

$$f_{11}(y, t, \beta) = [2e_1 + (b-y)t] [tb\chi_3(t, b) + \chi_4(t, b)] + [e_2 + (b-y)t] tb\chi_4(t, b) - 2\beta \{ [2e_1 + (b-y)t] \chi_4(t, b) + [e_2 + (b-y)t] \chi_3(t, b) \}$$

$$f_{12}(y, t, b) = -[2(1-\beta) + (b-y)t] \chi_4(t, b) - [1-2\beta + (b-y)t] \chi_3(t, b)$$

$$f_{21}(y, t, \beta) = [tb\chi_3(t, b) + (1-2\beta)\chi_4(t, b)] t(b-y) - [tb\chi_4(t, b) - 2\beta\chi_3(t, b)] [1-t(b-y)]$$

$$f_{22}(y, t, \beta) = [1-t(b-y)] \chi_3(t, b) - t(b-y) \chi_4(t, b)$$

$$\delta_t = {}^{1/2} \text{sh } 2tb + rtb, \quad r = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$Q^\circ(x_2, \beta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\delta_t} Q^*(x_2, t, \beta) dt \quad (1.21)$$

$$Q^*(x_2, t, \beta) = \theta_1(x_2, t, \beta) P_1^\sim(t) + \theta_2(x_2, t, \beta) P_2^\sim(t)$$

$$\theta_1(x_2, t, \beta) = [tb\chi_4(t, b) - 2\beta\chi_3(t, b)] \chi_3(t, x_2) - tx_2 \chi_3(t, b) \chi_4(t, x_2)$$

$$\theta_2(x_2, t, \beta) = [tb\chi_3(t, b) + (1-2\beta)\chi_4(t, b)] \chi_3(t, x_2) - tx_2 \chi_4(t, b) \chi_4(t, x_2)$$

При выводе соотношений (1.17), (1.18) использованы формулы интегрирования, которые получаются аналогично (1.9):

$$\int_0^{\infty} p U^\sim(p) \chi_1(p, x_2) dp = \frac{1}{\pi} \int_{-b}^b \frac{U'(y)}{x_2 - y} dy \quad (1.22)$$

$$\int_0^{\infty} q_2^\sim(p) \chi_1(p, x_2) dp = -\frac{r}{\pi} \int_{-b}^b \frac{q_2(y)}{x_2 - y} dy$$

Функции $M_i^*(x_2, y, t, \beta)/\delta_t$ при $t \rightarrow 0$ в симметричном случае имеют особенности $1/t$, а в антисимметричном эти функции, а также $Q^*(x_2, t, \beta)/\delta_t$ — особенно-

сти $1/t^2$. С использованием свойств симметрии

$$\int_{-b}^b q_2(y) \left\{ \frac{1}{y} \right\} dy = 0, \quad \int_{-b}^b U'(y) \left\{ \frac{1}{y} \right\} dy = 0$$

и условий равновесия полуполосы (для антисимметричного случая)

$$\int_{-b}^b q_2(y) dy = 2P_2^\circ, \quad P_2^\circ = \int_0^\infty P_2(x_1) dx_1$$

эта особенность может быть устранена, если $\Omega_i(x_2, \beta)$ представить в форме

$$\Omega_i(x_2, \beta) = \lambda_{2i+1} \int_{-b}^b q_2(y) M_1(x_2, y, \beta) dy - \lambda_{2i+2} \int_{-b}^b U'(y) M_2(x_2, y, \beta) dy + Q(x_2, \beta)$$

$$M_i(x_2, y, \beta) = \int_0^\infty \frac{1}{\delta_t} [M_i^*(x_2, y, t, \beta) - M_i^{**}(x_2, y, t, \beta)] dt$$

$$Q(x_2, \beta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\delta_t} [Q^*(x_2, t, \beta) - Q^{**}(x_2, t, \beta)] dt$$

$$M_1^{**}(x_2, y, t, \beta) = \left\{ \begin{array}{c} e_2 \\ [2(2\beta\nu - \beta - \nu)(1+ty) + ty] x_2 \end{array} \right\}$$

$$M_2^{**}(x_2, y, t, \beta) = \left\{ \begin{array}{c} 2\beta \\ 2x_2 y \beta t^2 \end{array} \right\}, \quad Q^{**}(x_2, t, \beta) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -2\beta P_2^\circ t x_2 \end{array} \right\}$$

Выражения для M_i^{**} и Q^{**} получаются в результате разложения M_i^* и Q^* в ряды Маклорена по t и удержания одного члена ряда в симметричном случае, трех — в антисимметричном.

2. Используя соотношения (1.8), (1.17), (1.18) и удовлетворяя условиям взаимодействия полосы и полуполосы (1.4) или (1.5), получаем следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\sum_{n=n_0}^3 \left\{ \int_{-b}^b \left[\frac{a_{mn}}{x_2 - y} + D_{mn}(x_2, y) \right] G_n(y) dy + \pi \theta_{mn} G_n(x_2) \right\} = R_m(x_2), \quad |x_2| \leq b \quad (2.1)$$

$$a_{11} = \kappa' \lambda_3 + \kappa_1, \quad a_{12} = -e_2 \lambda_4, \quad a_{21} = e_2 / (2\mu_1)$$

$$a_{22} = 1, \quad a_{33} = 1, \quad a_{13} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0$$

$$D_{1i}(x_2, y) = d_{1i} M_i(x_2, y, \nu^{(1)}) - \delta_i^4 K_{22}(x_2, y)$$

$$D_{13}(x_2, y) = -K_{21}(x_2, y), \quad D_{2i}(x_2, y) = d_{2i} M_i(x_2, y, 1)$$

$$D_{23}(x_2, y) = 0, \quad D_{31}(x_2, y) = -K_{12}(x_2, y) / \kappa_1$$

$$D_{33}(x_2, y) = -K_{11}(x_2, y) / \kappa_1, \quad D_{32}(x_2, y) = 0$$

$$d_{11} = -\lambda_3, \quad d_{12} = \lambda_4, \quad d_{21} = -1 / (2\mu_1), \quad d_{22} = 1 \quad (2.2)$$

$$\theta_{13} = -\kappa_2, \quad \theta_{23} = (\pi \lambda_6 E^{(1)})^{-1}, \quad \theta_{31} = \kappa_2 / \kappa_1$$

$$\theta_{32} = (\kappa_1)^{-1}, \quad \theta_{11} = \theta_{12} = \theta_{21} = \theta_{22} = \theta_{33} = 0$$

$$R_1(x_2) = -Q(x_2, \nu^{(1)}), \quad R_2(x_2) = Q(x_2, 1) / \lambda_6 E^{(1)}, \quad R_3(x_2) = 0$$

Здесь и дальше для случая жесткого сцепления $G_1(y) = q_2(y)$, $n_0 = 1$, $m = 1, 2, 3$, а для гладкого контакта $G_1(y) = 0$, $n_0 = 2$, $m = 2, 3$; $G_2(y) = U'(y)$, $G_3(y) = q_1(y)$.

Функции $D_{ij}(x_2, y)$ ($j = 1, 2$) являются неограниченными при $y \rightarrow b$, $x_2 \rightarrow \pm b$ ввиду неограниченности $M_i(x_2, y, \beta)$ в указанных точках. Это означает, что ядра уравнений системы (2.1) содержат подвижную особенность на диагонали $x_2 = y$ и неподвижную — в точках $x_2 = \pm 1$. Уравнение

аналогичной структуры было получено в [6] при исследовании заземленной полуполосы.

Для выделения особенности в явном виде представим $M_i(x_2, y, \beta)$ в форме

$$M_i(x_2, y, \beta) = M_i^\infty(x_2, y, \beta) + M_i^p(x_2, y, \beta) \quad (2.3)$$

где M_i^p является регулярной, а M_i^∞ получается в результате использования асимптотических свойств $M_i^*(x_2, y, t, \beta)/\delta_i$ при $t \rightarrow \infty$ в форме

$$M_1^\infty(x_2, y, \beta) = 2 \int_0^\infty \{ [2e_1 + \kappa'(tb - 2\beta) + (1 + 2tb - 4\beta)(b - y)t] \chi_3(t, x_2) - [\kappa' + 2(b - y)t] t x_2 \chi_4(t, x_2) \} \exp[-(2b - y)t] dt$$

$$M_2^\infty(x_2, y, \beta) = 2 \int_0^\infty \{ [2\beta - tb + (1 + 2tb - 4\beta)t(b - y)] \chi_3(t, x_2) + [1 - 2t(b - y)] t x_2 \chi_4(t, x_2) \} \exp[-(2b - y)t] dt$$

С учетом формулы интегрирования [5]:

$$\int_0^\infty t^m \exp[-(2b - y)t] \left(\frac{\text{sh } t x_2}{\text{ch } t x_2} \right) dt = \frac{d^m}{dy^m} \left[\frac{1}{(2b - y)^2 - x_2^2} \left(\frac{x_2}{2b - y} \right) \right]$$

выражения для M_i^∞ примут вид

$$M_i^\infty(x_2, y, \beta) = \left[l_{i1}(\beta) + l_{i2}(\beta)(b - x_2) \frac{d}{dx_2} - (b - x_2)^2 \frac{d^2}{dx_2^2} \right] (2b - y - x_2)^{-1} + \quad (2.4)$$

$$+ r \left[l_{i1}(\beta) - l_{i2}(\beta)(b + x_2) \frac{d}{dx_2} - (b + x_2)^2 \frac{d^2}{dx_2^2} \right] (2b - y + x_2)^{-1}$$

$$l_{11}(\beta) = 3 + 8\nu^{(1)}\beta - 2\nu^{(1)} - 10\beta, \quad l_{12}(\beta) = 2(3 - 2\nu^{(1)} + 2\beta)$$

$$l_{21}(\beta) = 1 - 2\beta, \quad l_{22}(\beta) = 2(1 + 2\beta)$$

Система (2.1) может быть представлена в виде

$$(2.5)$$

$$\sum_{n=n_0}^3 \left\{ \int_{-b}^b \left[\frac{a_{mn}}{x_2 - y} + D_{mn}^\infty(x_2, y) \right] G_n(y) dy + \pi \theta_{mn} G_n(x_2) \right\} = R_m^\circ(x_2), \quad |x_2| \leq b$$

$$D_{1i}^\infty(x_2, y) = d_{1i} M_i^\infty(x_2, y, \nu^{(1)}), \quad D_{2i}^\infty(x_2, y) = d_{2i} M_i^\infty(x_2, y, 1),$$

$$D_{m3}^\infty = D_{3m}^\infty = 0$$

$$R_m^\circ(x_2) = R_m(x_2) - \sum_{n=n_0}^3 \int_{-b}^b [D_{mn}(x_2, y) - D_{mn}^\infty(x_2, y)] G_n(y) dy$$

Функции $R_m^\circ(x_2)$ ограничены в $[-b, b]$, если $G_m(y)$ имеют интегрируемые особенности в $[-b, b]$, а $P_i(x_1)$ не являются сосредоточенными силами, действующими в углах полуполосы $x_1 = 0$.

В соответствии с [7] решение системы (2.5) ищем в форме

$$G_m(y) = G_m^*(y) (b^2 - y^2)^{-\alpha} \quad (2.6)$$

где $0 \leq \text{Re}(\alpha) < 1$, $G_m^*(y)$ удовлетворяют условиям Гельдера в окрестности $y = \pm b$. Вводя частично голоморфные функции

$$\Phi_m(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-b}^b \frac{G_m(y)}{y - z} dy \quad (2.7)$$

и используя результаты [7], имеем

$$\Phi_m(x_2) = \frac{\text{ctg } \pi \alpha}{(2b)^\alpha} \left[\frac{G_m^*(-b)}{(b + x_2)^\alpha} - \frac{G_m^*(b)}{(b - x_2)^\alpha} \right] + \Phi_{1m}^\circ(x_2), \quad x_2 \rightarrow \pm b \quad (2.8)$$

$$\Phi_m[2b+(-1)^k x_2] = -\frac{G_m^*(b)}{(2b)^\alpha [b+(-1)^k x_2] \sin \pi \alpha} + \Phi_{k,m}^\circ(x_2),$$

$$x_2 \rightarrow (-1)^{k-1} b \quad (k=1, 2) \quad (2.9)$$

Кроме того, $G_m(x_2)$ может быть представлена на основании (2.6) в форме

$$G_m(x_2) = \frac{1}{(2b)^\alpha} \left[\frac{G_m^*(-b)}{(b+x_2)^\alpha} + \frac{G_m^*(b)}{(b+x_2)^\alpha} \right] + \Phi_{i,m}^\circ(x_2), \quad x_2 \rightarrow \pm b \quad (2.10)$$

В формулах (2.8)–(2.10) $|\Phi_{lm}^\circ(z)| \leq C_{lm} |z \pm b|^{-\alpha_0}$, $\text{Re}(\alpha_0) < \text{Re}(\alpha)$, C_{lm} ($l=1-4$) — действительные константы.

Используя соотношения (2.7)–(2.10), а также учитывая свойства симметрии неизвестных функций $G_i(-x_2) = -rG_i(x_2)$, $G_3(-x_2) = rG_3(x_2)$, получаем из условия существования нетривиальных решений системы (2.5) характеристические уравнения для определения степени особенности α :

$$\begin{vmatrix} \psi_{11}(\alpha_1) & \psi_{12}(\alpha_1) & r_{13}(\alpha_1) \\ \psi_{21}(\alpha_1) & \psi_{22}(\alpha_1) & r_{23}(\alpha_1) \\ r_{31}(\alpha_1) & r_{32}(\alpha_1) & a_{33} \cos \pi \alpha_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.11)$$

$$\begin{vmatrix} \psi_{22}(\alpha_2) & r_{23}(\alpha_2) \\ r_{32}(\alpha_2) & a_{33} \cos \pi \alpha_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.12)$$

$$\psi_{1i}(\alpha) = a_{1i} \cos \pi \alpha + d_{1i} \varepsilon_i(v^{(1)}), \quad \psi_{2i}(\alpha) = a_{2i} \cos \pi \alpha + d_{2i} \varepsilon_i(1)$$

$$\varepsilon_i(\beta) = l_{ii}(\beta) + \alpha l_{i3}(\beta) - \alpha(\alpha+1), \quad r_{kj}(\alpha) = \theta_{kj} \sin \pi \alpha$$

Полученные уравнения, соответствующие случаям жесткого сцепления (2.11) и гладкого контакта (2.12), зависят от трех параметров: $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $\lambda = \mu^{(1)}/\mu^{(2)}$. В [8] указан способ сокращения числа независимых параметров до двух, а в [9, 10] при изучении особенности напряжений в углу составного клина проведено исследование уравнения (2.11). Не останавливаясь поэтому на детальном анализе указанных уравнений, проиллюстрируем характер изменения степеней особенности в зависимости от относительной жесткости полуполосы и полосы. На фиг. 2, 3 для $v^{(2)}=0,3$ и $v^{(1)}=0,3$ соответственно приведены графики изменения корней уравнений (2.11), (2.12) с максимальной действительной частью из отрезка $[0, 1]$. Параметр λ^* , описывающий относительную жесткость полуполосы и полосы, выбирался в форме $\lambda^* = \lambda$, $\lambda \geq 1$ и $\lambda^* = -\lambda^{-1}$, $\lambda < 1$.

Штриховые линии соответствуют случаю гладкого контакта, сплошные и штрихпунктирные — действительным и мнимым частям корней (2.11). Кружочки определяют точки перехода от действительных корней к комплексным. Из анализа результатов следует, что при любых значениях жесткостных параметров $\text{Re}(\alpha_i) \leq 0,5$; с ростом λ^* происходит переход α_1 из действительной области в комплексную (особенность становится осциллирующей), причем комплексная область увеличивается с ростом параметра $v^{(1)}/v^{(2)}$; при $\lambda^* \rightarrow \infty$ $\text{Re}(\alpha_i) \rightarrow 0,5$, $\text{Im}(\alpha_1) \rightarrow (2\pi)^{-1} \ln \lambda$ [7].

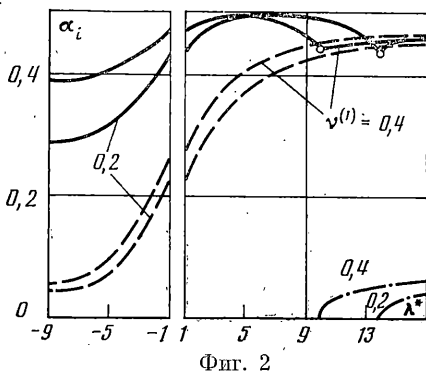
3. Для определения значений контактных напряжений и их коэффициентов интенсивности в окрестности угловых точек получим численное решение системы (2.1). Дополнительные условия для этой системы следуют из свойств симметрии неизвестных функций и условий равновесия в виде

$$\int_{-b}^b \alpha_m^*(y) G_s(y) dy = T_m, \quad \alpha_1^* = \alpha_2^* = 1 \quad (3.1)$$

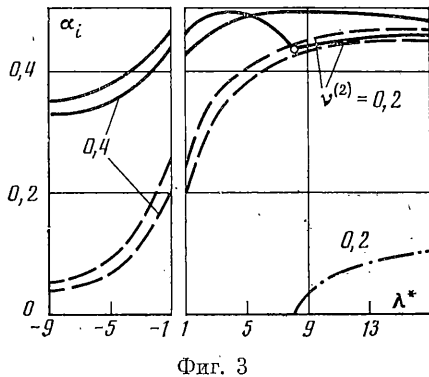
$$\alpha_3^* = \begin{Bmatrix} 1 \\ y \end{Bmatrix}, \quad T_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2P_2^\circ \end{Bmatrix}, \quad T_2 = 0$$

$$\frac{T_3}{2} = \left\{ \int_0^\infty x_1 P_2(x_1) dx_1 - h P_1^\circ \right\}, \quad P_1^\circ = \int_0^\infty P_1(x_1) dx_1$$

$s=m$, в антисимметричном случае при $m=2$ $s=3$.



Фиг. 2



Фиг. 3

Используем численный метод, основанный на квадратурной формуле наивысшей алгебраической точности Гаусса — Якоби [11]:

$$\int_{-1}^1 f(\tau) (1-\tau^2)^{-\alpha} d\tau = \sum_{h=1}^N A_h f(\tau_h) \quad (3.2)$$

$$A_h = 2^{1-2\alpha} \frac{\Gamma^2(N+1-\alpha)}{N! \Gamma(N+1-2\alpha) (1-\tau_h^2) [P_N^{(-\alpha, -\alpha)}(\tau_h)]^2}$$

Здесь τ_h — нули многочлена Якоби $P_N^{(-\alpha, -\alpha)}(\tau)$, $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Обобщение этой формулы на случай сингулярного интеграла дано в [12, 13]:

Подставляя (2.6) в (2.1), (3.1), приводя полученные соотношения к отрезку $[-1, 1]$ и используя метод коллокаций, получаем с учетом (3.2) следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{n=n_0}^3 \left\{ \sum_{h=1}^N A_h \left[\frac{a_{mn}}{z_l - \tau_h} + b D_{mn}(x_{2,l}, y_h) \right] \Lambda_n(y_h) + \right. \\ \left. + \pi \theta_{mn} \frac{\Lambda_n(x_{2,l})}{(1-z_l^2)^\alpha} = R_m(x_{2,l}), \quad \sum_{h=1}^N A_h \alpha_m^*(y_h) \Lambda_s(y_h) = \frac{T_m}{b} \right. \quad (3.3)$$

где z_l ($l=1, 2, \dots, N-1$) — нули многочлена Якоби

$$P_{N-1}^{(1-\alpha, 1-\alpha)}(z), \quad x_{2,l} = bz_l, \quad y_h = b\tau_h \\ \Lambda_m(y) = (b^2 - y^2)^\alpha G_m(y) / b^{2\alpha} \quad (3.4)$$

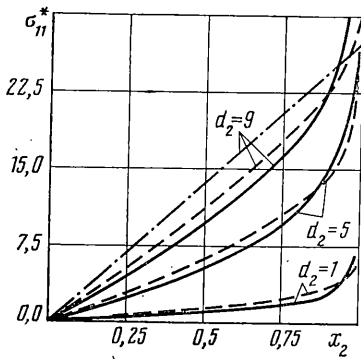
Полученная система является системой $(4-n_0)N$ уравнений с $(4-n_0)(2N-1)$ неизвестными. Однако представляя

$$\Lambda_m(y) = \sum x_{z_l - z_{l+m}}^\circ (y/b)^{l-1} \quad (l=1, N) \quad (3.5)$$

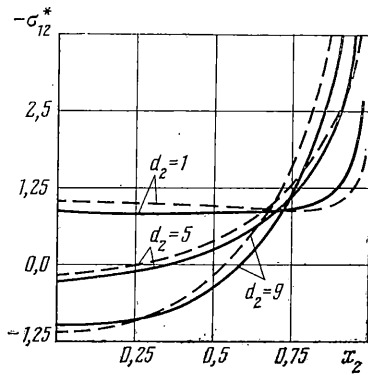
и подставляя в (3.3), получаем систему $(4-n_0)N$ уравнений с неизвестными x_k° ($k=1, 2, \dots, (4-n_0)N$). Решение этой системы совместно с формулами (3.4) позволяет определить искомые контактные напряжения.

Вводя коэффициенты интенсивности нормального и касательного на-

b/h	K_1^*	$-K_2^*$	K_1^*	$-K_2^*$	K_1^*	$-K_2^*$
$\rightarrow 0$	0,310	0,154	0,456	0,170	0,637	0,140
0,25	0,302	0,136	0,435	0,163	0,628	0,129
0,5	0,267	0,0940	0,396	0,120	0,605	0,117
1	0,223	0,0669	0,356	0,100	0,581	0,115
2	0,178	0,0458	0,331	0,0810	0,564	0,112
5	0,143	0,0369	0,313	0,0620	0,549	0,0956



Фиг. 4



Фиг. 5

пряжений в окрестности угловой точки формулами

$$K_i = \lim_{y \rightarrow b} (b-y)^\alpha \sigma_{1i}(0, y) \quad (3.6)$$

на основании (3.4), (3.5) получаем

$$K_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^\alpha \sum_{l=1}^N x_{3l}^\circ, \quad K_2 = \left(\frac{b}{2}\right)^\alpha \sum_{l=1}^N x_{3l-2}^\circ \quad (3.7)$$

В таблице для случая жесткого сцепления даны значения приведенных коэффициентов интенсивности $K_i^* = K_i/P^*b^\alpha$ ($P^* = P_0/b$), полученные в случае действия на полуполосу продольной симметричной нагрузки $P_1(x_1) = P_0\delta(x_1-d_1)$, $P_2(x_1) = 0$ при $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0,3$, $d_1/h = 5$. Первый и второй столбики соответствуют $\lambda = 5$, $\alpha_1 = 0,498$, третий и четвертый $-\lambda = 1$, $\alpha_1 = 0,455$, пятый и шестой $-\lambda = 0,2$, $\alpha_1 = 0,366$. Из приведенных результатов следует, что K_i^* возрастают с уменьшением b/h , стремясь при $b/h \rightarrow 0$ к значениям, соответствующим упругому контакту полуполосы и полуплоскости; с ростом относительной жесткости полосы (уменьшением λ) влияние b/h на значения K_i^* уменьшается и при $\lambda \rightarrow 0$ (для любых b/h) $K_1^* \rightarrow 0,524$, $K_2^* \rightarrow -0,162$, что соответствует случаю защемленной полуполосы.

На фиг. 4, 5 показаны значения напряжений $\sigma_{1i}^*(x_2) = \sigma_{1i}^{(1)}(0, x_2)/P_0$, обусловленных действием антисимметричной поперечной сосредоточенной нагрузки $P_1(x_1) = 0$, $P_2(x_1) = P_0\delta(x_1-d_2)$, приложенной на различных расстояниях d_2 от области контакта при $b=h=1$, $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0,3$. Этот пример соответствует практически важному случаю изгиба балки, один конец которой жестко сцеплен с упругой опорой. Сплошные линии построены для $\lambda = 1$ ($\alpha = 0,455$), пунктирные — для предельного случая защемленной полуполосы ($\lambda \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0,295$). Штрихпунктирная линия на фиг. 4 соответствует расчету полуполосы по балочной теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Adams G. G., Bogy D. B. The plane solution for the elastic contact problem of a semi-infinite strip and half plane.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1976, v. 43, No. 4, p. 603–607.
2. Adams G. G., Bogy D. B. The plane symmetric contact problem for dissimilar elastic semi-infinite strips of different widths.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1977, v. 44, No. 4, p. 604–610.
3. Adams G. G. A semi-infinite elastic strip bonded to an infinite strip.— Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1980, v. 47, No. 4, p. 789–794.
4. Грантер К. Интегральные преобразования в математической физике. М.: Гостехиздат, 1956. 204 с.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
6. Воронич И. И., Копасенко В. В. Некоторые задачи теории упругости для полуполосы.— ПММ, 1966, т. 30, вып. 1, с. 109–115.
7. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
8. Dundurs J. Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading: Discussion.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1969, v. 36, No. 3,

- р. 650–652. – Рус. перев.: Прикл. механика. Тр. Амер. о-ва инж.-мех., 1969, № 3, с. 283–285.
9. *Bogy D. B.* Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions. – Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1971, v. 38, No. 2, p. 377–386. – Рус. перев.: Прикл. механика. Тр. Амер. о-ва инж.-мех., 1971, № 2, с. 87–96.
10. *Луцкий О. Н.* О поведении корней уравнения, определяющего особенности напряженного состояния в окрестности вершины составного клина. – Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 5, с. 82–92.
11. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов. М.: Физматгиз, 1959. 327 с.
12. *Корнейчук А. А.* Квадратурные формулы для сингулярных интегралов. – В кн.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М.: Наука, 1964, с. 64–74.
13. *Erdogan F., Gupta G. D., Cook T. S.* Numerical solution of singular integral equations. In: Mechanics of Fracture. V. 1. Methods of analysis and solutions of crack problems/Ed. G. C. Sih. Leyden: Noordhoff, 1973, p. 368–425.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
6.III.1985