

УДК 531.8

ДИНАМИКА УПРУГОГО МАНИПУЛЯТОРА С ЭЛЕКТРОПРИВОДОМ

БУРКОВ И. В., ЗАРЕМБА А. Т.

При исследовании управляемых движений упругих манипуляционных систем в качестве управляющих воздействий рассматривают углы [1–4] в шарнирах манипулятора (кинематическое управление) или моменты [2, 5–7] в шарнирах манипулятора (динамическое управление). В квазистатическом приближении при кинематическом управлении движение упругого манипулятора с грузом носит колебательный характер, а при динамическом управлении упругая податливость конструкции манипулятора приводит к возникновению возмущающих моментов в шарнирах и вносит погрешность в показания датчиков углов. Для более точной оценки возникающих упругих отклонений и определения собственных частот в модели системы упругий манипулятор – груз необходимо учитывать уравнение привода и закон формирования управляющих воздействий.

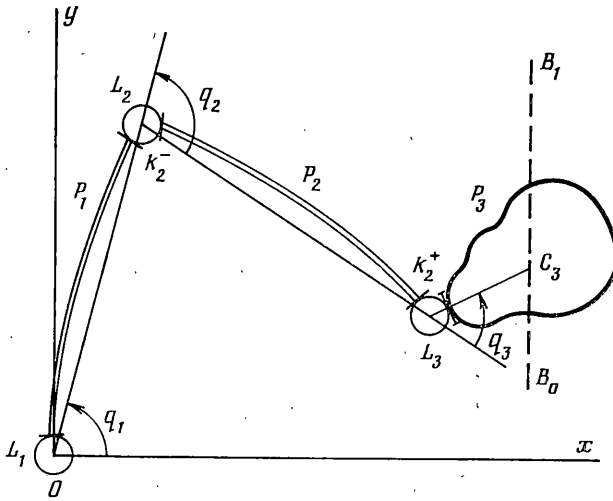
В публикуемой работе в квазистатическом приближении получены уравнения движения плоского упругого манипулятора с учетом динамики приводов при ограничении на максимальные моменты, развиваемые электродвигателями в шарнирах, и нелинейности контура обратной связи по скорости; численным моделированием на ЭВМ исследуются управляемые движения манипулятора для программных законов управления и законов управления с обратной связью по положению и по скорости; проведен расчет собственных частот.

1. Рассматривается механическая модель манипулятора (фиг. 1), совершающего движение в плоскости Oxy и представляющего собой два прямолинейных упругих стержня P_1, P_2 , присоединенных к цилиндрическим шарнирам L_1, L_2, L_3 при помощи фланцев, характеризующихся сосредоточенными жесткостями k_i^-, k_i^+ ($i=1, 2$). Фланец k_0^+ присоединяет шарнир L_1 к неподвижному основанию, а фланец k_3^- соединяет шарнир L_3 с грузом P_3 , массо-инерционные характеристики m_3 и Θ_3 которого считаются заданными. В шарнирах манипулятора расположены электродвигатели постоянного тока с независимым возбуждением, которые развивают на валах моменты M_1, M_2, M_3 , не превышающие по абсолютной величине максимально допустимых значений $|M_i| \leq M_{oi}$ ($i=1, 2, 3$). Упругие деформации звеньев манипулятора являются малыми и описываются в рамках линейной теории тонких прямолинейных нерастяжимых стержней [8].

В дальнейшем предполагается, что выполнено одно из следующих двух условий: масса груза намного превышает массу манипулятора; характерная жесткость фланцевых соединений намного меньше характерной жесткости упругих стержней.

В первом случае кинетическая энергия манипулятора мала по сравнению с кинетической энергией груза, частоты собственных колебаний стержней намного превышают частоты упругих колебаний, обусловленные наличием груза, и, следовательно, систему можно рассматривать в квазистатическом приближении, т. е. полагая, что упругие звенья в каждый момент времени находятся в равновесии. При этом эффектами, обусловленными действием центробежных сил на упругие стержни, можно пренебречь, так как предполагается, что угловые скорости звеньев малы по сравнению с низшей частотой квазистатических колебаний [1, 3] системы упругий манипулятор – груз.

Второй случай позволяет исследовать динамику упругого манипулятора с грузом, когда масса перемещаемого груза сравнима с массой манипулятора, а упругая податливость конструкции в основном обусловлена наличием фланцев.



Фиг. 1

Для описания движения системы в качестве обобщенных координат выберем [7] углы q_1, q_2, q_3 (фиг. 1), где q_1 — угол между осью Ox и прямой L_1L_2 , q_2 — угол между прямыми L_1L_2 и L_2L_3 , q_3 — угол между прямой L_2L_3 и прямой L_3C_3 , соединяющей шарнир L_3 с центром масс C_3 груза P_3 . В переменных q движение упругого манипулятора с грузом описывается уравнением

$$A(q)q'' + b(q, q') = nM - Jn\varphi_r'' \quad (1.1)$$

левая часть которого по виду совпадает с уравнением движения манипулятора с абсолютно жесткими звеньями, где A — матрица кинетической энергии размерности 3×3 , b — вектор (1×3) квадратичных членов, $n = \text{diag}\{n_1, n_2, n_3\}$, $J = \text{diag}\{J_1, J_2, J_3\}$ — диагональные матрицы передаточных соотношений редукторов двигателей и моментов инерции роторов двигателей, φ_r — вектор (1×3) углов поворота роторов двигателей, причем M — вектор (1×3) моментов на валах двигателей — определяется из уравнения [9]:

$$T_m M' + M + C_R C_I \varphi_r' = C_R U_m \quad (1.2)$$

Здесь U_m — вектор (1×3) напряжений якорных цепей двигателей, $C_R = \text{diag}\{C_{R1}, C_{R2}, C_{R3}\}$, $C_I = \text{diag}\{C_{I1}, C_{I2}, C_{I3}\}$, $T_m = \text{diag}\{T_{m1}, T_{m2}, T_{m3}\}$; T_{mi} — электромагнитная постоянная времени якорной цепи двигателя, C_{Ri}, C_{Ii} — конструктивные параметры двигателя, i — номер шарнира, приводимого в движение данным двигателем ($i=1, 2, 3$). В (1.2) вектор U_m формируется как разность между управляющим напряжением U_c , подаваемым на входы электроприводов, и сигналами датчиков угловых скоростей двигателей

$$U_m = K(U_c - C_T \varphi_r') \quad (1.3)$$

а его составляющие не превышают максимально допустимых значений

$$|U_{mi}| \leq U_{0i} \quad (i=1, 2, 3) \quad (1.4)$$

где $K = \text{diag}\{K_1, K_2, K_3\}$, $C_T = \text{diag}\{C_{T1}, C_{T2}, C_{T3}\}$ — диагональные матрицы коэффициентов усиления и параметров датчиков угловых скоростей, U_0 — вектор (1×3) максимальных напряжений якорных цепей двигателей.

Уравнение вращения роторов двигателей под воздействием электромагнитного момента M и упругого момента редукторов имеет вид

$$J\varphi_r'' + n^{-1}C_r(n^{-1}\varphi_r - \varphi) = M \quad (1.5)$$

где φ — вектор (1×3) углов в шарнирах манипулятора, $C_r = \text{diag}\{C_{r1}, C_{r2}, C_{r3}\}$ — диагональная матрица приведенных к шарниру жесткостей редукторов, а связь между векторами φ и q находится из условия равновесия звеньев манипулятора и определяется упругой податливостью конструк-

ции и моментами, развиваемыми двигателями в шарнирах

$$C_M(\varphi - \mathbf{q}) = n\mathbf{M} - Jn\varphi_r \quad (1.6)$$

Здесь C_M — симметричная матрица размерности 3×3 потенциальной энергии упругой деформации звеньев манипулятора в переменных $\mathbf{q}^v = \varphi - \mathbf{q}$.

Предполагая, что характерное время переходных процессов в системе $t_r = \|Jn^2 C^{-1}\|^{1/2}$, определяемое инерционностью роторов двигателей, много меньше характерного времени $t_M = \|AC^{-1}\|^{1/2}$, определяемого инерционностью манипулятора с грузом, т. е. выполнено неравенство $t_r \ll t_M$ или эквивалентное неравенство $\|Jn^2 A^{-1}\| \ll 1$, где $\|\cdot\|$ — евклидова матричная норма, пренебрегаем в (1.5), (1.6) инерционными членами, пропорциональными φ_r , и находим связь между векторами φ_r и \mathbf{q} :

$$n^{-1}\varphi_r = \mathbf{q} + C^{-1}n\mathbf{M} \quad (1.7)$$

Здесь $C^{-1} = C_M^{-1} + C_r^{-1}$ — трехдиагональная матрица (3×3), элементы которой равны [7]:

$$C_{ii}^{-1} = C_{pi}^{-1} + C_{pi-1}^{-1} + C_{ri}^{-1} + (k_i^-)^{-1} + (k_{i-1}^+)^{-1} \quad (i=1, 2, 3)$$

$$C_{13}^{-1} = C_{31}^{-1} = 0, \quad C_{ii+1}^{-1} = C_{i+1i}^{-1} = 1/2C_{pi} \quad (i=1, 2) \quad (1.8)$$

В (1.8) $C_{pi} = 3E_i I_i / l_i$ — жесткость на изгиб i -го упругого звена, причем выполнено $C_{p0}^{-1} = C_{p3}^{-1} = 0$, а C_{ri} — жесткость редуктора i -го шарнира — в дальнейшем будет учитываться совместно с жесткостью одного из фланцев $1/(k_i^+)' = 1/(k_i^+) + 1/C_{ri}$.

Подставляя соотношение (1.7) в (1.1)–(1.3) и опуская малые члены порядка $\|Jn^2 C^{-1}\|$, находим уравнения, описывающие движение упругого манипулятора с грузом и изменение моментов на валах двигателей соответственно

$$A(\mathbf{q})\mathbf{q}'' + \mathbf{b}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = n\mathbf{M} \quad (1.9)$$

$$(n^{-1}RC^{-1}n + T_m)\mathbf{M}' + \mathbf{M} + Rn^{-1}\mathbf{q}' = C_R \alpha K U_c$$

$$\alpha_i = 1, \quad |\delta_i| \leq U_{0i}; \quad \alpha_i \delta_i = \text{sign}(\delta_i) U_{0i}$$

$$|\delta_i| > U_{0i} \quad (i=1, 2, 3)$$

$$\delta_i = K_i (U_{ci} - C_{ri} n_i (q_i' + (C^{-1} n \mathbf{M}')_i))$$

где $\alpha = \text{diag}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $R = C_R n^2 (C_i + \alpha K C_r)$ — диагональная матрица (3×3).

Введем в уравнениях (1.9) безразмерные (обозначенные штрихами) переменные при помощи соотношений

$$t' = \nu t, \quad \nu = (C_0 / m_0 L^2)^{1/2}, \quad R' = \nu C_0^{-1} R$$

$$T_m' = \nu T_m, \quad U_c' = U_0^{-1} U_c, \quad A' = m_0^{-1} L^{-2} A$$

$$\mathbf{b}' = m_0^{-1} L^{-2} \nu^{-2} \mathbf{b}, \quad \mathbf{M}' = n C_0^{-1} \mathbf{M}, \quad C_r' = n \nu U_0^{-1} C_r \quad (1.10)$$

Здесь $U_0^{-1} = \text{diag}\{U_{01}^{-1}, U_{02}^{-1}, U_{03}^{-1}\}$, C_0 — характерная жесткость, L — характерный линейный размер, m_0 — характерное значение массы упругого манипулятора с грузом.

После преобразований и последующего опускания штрихов получаем систему уравнений движения и ограничений вида

$$A(\mathbf{q})\mathbf{q}'' + \mathbf{b}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \mathbf{M}, \quad |M_i| \leq \varepsilon_{1i} \quad (1.11)$$

$$(RC^{-1} + T_m)\mathbf{M}' + \mathbf{M} + R\mathbf{q}' = \varepsilon_2 \alpha U_c$$

$$\alpha_i = 1, \quad |\delta_i| \leq 1; \quad \alpha_i \delta_i = \text{sign}(\delta_i), \quad |\delta_i| > 1$$

$$\delta_i = K_i (U_{ci} - C_{ri} (q_i' + (C^{-1} \mathbf{M}')_i)) \quad (i=1, 2, 3)$$

коэффициенты которой содержат следующие безразмерные параметры:

$$m_i^0 = m_i m_0^{-1}, \quad \Theta_i^0 = \Theta_i m_0^{-1} L^{-2}, \quad l_i^0 = L^{-1} l_i \quad (1.12)$$

$$l_{ci}^{\circ} = L^{-1} l_{ci}, \quad \varepsilon_{1i} = n_i M_{0i} C_0^{-1}, \quad \varepsilon_{2i} = n_i C_0^{-1} C_{Ri} K_i U_{0i}$$

$$\xi_i^{-1} = C_0 C_{pi}^{-1}, \quad \zeta_i = k_i^{-} k_{i-1}^{+} / (k_i^{-} + k_{i-1}^{+}) C_0 \quad (i=1, 2, 3)$$

где m_i° , Θ_i° — безразмерные значения массы и центрального момента инерции звена, l_i° , l_{ci}° — безразмерные значения длины звена и расстояния от центра масс звена до левого конца звена, ε_{1i} — отношение максимального управляющего момента к характерной жесткости, ξ_i , ζ_i — безразмерные значения распределенных и сосредоточенных жесткостей манипулятора, i — номер звена, причем массо-инерционные характеристики груза учитываются совместно с массо-инерционными характеристиками третьего звена ($i=1, 2, 3$).

Система уравнений и ограничений (1.11) используется при моделировании управляемых движений упругого манипулятора с учетом динамики приводов.

2. Исследование управляемых движений упругого манипулятора проводилось для программного закона управления

$$U_{cp} = \varepsilon_2^{-1} [Rq_p \dot{} + Aq_p \ddot{} + b(q, \dot{q})] \quad (2.1)$$

и закона управления с обратной связью по положению и скорости [10]

$$U_c = U_{cp} + \varepsilon_2^{-1} A [\Gamma_1(\dot{q} - \dot{q}_p) + \Gamma_0(q - q_p)] \quad (2.2)$$

где q_p , \dot{q}_p , \ddot{q}_p — программные траектории, скорость и ускорение, Γ_0 , Γ_1 — матрицы ($N \times N$) параметров алгоритма управления, такие, что матрица

$$\Gamma = \begin{vmatrix} 0 & E_N \\ \Gamma_0 & \Gamma_1 \end{vmatrix}$$

размерности ($2N \times 2N$) удовлетворяет условию Гурвица, т. е. корни уравнения $|\lambda^2 E_N - \lambda \Gamma_1 - \Gamma_0| = 0$ лежат слева от мнимой оси, где N — число степеней подвижности манипулятора, E_N — единичная матрица ($N \times N$).

Построение программной траектории движения манипулятора состоит из следующих этапов: планируется движение схвата манипулятора в декартовом пространстве (движение происходит по прямой или дуге окружности в заданную целевую точку с известной ориентацией схвата в конечный момент времени); производится разметка декартовой траектории по времени (движение состоит из участка разгона, участка движения с постоянной скоростью и участка торможения); в узловых точках траектории решается обратная кинематическая задача, т. е. по известному положению и ориентации схвата в декартовом пространстве определяются значения углов в шарнирах манипулятора.

Вычисление значений $q_p(t)$, $\dot{q}_p(t)$, $\ddot{q}_p(t)$ в произвольный момент времени t по известным значениям $q_{pi}^j(t_j)$ ($i=1, \dots, N$, $j=1, \dots, l$) в узловых точках траектории производится методом кубической сплайн-интерполяции [11] с граничными условиями на первые и вторые производные в начальный и конечный моменты времени

$$q_{pi}^{1*}(t_1) = d_{i1}^1, \quad q_{pi}^{1**}(t_1) = d_{i2}^1, \quad q_{pi}^{l*}(t_l) = d_{i1}^l, \quad q_{pi}^{l**}(t_l) = d_{i2}^l \quad (2.3)$$

Для выполнения граничных условий (2.3) на первом и последнем интервалах времени вводятся промежуточные узловые точки

$$x_1 = t_1, \quad x_2 = 1/2(t_1 + t_2), \quad x_3 = t_2, \dots$$

$$x_i = t_{i-1}, \quad x_{i+1} = 1/2(t_{i-1} + t_i), \quad x_{i+2} = t_i \quad (2.4)$$

$$f_i^1 = q_{pi}^1, \quad f_i^3 = q_{pi}^2, \dots, f_i^l = q_{pi}^{l-1}, \quad f_i^{l+2} = q_{pi}^l$$

где x_j , $j=1, \dots, l+2$ — узловые точки траектории с учетом двух дополнительных узлов, f_i^j — значение i -й компоненты вектора q в j -м узле траектории.

Используя обозначения $h_j = x_{j+1} - x_j$, $\mu_j = h_{j-1} / (h_{j-1} + h_j)$, $\lambda_j = 1 - \mu_j$, $m_i^j = q_{pi}^j$, где $m_i^1 = d_{i1}^1$, $m_i^{l+2} = d_{i1}^l$, задачу сплайн-интерполяции можно

свести к решению системы линейных уравнений вида

$$\begin{aligned}
 2d_{i1}^1 + m_i^2 &= 3(f_i^2 - f_i^1)/h_{i-1}^{-1/2} h_i d_{i2}^1 \\
 \lambda_2 d_{i1}^1 + 2m_i^2 + \mu_2 m_i^3 &= \beta_i^2 \\
 \lambda_j m_i^{j-1} + 2m_i^j + \mu_i m_i^{j+1} &= \beta_i^j \quad (j=3, \dots, l) \\
 \lambda_{l+1} m_i^l + 2m_i^{l+1} + \mu_{l+1} d_{i1}^l &= \beta_i^{l+1} \\
 \mu_{l+1} + 2d_{i1}^l &= 3(f_i^{l+2} - f_i^{l+1})/h_{l+1}^{-1/2} h_{l+1} d_{i2}^l \\
 \beta_i^j &= 3[\mu_j(f_i^{j+1} - f_i^j)/h_j + \lambda_j(f_i^j - f_i^{j-1})/h_{j-1}] \quad (i=1, \dots, N).
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

Система (2.5) имеет относительно переменных $y_i(f_i^2, m_i^2, \dots, m_i^{l+1}, f_i^{l+1})$ трехдиагональный вид и решается методом прогонки [14]. Значение слайна и его первой производной в узловых точках траектории определяется на отрезке $[t_1, t_l]$ программную траекторию $\mathbf{q}_p(t) \in C^2[t_1, t_l]$, для которой выполнены заданные граничные условия (2.3).

3. Рассмотрим уравнения движения (1.11) системы упругий манипулятор — электропривод при нулевом управляющем воздействии $U_0(t) = 0$. Постоянное решение $\mathbf{q} = \text{const}$, $\mathbf{M} = 0$ удовлетворяет уравнениям (1.11) при нулевой правой части, т. е. любая допустимая конфигурация манипулятора является положением равновесия. Обозначим через $\mathbf{q}' = \mathbf{q} - \mathbf{q}_0$ величину малого отклонения обобщенных координат упругого манипулятора от положения равновесия и подставим выражение для момента, определяемое первым уравнением (1.11), во второе уравнение (1.11), описывающее динамику электропривода. Предполагается, что для достаточно малых отклонений от положения равновесия выполняются ограничения на максимальные моменты в шарнирах и $|\delta_i| \leq 1$ ($i=1, 2, 3$). Отбрасывая в полученном уравнении нелинейные члены $|\mathbf{q}''|^2$, $|\mathbf{q}'||\mathbf{q}'''|$ более высокого порядка малости, получаем уравнение (штрихи опускаем), описывающее малые колебания системы

$$(RC^{-1} + T_m)A(\mathbf{q}_0)\mathbf{q}''' + A(\mathbf{q}_0)\mathbf{q}'' + R\mathbf{q}' = 0
 \tag{3.1}$$

Умножая (3.1) на CR^{-1} , находим

$$(CR^{-1}T_m + E)A(\mathbf{q}_0)\mathbf{q}''' + CR^{-1}A(\mathbf{q}_0)\mathbf{q}'' + C\mathbf{q}' = 0
 \tag{3.2}$$

Здесь E — единичная матрица (3×3), C — симметричная положительно-определенная матрица (3×3) потенциальной энергии упругой деформации манипулятора

$$C = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \zeta_{12} \left[(1 + \eta_2)(1 + \eta_3) - \frac{1/4 \eta_2 \eta_3}{1 + \xi^{-1}} \right] & -1/2 \eta_1 (1 + \eta_3) & 1/4 \eta_1 \eta_3 \\ -1/2 \eta_1 (1 + \eta_3) & (1 + \eta_1)(1 + \eta_3) & -1/2 (1 + \eta_1) \eta_3 \\ 1/4 \eta_1 \eta_3 & -1/2 (1 + \eta_1) \eta_3 & \zeta_{32} \left[(1 + \eta_1)(1 + \eta_2) - \frac{1/4 \eta_1 \eta_2}{(1 + \xi)} \right] \end{vmatrix}
 \tag{3.3}$$

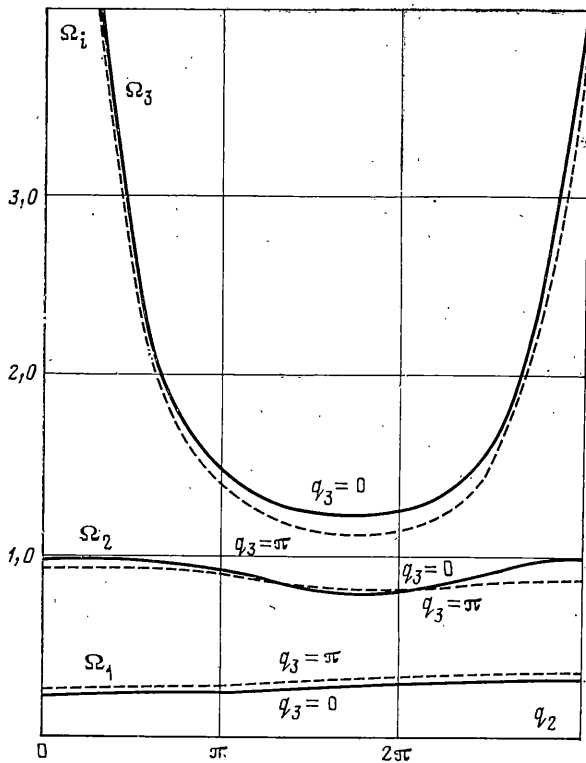
$$\Delta = (1 + \eta_1)(1 + \eta_2)(1 + \eta_3) - 1/4 \eta_1 \eta_2 (1 + \eta_3) / (1 + \xi)^{-1/4} (1 + \eta_1) \eta_2 \eta_3 / (1 + \xi^{-1})$$

$$\zeta_{12} = \zeta_1 / \zeta_2, \quad \zeta_{32} = \zeta_3 / \zeta_2, \quad \xi = \xi_1 (\xi_2)^{-1}$$

$$\eta_1 = \zeta_1 (\xi_1)^{-1}, \quad \eta_2 = \zeta_2 (\xi_{12})^{-1}, \quad \eta_3 = \zeta_3 (\xi_2)^{-1}$$

$$\xi_{12} = \xi_1 \xi_2 / (\xi_1 + \xi_2), \quad k_i = k_i^- k_{i-1}^+ / (k_i^- + k_{i-1}^+) \quad (i=1, 2, 3)$$

где в качестве характерной жесткости выбрана величина сосредоточенной жесткости второго шарнира $C_0 = k_2$. Отметим, что в случае $\eta \rightarrow 0$, т. е. когда сосредоточенная жесткость фланцев значительно меньше распределенной жесткости звеньев, матрица C принимает диагональный вид $C' = \text{diag} \times \{\zeta_{12}, 1, \zeta_{32}\}$. В другом предельном случае $\eta \rightarrow \infty$, когда упругость конструкции в основном обусловлена распределенной упругостью звеньев, мат-



Фиг. 2

рица C равна

$$C'' = \begin{vmatrix} 1/3 + \xi & -2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 4/3 & -2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 4/3 + \xi^{-1} \end{vmatrix} \quad (3.4)$$

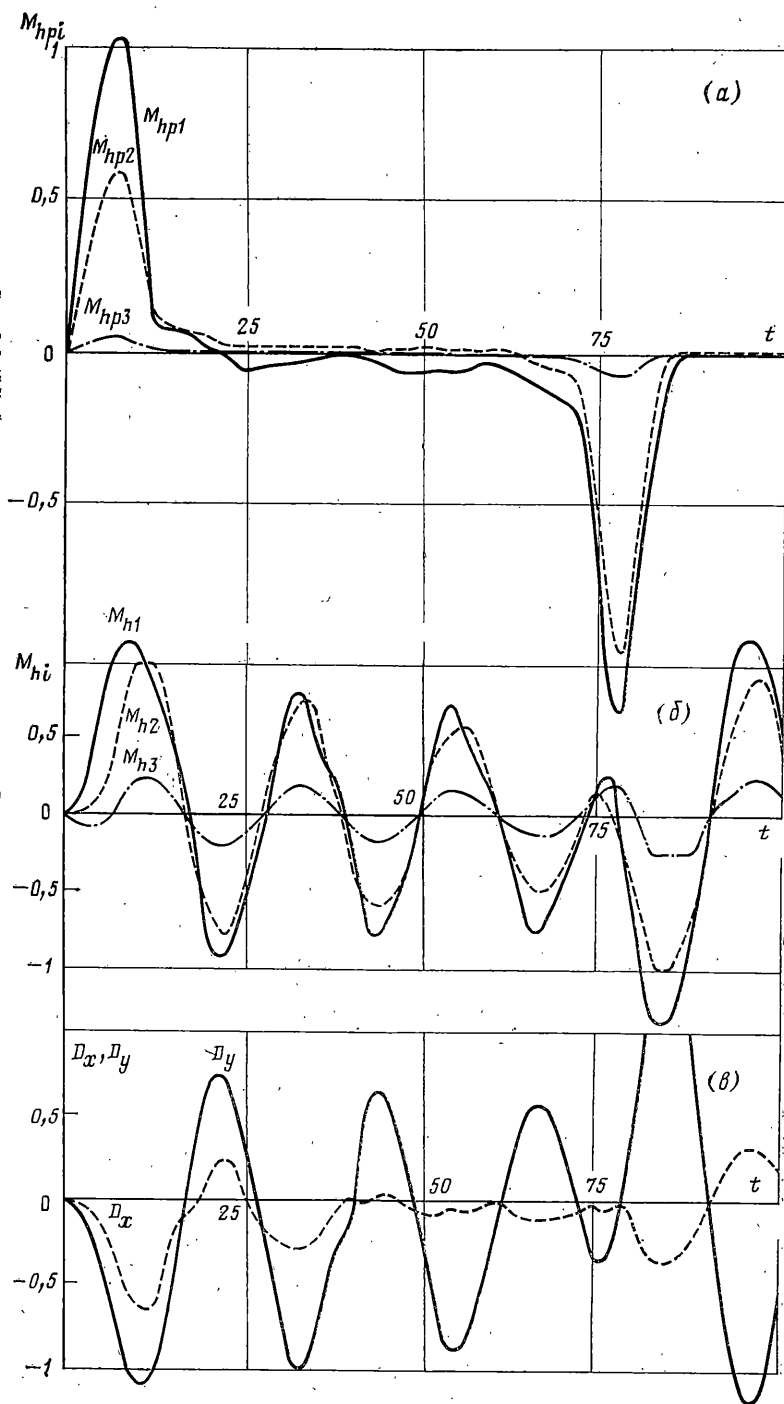
причем в качестве характерной жесткости системы выбрана приведенная жесткость звеньев C_{p12} .

Для определения собственных частот упругих колебаний манипулятора с электроприводом подставим в (3.2) общее решение вида $\mathbf{q} = \mathbf{U}e^{\lambda t}$. В результате находим алгебраическое уравнение девятого порядка

$$\det[(CR^{-1}T_m + E)A\lambda^3 + CR^{-1}A\lambda^2 + C\lambda] = 0 \quad (3.5)$$

имеющее три нулевых корня $\lambda_i = 0$ ($i=1, 2, 3$). Сокращая (3.5) на λ^3 , получаем уравнение, корни которого в силу положительной определенности матриц A, R, C имеют [12] отрицательную вещественную часть $\text{Re } \lambda_i < 0$, $i=4, 9$. Следовательно, положение равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{q}' = \mathbf{q}'' = 0$ манипулятора с электроприводом асимптотически устойчиво относительно скоростей и ускорений и просто устойчиво относительно координат. При этом матричный коэффициент $CR^{-1}A$ при второй степени λ , определяющий диссипацию энергии в системе, пропорционален сопротивлениям якорных цепей электродвигателей, в которых происходит тепловыделение при малых колебаниях. Отметим, что при увеличении крутизны механической характеристики электропривода ($R \rightarrow \infty$) система будет близка к консервативной, а собственные частоты упругих колебаний определяются матрицами A и C — кинетической и потенциальной энергии упругой деформации манипулятора.

В качестве примера рассмотрим результаты расчета собственных частот упругих колебаний манипулятора с грузом. Корни уравнения (3.5) определялись методом наискорейшего спуска [13]. При этом коэффициенты алгебраического уравнения (3.5) удобно вычислять определяя значение детерминанта (3.5) в произвольных по-



Фиг. 3

парно неравных точках $\lambda_1, \dots, \lambda_6$ и далее решая задачу полиномиальной интерполяции.

На фиг. 2 приведены зависимости собственных частот $\Omega_i(q_2)$ ($i=1, 2, 3$) упругого манипулятора с грузом от переменной q_2 , причем сплошная линия соответствует значению $q_3=0$, а штриховая — $q_3=\pi$. Значение безразмерных параметров, для которых проводились вычисления, приведены в п. 4. Отметим, что для конфигураций манипулятора, симметричных относительно положения $q_2=q_3=0$, собственные частоты системы равны, т. е. выполняются соотношения $\Omega_i(q_2, q_3) = \Omega_i(-q_2, -q_3)$ ($i=1, 2, 3$). При этом для вырожденных конфигураций манипулятора значение третьей частоты Ω_3 принимает конечное значение, равное $\Omega_3(0, 0) \approx \Omega_3(\pi, 0) \approx \Omega_3(0, \pi) \approx \Omega_3(\pi, \pi) \approx 14$.

4. Приведем результаты численного моделирования уравнений (1.11) движения упругого манипулятора с электроприводом, проведенного для значений безразмер-

ных параметров системы:

T_m	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$3,1 \cdot 10^{-3}$
m°	$4,7 \cdot 10^{-3}$	$4,7 \cdot 10^{-3}$	1,0
I°	0,67	0,67	0,04
I_c°	0,33	0,40	0,02
θ°	$2,1 \cdot 10^{-3}$	$1,9 \cdot 10^{-4}$	$1,4 \cdot 10^{-1}$
ε	1,08	0,98	∞
ε_2	0,27	0,09	0,17
ε_1	$1,4 \cdot 10^{-3}$	$9,0 \cdot 10^{-4}$	$4,0 \cdot 10^{-4}$
ε_2	7,0	5,8	4,2
R	12,6	8,6	4,6

где номер столбца таблицы соответствует номеру звена манипулятора.

Численное интегрирование уравнений (1.11) проводилось методом Рунге – Кутты с автоматическим выбором шага и контролем точности для программного закона управления (2.1) по траектории, представляющей собой вертикальную прямую из точки B_0 (0,86; 0,104) в точку B_1 (0,86; 0,704) (фиг. 1). Движение по траектории состояло из четырех участков: участка разгона при $0 \leq t \leq 14,2$; участка движения с постоянной скоростью при $14,2 < t \leq 71,4$; участка торможения при $71,4 < t \leq 83,7$; участка движения с нулевым управлением при $83,7 < t \leq 104,7$.

На фиг. 3, а приведены зависимости от времени программных моментов $M_{лpi}$ ($i=1, 2, 3$) в шарнирах манипулятора, которые достигают максимальных (минимальных) значений на участках разгона (торможения), а на участке движения с постоянной скоростью незначительны, так как определяются центростремительными и кориолисовыми ускорениями звеньев манипулятора. На фиг. 3, б представлены зависимости от времени реальных моментов $M_{ли}$ ($i=1, 2, 3$), развиваемых электродвигателями в шарнирах манипулятора. Отметим, что вследствие упругости конструкции манипулятора и «сильной» обратной связи по скорости изменение реальных моментов в шарнирах носит колебательный характер с выходом на ограничения по моменту при $9,5 \leq t \leq 12$ и $83,3 \leq t \leq 88$. На фиг. 3, в представлены упругие отклонения от программного движения (Dx – по оси Ox и Dy – по оси Oy) центра масс груза при перемещении по программной траектории. Упругие отклонения нарастают на участках разгона и торможения, на участке движения с постоянной скоростью у отклонения Dx прослеживаются высшие частоты колебаний, а на участке движения с нулевым управлением наблюдается слабое демпфирование колебаний. Следует отметить, что значение низшей частоты упругих колебаний манипулятора с грузом, полученное в результате численного моделирования, хорошо согласуется с результатами расчета собственных частот системы, приведенными на фиг. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акуленко Л. Д., Михайлов С. А., Черноусько Ф. Л. Моделирование динамики манипулятора с упругими звеньями. – Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 3, с. 118–124.
2. Черноусько Ф. Л. Динамика управляемых движений упругого манипулятора. – Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1981, № 5, с. 142–152.
3. Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н. Об управляемом вращении упругого стержня. – ПММ, 1982, т. 46, вып. 4, с. 587–595.
4. Михайлов С. А., Черноусько Ф. Л. Исследование динамики манипулятора с упругими звеньями. – Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 2, с. 51–58.
5. Лакога Н. А., Рахманов Е. В., Шведов В. Н. Управление упругим манипулятором на траектории. – Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1980, № 2, с. 53–59.
6. Михайлов С. А., Черноусько Ф. Л. Динамика упругого манипулятора при заданных управляющих моментах или движениях перемещаемого груза. – Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 5, с. 19–25.
7. Заремба А. Т. Динамическая модель плоского упругого манипулятора. – Изв. АН СССР. МТТ, 1985, № 5, с. 22–30.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 384 с.
9. Чиликин М. Г., Ключев В. И., Сандлер А. С. Теория автоматизированного электропривода. М.: Энергия, 1979. 616 с.
10. Динамика управления роботами/Под ред. Е. И. Юревича. М.: Наука, 1984. 336 с.
11. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
12. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1976. 320 с.
13. Ланс Дж. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 208 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
22.VII.1985