МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 1987

УДК 531.384

ОБ АНАЛОГИИ МЕЖДУ ДВУМЯ КЛАССИЧЕСКИМИ ЗАДАЧАМИ МЕХАНИКИ

МОЩУК Н. К.

Рассматриваются две задачи механики: задача о движении по неподвижной абсолютно гладкой плоскости твердого тела произвольной формы, центральный эллипсоид инерции которого — сфера, и задача о движении материальной точки по неподвижной гладкой поверхности. Показано, что если в первой задаче постоянная первого интеграла — вертикальной компоненты вектора момента количеств движения тела — равна нулю, то она сводится к исследованию движения материальной точки по некоторой поверхности в подходящем центральном силовом поле на нулевом уровне энергии.

Приведена геометрическая интерпретация полученной аналогии.

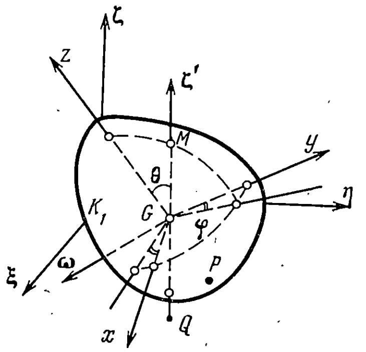
Ранее подобная аналогия была установлена для следующих интегрируемых задач: в [1] для сферического и плоского движения материальной точки, в [2] для задачи о вращении твердого тела в случае Бруна [1] и задачи о движении по инерции материальной точки по трехосному эллипсоиду [1, 3].

1. Пусть под действием начального толчка твердое тело произвольной формы движется по неподвижной абсолютно гладкой горизонтальной плоскости [4]. Предполагаем, что поверхность K_1 (фиг. 1), ограничивающая тело,— достаточно гладкое, строго выпуклое подмногообразие R^3, диффеоморфное сфере S^2. Вследствие этого тело при своем движении может касаться опорной плоскости только одной точкой P своей поверхности. Считаем, что движение тела происходит в однородном поле тяжести.

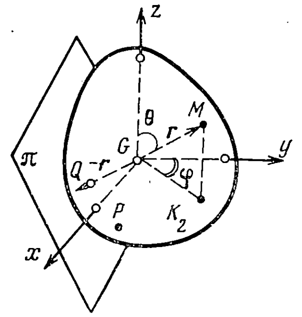
Пусть центральный эллипсоид инерции тела — сфера, $I=ml^2$ (где m — масса тела, а l — радиус инерции) — момент инерции тела относительно любой оси, проходящей через центр масс G. Положение тела будем задавать координатами ξ, η, ζ его центра масс G в неподвижной системе координат $O\xi\eta\zeta$ (плоскость $\zeta=0$ — опорная плоскость), а также углами Эйлера ψ, θ, φ, определяющими ориентацию любой (но фиксированной) жестко связанной с телом системы координат $Gxyz$ относительно неподвижной системы координат. В дальнейшем все системы координат — правые.

Координата ζ однозначно определяется углами θ и φ, т. е. $\zeta=f(\theta, \varphi)$. Назовем $f(\theta, \varphi)$ опорной функцией поверхности K_1. Каждой точке $M(\theta, \varphi)\in K_1$ эта функция ставит в соответствие расстояние от центра G до касательной плоскости к поверхности K_1, перпендикулярной MG ($f: K_1\to R^+$). Так как K_1 — достаточно произвольная поверхность, то и $f(M)$ — достаточно произвольная функция. Однако ограничения, наложенные выше на K_1, накладывают и некоторые ограничения на функцию f. А именно, f — достаточно гладкая функция точки M и такова, что гауссова кривизна поверхности K_1, выраженная через $f(\theta, \varphi)$ и ее производные по θ и φ, должна быть всюду положительна (т. е. K_1 — строго выпуклая поверхность). Далее удобно вместо f рассматривать безразмерную функцию $f'=f/l$.

Рассматриваемая механическая система [4] имеет пять степеней свободы. Обобщенные координаты ξ, η, ζ циклические. Поэтому существуют три первых интеграла уравнений движения: две горизонтальные компоненты вектора количеств движения (которые, без ограничения общности, будем считать равными нулю) и вертикальная компонента p_ψ вектора



Фиг. 1



Фиг. 2

момента количеств движения. В дальнейшем рассматриваем случай, когда $p_\psi=0$. Это означает, что во все время движения вектор $\boldsymbol{\omega}$ мгновенной угловой скорости тела (так же, как и вектор кинетического момента тела относительно G) параллелен плоскости $O\xi\eta$. Сделанное ограничение позволяет свести задачу к исследованию приведенной натуральной механической системы с двумя степенями свободы, конфигурационное пространство которой — сфера S^2 (с локальными координатами φ и θ), а функция Гамильтона (определенная на T^*S^2) имеет вид [5]:

$$H_1=\frac{p_\varphi^2+p_\theta^2\sin^2\theta+(p_\theta\rho_\varphi'-p_\varphi\rho_\theta')^2}{2ml^2[\rho_\varphi'^2+(1+\rho_\theta'^2)\sin^2\theta]}+mglf' \tag{1.1}$$

В (1.1) $\rho_\theta'=\partial f'/\partial\theta$, $\rho_\varphi'=\partial f'/\partial\varphi$, g — ускорение свободного падения, p_θ, p_φ — обобщенные импульсы, соответствующие координатам θ, φ.

2. Рассмотрим движение материальной точки M по абсолютно гладкой удерживающей регулярной поверхности $K_2\subset R^3$ под действием центральной силы [1, 3] с потенциалом Π. Поверхность зададим параметрически: $\mathbf{GM}=\mathbf{r}(\theta,\varphi)$, $\partial\mathbf{r}/\partial\theta\times\partial\mathbf{r}/\partial\varphi\neq0$. Углы θ и φ показаны на фиг. 2, где G — притягивающий (или отталкивающий, если точка M движется по внутренней стороне K_2) центр. Предполагаем, что поверхность K_2 диффеоморфна S^2 и является достаточно гладким подмногообразием R^3. Конфигурационное пространство рассматриваемой механической системы — сфера S^2, а функция Лагранжа имеет вид

$$L_2={}^1/_2m[r^2(\dot\theta^2+\dot\varphi^2\sin^2\theta)+\dot r^2]-\Pi(r)= \tag{2.1}$$
$$={}^1/_2m[\dot\theta^2(r^2+r_\theta^2)+\dot\varphi^2(r^2\sin^2\theta+r_\varphi^2)+2\dot\theta\dot\varphi r_\theta r_\varphi]-\Pi(r)$$

Здесь $r_\theta=\partial r/\partial\theta$, $r_\varphi=\partial r/\partial\varphi$, m — масса точки. Составим также выражение для функции Гамильтона (определенной на T^*S^2):

$$H_2=(r')^{-2}\frac{p_\varphi^2+p_\theta^2\sin^2\theta+(p_\theta r_\varphi'/r'-p_\varphi r_\theta'/r')^2}{2md^2\{(r_\varphi'/r')^2+\sin^2\theta[1+(r_\theta'/r')^2]\}}+\Pi(r') \tag{2.2}$$

в которой безразмерные величины $r'=r/d$, $r_\varphi'=r_\varphi/d$, $r_\theta'=r_\theta/d$ (d — диаметр K_2).

3. Сопоставим эти две классические задачи механики. Обе рассматриваемые системы имеют одно и то же конфигурационное пространство S^2 и локальные координаты на нем.

Пусть в (2.2) потенциальная энергия $\Pi(r)=mgl\ln r/r^2$ (штрихи в дальнейшем опускаем) и $d=l$. Для дальнейшего удобно функцию $\Pi(r)$ представить в виде

$$\Pi(r)=r^{-2}(mgl\ln\beta r-h),\quad h=mgl\ln\beta \tag{3.1}$$

так, что β и h — некоторые постоянные, $\beta>1$, $h>0$. Это позволяет получить из (2.2) выражение для функции Гамильтона

$$H_2=r^{-2}\left\{\frac{p_\varphi^2+p_\theta^2\sin^2\theta+(p_\theta r_\varphi/r-p_\varphi r_\theta/r)^2}{2ml^2[(r_\varphi/r)^2+\sin^2\theta(1+r_\theta^2/r^2)]}+mgl\ln\beta r-h\right\} \tag{3.2}$$

Затем, если положить $f=\ln\beta r>0$, то, сравнивая гамильтонианы (1.1) и (3.2), получаем

$$H_2=r^{-2}(H_1-h) \tag{3.3}$$

Из (3.3) видно, что уровни $H_1=h$ и $H_2=0$ — тождественные гиперповерхности в фазовом пространстве. Докажем, что и траектории обеих систем, лежащие на этой гиперповерхности, одни и те же [2].

Выпишем уравнения движения канонической системы с гамильтонианом H_2:

$$\mathbf{q}^{\bullet}=\partial H_2/\partial\mathbf{p}=r^{-2}(\mathbf{q})\partial H_1/\partial\mathbf{p} \tag{3.4}$$

$$\mathbf{p}^{\bullet}=-\partial H_2/\partial\mathbf{q}=-r^{-2}(\mathbf{q})\partial H_1/\partial\mathbf{q}-(H_1-h)\partial r^{-2}/\partial\mathbf{q}=-r^{-2}(\mathbf{q})\partial H_1/\partial\mathbf{q}$$

Здесь $\mathbf{q}=\|\theta,\ \varphi\|^T$, $\mathbf{p}=\|p_\theta,\ p_\varphi\|^T$ — канонические переменные.

Выполняя замену времени вдоль траекторий движения $d\tau=r^{-2}(\mathbf{q})dt$, получаем уравнения движения второй системы

$$d\mathbf{q}/d\tau=\partial H_1/\partial\mathbf{p},\qquad d\mathbf{p}/d\tau=-\partial H_1/\partial\mathbf{q} \tag{3.5}$$

которые совпадают с уравнениями движения канонической системы с гамильтонианом H_1. Таким образом, с точки зрения интегрируемости первая задача будет частным случаем задачи о движении материальной точки по гладкой неподвижной поверхности в центральном силовом поле с потенциалом $\Pi(\mathbf{r})=\alpha\ln r/r^2$ ($\alpha=\mathrm{const}$).

В случае $g=0$ (движение тела по плоскости происходит при отсутствии поля тяжести) аналогия достигается, если $\Pi(r)=-h/r^2$.

Отмеченную аналогию можно установить и с помощью принципа наименьшего действия в форме Якоби. Согласно этому принципу, движения натуральной механической системы внутри области возможных движений являются геодезическими линиями некоторой метрики.

Покажем вначале, что при фиксированном значении h интеграла энергии первой системы и при нулевом значении энергии второй системы области возможных движений обеих систем совпадают. Действительно

$$D=\{h-mglf\geqslant0\}=\{h-mgl\ln\beta r\geqslant0\}=\{0-(mgl\ln\beta r-h)/r^2\geqslant0\}\subseteq S^2 \tag{3.6}$$

Покажем, что и метрики в первой и второй задачах одинаковы

$$d\rho_1^2={}^1/_2ml^2(h-mglf)[(1+\rho_\theta^2)(d\theta)^2+(\rho_\varphi^2+\sin^2\theta)(d\varphi)^2+2\rho_\theta\rho_\varphi d\theta d\varphi] \tag{3.7}$$

$$d\rho_2^2={}^1/_2md^2r^{-2}(h-mgl\ln\beta r)[(1+r_\theta^2r^{-2})(d\theta)^2+(r_\varphi^2r^{-2}+\sin^2\theta)(d\varphi)^2+$$
$$+2r_\theta r_\varphi r^{-2}d\theta d\varphi]r^2$$

Из (3.7) следует, что $d\rho_1=d\rho_2$, если $f=\ln\beta r$, $d=l$. А значит, и геодезические линии этой метрики в D у обеих систем совпадают.

4. Заметим, что найденная аналогия связывает непроинтегрированные (а быть может, и неинтегрируемые) задачи.

Как было отмечено, для достижения аналогии между двумя классическими задачами механики нужно, чтобы опорная функция $f(M)$ поверхности K_1 и функция $r(M)$, задающая поверхность K_2, были связаны соотношением $f=\ln\beta r$. В связи с этим остановимся подробнее на том, как связаны между собою поверхности K_1 и K_2.

Построим в пространстве $Gxyz$ поверхность K, заданную параметрически функцией $GM=\ln\beta r$, и поставим задачу о том, как, зная $K(K_2)$, построить K_1.

Рассмотрим двухпараметрическое семейство плоскостей $\pi(\theta,\ \varphi)$:

$$\pi: F(x,\ y,\ z,\ \theta,\ \varphi)\equiv x\sin\theta\sin\varphi+y\sin\theta\cos\varphi+z\cos\theta+f=0 \tag{4.1}$$

Они перпендикулярны $\mathbf{r}(\theta,\ \varphi)$ и проходят через точку Q, такую, что $\mathbf{GQ}=-\mathbf{r}$ (фиг. 2). Искомая поверхность K_1 будет огибающей этого семейства плоскостей, т. е. K_1 в каждой своей точке касается некоторой плоскости семейства (4.1).

Каждая точка $P(x,\ y,\ z)$ на огибающей K_1 и параметры θ, φ, отвечающие плоскости семейства, которой касается огибающая в этой точке, связаны уравнениями

$$F=0,\qquad \partial F/\partial\theta=0,\qquad \partial F/\partial\varphi=0 \tag{4.2}$$

Если из этих уравнений выразить x, y, z через θ, φ, то получим параметрическое представление поверхности K_1:

$$x = -(\rho_\theta \cos\theta + f \sin\theta)\sin\varphi - \rho_\varphi \cos\varphi/\sin\theta \qquad (4.3)$$

$$y = -(\rho_\theta \cos\theta + f \sin\theta)\cos\varphi - \rho_\varphi \sin\varphi/\sin\theta$$

$$z = \rho_\theta \sin\theta - f \cos\theta$$

Обратно, если построена поверхность K_1, то поверхность $K(K_2)$ **можно** получить как множество проекций центра G на всевозможные касательные плоскости к поверхности K_1. Заметим, что в критических точках функции $f(M)$ поверхности K и K_1 касаются друг друга.

В заключение остановимся на геометрической интерпретации полученной аналогии. Пусть тело, ограниченное поверхностью K_1 (фиг. 1), движется по гладкой горизонтальной плоскости. С поверхностью K_1 жестко свяжем поверхность K_2. Тогда при движении тела вертикаль $G\zeta'$ будет высекать на K_2 те же траектории, как если бы поверхность K_2 была неподвижна, а по ней без трения скользила некоторая материальная точка M. Однако время прохождения по этим траекториям в обеих задачах разное.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аппель П.* Теоретическая механика. М.: Физматгиз, 1960. Т. 1. 515 с.; Т. 2. 487 с.
2. *Козлов В. В.* Две интегрируемые задачи классической динамики.– Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика, 1981. № 4, с. 80–83.
3. *Якоби К.* Лекции по динамике. Л.– М.: Глав. ред. общетехн. лит. и номогр., 1936. 270 с.
4. *Poisson S. D.* Traité de mecanique. T. 2. P.: Bachelier, 1833. 782 p.
5. *Маркеев А. П., Мощук Н. К.* Об устойчивости движения эллипсоида на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости.– В кн.: Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1984, вып. 16, с. 56–64.

Москва

Поступила в редакцию
13.XI.1985