МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1987

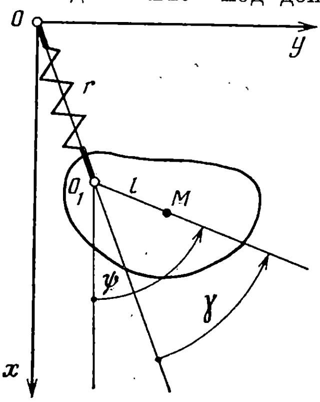
УДК 531.53

О ДВИЖЕНИИ ПЛОСКОГО ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА С УПРУГИМ ПОДВЕСОМ

БЛИНОВ А. П.

В [1, 2] исследована проблема устойчивости вращающегося вала в упругих опорах. В данной работе с учетом силы тяжести изучаются движения вала (или плоского физического маятника) в упругих опорах в окрестности устойчивого положения равновесия с применением результатов [3, 4].

1. Тело массы m подвешено на пружине (фигура), концы которой закреплены в неподвижной точке o и точке o_1 шарнирно, и совершает плоское движение под действием силы тяжести, приложенной в центре масс — точке M. Такая система моделирует также тяжелый вал в подшипниках с нелинейной жесткостью (например, магнитные подшипники), если последняя линеаризована в окрестности статического равновесия.



Принимая (как в [2]) обозначенные на фигуре переменные r, ψ, γ за обобщенные переменные, запишем функцию Лагранжа рассматриваемой системы

$$L=J\dot\psi^2/2+m\{(\dot r-l\dot\psi\sin\gamma)^2+[r(\dot\psi-\dot\gamma)+l\dot\psi\cos\gamma]^2\}/2-c(r-r_0)^2/2-2mg\{r\sin^2[(\psi-\gamma)/2]+l\sin^2(\psi/2)\} \quad (1.1)$$

Здесь J — момент инерции тела относительно оси, проходящей через точку o_1, c — жесткость пружины, r_0 — расстояние между точками o и o_1 в положении статического равновесия системы, g — ускорение силы тяжести. Уравнения движения маятника

$$\ddot r-l\ddot\psi\sin\gamma-r(\dot\psi-\dot\gamma)^2-l\dot\psi^2\cos\gamma+2g\sin^2[(\psi-\gamma)/2]+\lambda^2(r-r_0)=0$$

$$(J/m-l^2+r^2+2lr\cos\gamma)\ddot\psi-l\ddot r\sin\gamma-r(r+l\cos\gamma)\ddot\gamma+2[(r+l\cos\gamma)\dot r-lr\dot\gamma\sin\gamma]\dot\psi-2(l\cos\gamma+r)\dot r\dot\gamma-lr\dot\gamma^2\sin\gamma+g[r\sin(\psi-\gamma)+l\sin\psi]=0$$

$$r(r+l\cos\gamma)\ddot\psi+2r\dot\psi\dot r-r^2\ddot\gamma-lr\dot\psi^2\sin\gamma-2r\dot r\dot\gamma+gr\sin(\psi-\gamma)=0,\qquad \lambda=(c/m)^{1/2}$$

допускают частное решение $r=r_0$, $\psi=0$, $\gamma=0$, соответствующее устойчивому положению равновесия маятника.

Уравнения возмущенного движения с учетом замены переменных $u=r-r_0$, $\psi=\psi$, $\gamma=\psi-\varphi$ могут быть записаны в виде

$$\dot u=-\lambda v,\quad \dot v=\lambda u+F_0(u,\ v,\ \psi,\ \Psi,\ \varphi,\ \Phi),\quad \dot\varphi=\Phi \quad (1.2)$$

$$\dot\Phi=-(g/r_0)(1+l^2m/J)\varphi+[l^2gm/(r_0J)]\psi+F_2(u,\ v,\ \varphi,\ \Phi,\ \psi,\ \Psi)$$

$$\dot\psi=\Psi,\quad \dot\Psi=(lmg/J)(\varphi-\psi)+F_4(u,\ v,\ \varphi,\ \Phi,\ \psi,\ \Psi)$$

$$\lambda F_0=g\sin^2(\varphi/2)-(r_0+u)\Phi^2+l\Psi^2\cos(\psi-\varphi)- \tag{1.3}$$
$$-(2\lambda lm/J)(r_0+u)v\Phi\sin(\psi-\varphi)+(ml^2/J)\{2(r_0+u)\Phi^2\sin(\psi-\varphi)-$$
$$-2\lambda v\Phi\cos(\psi-\varphi)+\lambda^2u\sin(\psi-\varphi)+g[\cos(\psi-\varphi)\sin\varphi+$$
$$+\sin(\psi-\varphi)\sin^2(\varphi/2)+\sin\psi]\}\sin(\psi-\varphi)$$
$$F_2=g\varphi/r_0-(g\sin\varphi-2\lambda v\Phi)/(r_0+u)+$$
$$+(2lm/J)\{g\sin(\psi-\varphi)\sin^2(\varphi/2)+2(r_0+u)(\Psi-\Phi)^2\sin(\psi-\varphi)+$$
$$+\lambda^2u\sin(\psi-\varphi)+(^3/_2)\lambda v(\Psi-\Phi)\cos(\psi-\varphi)\}+[l^2mg/(J(r_0+u))]\,[\cos(\psi-\varphi)\times$$
$$\times\sin\psi-\cos^2(\psi-\varphi)\sin\varphi+(r_0+u)(\varphi-\psi)/r_0]-(l^2m/J)[(\Psi-\Phi)^2\sin\times$$
$$\times[2(\psi-\varphi)]+[2g/(r_0+u)]\sin(\psi-\varphi)\sin^2(\varphi/2)]-[l^2c/(J(r_0+u))]u\sin(\varphi-\psi)$$
$$F_4=(lm/J)\{2(r_0+u)\sin(\psi-\varphi)(\Psi-\Phi)^2+\lambda^2u\sin(\psi-\varphi)+$$
$$+g[\cos(\psi-\varphi)\sin\varphi-\sin\psi+\psi-\varphi+\sin(\psi-\varphi)\sin^2(\varphi/2)]\}$$

Система (1.2) допускает интеграл энергии

$$u^2+v^2+W_2(\varphi,\ \Phi,\ \psi,\ \Psi)+W_3(\varphi,\ \Phi,\ \psi,\ \Psi)=\mu^2 \tag{1.4}$$
$$W_2(\varphi,\ \Phi,\ \psi,\ \Psi)=\{[J+m(r_0+l)^2]\Psi^2-2mr_0(r_0+l)\Psi(\Psi-\Phi)+$$
$$+mr_0^2(\Psi-\Phi)^2+mg(l\psi^2+r_0\varphi^2)\}/c$$

где $W_3(\varphi,\ \Phi,\ \psi,\ \Psi)$ — слагаемые порядка выше второго.

Далее к (1.2) применим подстановку Ляпунова (в [3] такая подстановка использовалась для определения периодических движений в системах Ляпунова в особом случае): $u=\rho\cos\vartheta$, $v=\rho\sin\vartheta$, $\varphi=\rho z_1$, $\Phi=\rho z_2$, $\psi=\rho z_3$, $\Psi=\rho z_4$. Система (1.2) и интеграл (1.4) приводятся к виду

$$\rho^{\cdot}=\rho^2R(\rho,\ \vartheta,\ z),\qquad \vartheta^{\cdot}=\lambda+\rho\theta(\rho,\ \vartheta,\ z) \tag{1.5}$$

$$z_s^{\cdot}=\sum_{j=1}^{4}p_{sj}^*z_j+\rho Z_s(\rho,\vartheta,z)\qquad (s=\overline{1,4}) \tag{1.6}$$

$$\rho^2[1+W_2(z)+\rho W_3(\rho,\ \vartheta,\ z)]=\mu^2,\qquad z=(z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4) \tag{1.7}$$

где $p_{12}^*=p_{34}^*=1$, $p_{21}^*=-(g/r_0)(1+l^2m/J)$, $p_{23}^*=l^2mg/(r_0J)$, $p_{41}^*=-p_{43}^*=$ $=lmg/J$, а остальные $p_{ij}^*=0$. Кроме того, в (1.5)—(1.7) использованы обозначения:

$$Z_1=-z_1R(\rho,\ \vartheta,\ z),\qquad Z_2=\rho^{-2}F_2(\rho\cos\vartheta,\ \rho\sin\vartheta,\ \rho z)-z_2R(\rho,\ \vartheta,\ z)$$
$$Z_3=-z_3R(\rho,\ \vartheta,\ z),\qquad Z_4=\rho^{-2}F_4(\rho\cos\vartheta,\ \rho\sin\vartheta,\ \rho z)-z_4R(\rho,\ \vartheta,\ z)$$
$$W_2(z)=m[gr_0z_1^2+r_0^2z_2^2+lgz_3^2+2lr_0z_2z_4+(J/m+l^2)z_4^2]/c$$
$$R(\rho,\ \vartheta,\ z)=\rho^{-2}F_0(\rho\cos\vartheta,\ \rho\sin\vartheta,\ \rho z)\sin\vartheta,\quad \theta(\rho,\ \vartheta,\ z)=$$
$$=\rho^{-2}F_0(\rho\cos\vartheta,\ \rho\sin\vartheta,\ \rho z)\cos\vartheta$$

Предполагая, что $1+W_2(z)>0$, а μ достаточно мало, разрешим (1.7) относительно ρ:

$$\rho=(1+W_2)^{-1/2}[\mu-(1+W_2)^{-3/2}W_3^*(0,\ \vartheta,\ z)\mu^2/2]+o(\mu^2) \tag{1.8}$$
$$W_3^*=\rho^{-3}W_3(\rho\cos\vartheta,\ \rho\sin\vartheta,\ \rho z)$$

и введем фазовое время, разделив уравнения (1.6) на второе уравнение (1.5):

$$\frac{dz_s}{d\vartheta}=\sum_{j=1}^{4}p_{sj}z_j+Z_{s0}(\vartheta,z,\mu) \tag{1.9}$$

$$Z_{s0}(\vartheta,\ z,\ \mu)=\mu Z_{s1}(\vartheta,\ z)+\mu^2Z_{s2}(\vartheta,\ z)+\ldots,\qquad p_{sj}=p_{sj}^*/\lambda \tag{1.10}$$

$$Z_{11}(\vartheta, z) = -W_1(z)R(z)(z_1 \sin\vartheta + z_2\cos\vartheta)/\lambda^2$$

$$Z_{21}(\vartheta, z) = W_1(z)\{[l^2m(z_1-z_3)/(Jr_0) + (3lm/J - 2/r_0)(z_2-z_4)]\lambda\sin\vartheta +$$
$$+(lc/J)(2-l/r_0)(z_3-z_1)\cos\vartheta + \lambda^{-1}R(z)[(g/r_0)((1+l^2m/J)z_1+$$
$$+l^2mz_3/J)\cos\vartheta - z_2\sin\vartheta]\}/\lambda$$

$$Z_{31}(\vartheta, z) = -W_1(z)R(z)(z_3\sin\vartheta + z_4\cos\vartheta)/\lambda^2$$

$$Z_{41}(\vartheta, z) = W_1(z)\{(lc/J)(z_3-z_1)\cos\vartheta - \lambda^{-1}R(z)[z_4+$$
$$+(lmg/J)(z_1-z_3)]\sin\vartheta\}/\lambda, \qquad W_1(z) = [1+W_2(z)]^{-1/2}$$

$$R(z) = (g/4 + l^2mg/J)z_1^2 - r_0z_2^2 + l^2mgz_3^2/J + lz_4^2$$

Систему (1.9) при $\mu=0$ будем называть невозмущенной. Общее решение невозмущенной системы z° имеет вид

$$z^\circ = M_1\begin{Vmatrix}\cos\omega_1\vartheta\\ -\omega_1\sin\omega_1\vartheta\\ a_1\cos\omega_1\vartheta\\ -\omega_1a_1\sin\omega_1\vartheta\end{Vmatrix} + M_2\begin{Vmatrix}\sin\omega_1\vartheta\\ \omega_1\cos\omega_1\vartheta\\ a_1\sin\omega_1\vartheta\\ \omega_1a_1\cos\omega_1\vartheta\end{Vmatrix} + M_3\begin{Vmatrix}\cos\omega_2\vartheta\\ -\omega_2\sin\omega_2\vartheta\\ a_2\cos\omega_2\vartheta\\ -\omega_2a_2\sin\omega_2\vartheta\end{Vmatrix} + M_4\begin{Vmatrix}\sin\omega_2\vartheta\\ \omega_2\cos\omega_2\vartheta\\ a_2\sin\omega_2\vartheta\\ \omega_2a_2\cos\omega_2\vartheta\end{Vmatrix} \qquad (1.11)$$

Здесь M_s — произвольные постоянные ($s=\overline{1,\ 4}$), $a_k = 1 + J/(l^2m) - \lambda^2r_0\omega_kJ/(l^2mg)$ ($k=1,\ 2$) и использованы обозначения

$$\omega_{1,2} = \lambda^{-1}(g/(2r_0J))^{1/2}\{J + ml(r_0+l) \mp [(J+ml(r_0+l))^2 - 4mlr_0J]^{1/2}\}^{1/2}$$

Применяя метод Пуанкаре, будем искать решение уравнения (1.9) в виде ряда

$$z = z^\circ + \sum_{k=1}^{\infty}\mu^k z^{(k)}(\vartheta) \qquad (1.12)$$

Функции $z^{(k)}$ являются решениями полной системы уравнений в вариациях по параметру. Вид таких уравнений для произвольного значения k получен в [4]. Здесь ограничимся решением системы в вариациях для $k=1$, т. е. определением первой поправки $z^{(1)}$:

$$z^{(1)} = \frac{\partial z^\circ}{\partial M}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta}\left(\frac{\partial z^\circ}{\partial M}\right)^{-1} Z^*(\vartheta, z^\circ)\,d\vartheta \qquad (1.13)$$

$$Z^*(\vartheta, z) = (Z_{11}(\vartheta, z),\ Z_{21}(\vartheta, z),\ Z_{31}(\vartheta, z),\ Z_{41}(\vartheta, z))^T, \quad \frac{\partial z^\circ}{\partial M} = \begin{Vmatrix} Z_{11}^\circ & Z_{12}^\circ\\ Z_{21}^\circ & Z_{22}^\circ\end{Vmatrix}$$

$$Z_{11}^\circ = \begin{Vmatrix}\cos\omega_1\vartheta & \sin\omega_1\vartheta\\ -\omega_1\sin\omega_1\vartheta & \omega_1\cos\omega_1\vartheta\end{Vmatrix}, \quad Z_{22}^\circ = Z_{22}^\circ/a_2$$

$$Z_{22}^\circ = a_2\begin{Vmatrix}\cos\omega_2\vartheta & \sin\omega_2\vartheta\\ -\omega_2\sin\omega_2\vartheta & \omega_2\cos\omega_2\vartheta\end{Vmatrix}, \quad Z_{21}^\circ = a_1Z_{11}^\circ$$

Для определения обратной матрицы $(\partial z^\circ/\partial M)^{-1}$ воспользуемся тем, что матрица $\partial z^\circ/\partial M$ может быть записана в виде произведения

$$\frac{\partial z^\circ}{\partial M} = \begin{Vmatrix} E & E/a_2\\ a_1E & E\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} Z_{11}^\circ & 0\\ 0 & Z_{22}^\circ\end{Vmatrix} E = \begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix}$$

Тогда легко получить обратную матрицу в виде

$$\left(\frac{\partial z^\circ}{\partial M}\right)^{-1} = \frac{\omega_1\omega_2(a_2-a_1)^6}{a_2^4}\begin{Vmatrix} Z_{22}^\circ & 0\\ 0 & Z_{11}^\circ\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} E & -E/a_2\\ -a_1E & E\end{Vmatrix} \qquad (1.14)$$

Заметим, что функция $W_2(z)$, входящая в знаменатели выражений Z_{s1} ($s=\overline{1,\ 4}$), является первым интегралом невозмущенной системы, и поэтому $W_2(z^\circ) = \mu_*^2 = \mathrm{const}$ ($\mu_*^2 \leqslant \mu^2$).

Таким образом, из (1.14) и последнего замечания следует, что подынтегральное выражение в (1.13) представляет собой многочлен относительно $\sin\vartheta$, $\cos\vartheta$, $\sin\omega_k\vartheta$, $\cos\omega_k\vartheta$ ($k=1,\ 2$) пятой степени.

Подставляя полученное решение в (1.8) и (1.5), будем иметь $\rho=\mu\times\times(1+\mu_*^2)^{-1/2}+o(\mu)$, $\vartheta=\lambda t+O(\mu)$, $\vartheta_0=0$. Постоянные μ, μ_* определяются из начальных условий, интеграла энергии и выражения $W_2(z)$, интервал времени имеет порядок $O(1/\mu)$.

Отметим, что рассмотренный способ асимптотического решения применим к любым системам Ляпунова.

2. Рассмотрим вопрос о существовании периодических решений системы (1.2). При $\lambda\neq k_1\omega_{01}$, $\lambda\neq k_2\omega_{02}$ (k_1, $k_2=0, \pm1, \ldots$) система (1.2) является системой Ляпунова. Однако к ней не применима теорема Ляпунова о существовании периодических решений в окрестности начала координат, аналитически зависящих от параметра, поскольку правые части (1.2), начинающиеся с членов второй степени, не содержат u^ν ($\nu=2, 3, \ldots$). Подход, изложенный в [3], позволяет кроме решения $u==C_1\cos\lambda t+C_2\sin\lambda t$, $\varphi\equiv0$, $\psi\equiv0$ (C_1, $C_2=\mathrm{const}$) построить амплитудные уравнения для периодических решений в случае резонанса и дробного резонанса.

Следуя [3], систему (1.9) при $\mu=0$ будем рассматривать как порождающую. Чтобы решение (1.11) такой системы имело период $\tau=2\pi/(m_1\omega_1)$, положим $m_2\omega_2==m_1\omega_1$, где m_1, m_2 — некоторые наименьшие из натурального ряда чисел. При этом решение (1.11) можно рассматривать и как $m_3\tau$-периодическое для $m_3=1, 2, \ldots$

Уравнения (1.9) явно зависят от ϑ, и эту зависимость можно рассматривать как $m_4 2\pi$-периодическую ($m_4=1, 2, \ldots$).

Поэтому решение (1.11) может быть порождающим для $2\pi m_4$-периодического решения системы (1.9), если выполняется равенство $m_3\tau=2\pi m_4$ или $\omega_1=m_3/(m_1m_4)$.

Периодические решения вновь можно искать в виде (1.12). После подстановки рядов (1.12) в (1.9) получим систему уравнений

$$\frac{dz^{(1)}}{d\vartheta}=\sum_{j=1}^{4}p_{sj}z_j+Z_{s1}(\vartheta, z^\circ)\qquad (s=\overline{1,4})\tag{2.1}$$

Функции $Z_{s1}(\vartheta, z^\circ)$ представляют собой тригонометрические многочлены степени не выше четвертой, которые могут быть преобразованы в сумму гармонических членов первой степени с круговыми частотами $|1\pm\omega_1|$, $|1\pm\omega_2|$, $|1\pm3\omega_1|$, $|1\pm3\omega_2|$, $|1\pm\omega_1\pm2\omega_2|$, $|1+2\omega_1\pm\omega_2|$, $|1-\omega_1\pm2\omega_2|$, $|1-2\omega_1\pm\omega_2|$. Некоторые из этих частот совпадают с круговой частотой порождающего решения $m_1\omega_1$. Например, равенство $1+2\omega_1+\omega_2=m_1\omega_1$ выполняется при $m_1=2$, $m_2=m_3=m_4=1$.

Для получения наиболее простой формы амплитудных уравнений приведем систему (1.13) к двум независимым в линейной части уравнениям второго порядка. Для этого вначале систему (1.13) линейным преобразованием

$$z=Tx,\quad T=\begin{Vmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & t_2 & 0 & t_5\\ t_1 & 0 & t_4 & 0\\ 1 & t_3 & 0 & t_6\end{Vmatrix}$$

$$t_1=(\omega_1^2+p_{12}p_{21})/(p_{12}p_{23}),\quad t_2=\omega_1/p_{12},\quad t_3=-\omega_1(p_{12}p_{21}+\omega_1^2)/(p_{12}^2p_{23})$$

$$t_4=-\omega_2^2/(p_{12}p_{23}),\quad t_5=-\omega_2/p_{12},\quad t_6=-(p_{12}p_{21}-\omega_2^2)\omega_2/(p_{12}^2p_{23})$$

приведем к виду

$$dx/d\vartheta=Bx+F^\circ(\vartheta, z^\circ)\tag{2.2}$$

$$F^\circ(\vartheta, z^\circ)=T^{-1}\begin{Vmatrix}Z_{11}\\ \vdots\\ Z_{41}\end{Vmatrix},\quad T^{-1}=(t_{ij}),\quad B=\begin{Vmatrix}0 & -\omega_1 & 0 & 0\\ \omega_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\omega_2\\ 0 & 0 & \omega_2 & 0\end{Vmatrix}$$

$$t_{11}=t_4(t_2t_6-t_5t_3),\quad t_{21}=t_4t_5,\quad t_{22}=-t_4t_6,\quad t_{24}=t_4t_5$$

$$t_{31}=t_1(t_3t_5-t_2t_6),\quad t_{33}=t_3t_5-t_2t_6,\quad t_{41}=-t_2t_4$$

$$t_{42}=t_3t_4,\quad t_{44}=-t_2t_4,\quad t_{12}=t_{13}=t_{14}=t_{23}=t_{32}=t_{34}=t_{43}=0$$

Тогда, учитывая структуру матрицы B и значения $\omega_1=m_3/(m_1m_4)$, $\omega_2=m_3/(m_2m_4)$, можем записать (2.2) в виде

$$\frac{d^2x_1}{d\vartheta^2}=-\left(\frac{m_3}{m_1m_4}\right)^2x_1-\frac{m_3}{m_1m_4}F_2^\circ(\vartheta, z^\circ)+\frac{dF_1^\circ(\vartheta, z^\circ)}{d\vartheta}\tag{2.3}$$

$$\frac{d^2x_3}{d\vartheta^2}=-\left(\frac{m_3}{m_2m_4}\right)^2x_3-\frac{m_3}{m_2m_4}F_4^\circ(\vartheta, z^\circ)+\frac{dF_3^\circ(\vartheta, z)}{d\vartheta}\tag{2.4}$$

Полученные уравнения допускают $m_3\tau$-периодическое решение лишь для таких значений M_1, M_2, M_3, M_4, при которых уничтожаются члены с $\sin[m_3\vartheta/(m_1m_4)]$, $\cos[m_3\vartheta/(m_1m_4)]$ в неоднородной части уравнения (2.3) и уничтожаются члены с

$\sin[m_3\vartheta/(m_2m_4)]$, $\cos[m_3\vartheta/(m_2m_4)]$ в неоднородной части уравнения (2.4). Эти четыре уравнения относительно M_1, M_2, M_3, M_4 и являются амплитудными уравнениями, нетривиальное решение (если оно существует) которых возможно численными методами.

Покажем существование 2π-периодических решений системы (1.9) в некритическом относительно периода случае, т. е. в предположении, что система (1.9) при $\mu=0$ не имеет решений с периодом 2π, кроме тривиального.

Согласно [5], если система (1.9) некритична относительно периода 2π и существует функция $\eta(\mu, \delta)$, непрерывная и неубывающая по μ, δ при $0\leqslant\mu\leqslant\mu_0$, $0\leqslant\delta\leqslant\delta_0$, $\eta(0, 0)=0$ и $\|Z(\vartheta, z', \mu)-Z(\vartheta, z'', \mu)\|\leqslant\eta(\mu, \delta)\|z'-z''\|$, $Z=(Z_{10}, \dots, Z_{40})$, $Z(\vartheta, 0, 0)=0$ для $-\infty<\vartheta,\infty$, $\|z'\|<\delta$, $\|z''\|<\delta$, то существуют постоянные σ и μ_1, такие, что при $0\leqslant\mu\leqslant\mu_1$ имеется решение системы (1.9) с периодом 2π по ϑ, непрерывное по μ при $\mu=0$, $z(0, 0)=0$ и единственное в области $\|z\|\leqslant\sigma$ ($\|\cdot\|$ – норма вектора, которую можно предполагать евклидовой).

Очевидно, для применимости этой теоремы к рассматриваемому случаю достаточно построить требуемую функцию $\eta(\mu, \delta)$. Из структуры вектора $Z(\vartheta, z, \mu)$ для достаточно малых значений $\mu\leqslant\mu_0$ следует неравенство

$$\|Z(\vartheta, z', \mu)-Z(\vartheta, z'', \mu)\|\leqslant 2\mu\|Z^1(\vartheta, z')-Z^1(\vartheta, z'')\|, \quad Z^1=(Z_{11}, \dots, Z_{41})$$

Поэтому можно определить функцию $\eta(\mu, \delta)$ в виде произведения $\eta(\mu, \delta)=\mu\eta^*(\delta)$, а функцию $\eta^*(\delta)$ определим следующим образом:

$$\eta^*(\delta)=\max_{\vartheta\in[0, 2\pi]} K(\vartheta, \delta), \quad K(\vartheta, \delta)=n^2 \max_{z\in U_\delta} |\partial Z_{i1}/\partial z_j| \quad (i, j=\overline{1, 4})$$

где U_δ – замкнутый шар радиуса δ с центром в точке $z=0$. Действительно, $\eta^*(\delta)$ – неубывающая и непрерывная функция от δ, и поскольку множество U_δ выпукло, то имеет место неравенство

$$\|Z^1(\vartheta, z')-Z^1(\vartheta, z'')\|\leqslant K(\vartheta, \delta)\|z'-z''\|\leqslant\eta^*(\delta)\|z'-z''\|$$

и доказываемое неравенство $\|Z(\vartheta, z', \mu)-Z(\vartheta, z'', \mu)\|\leqslant 2\mu\eta^*(\delta)\|z'-z''\|$.

Остается заметить, что из существования 2π-периодических решений системы (1.9) и вида уравнений (1.5)–(1.7) следует существование периодических решений системы (1.2) в достаточно малой окрестности невозмущенного решения с периодом, зависящим от начальных условий.

Автор благодарит В. Ф. Журавлева и В. Н. Серегина за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.– Л.: Гостехиздат, 1946. 204 с.
2. *Журавлев В. Ф.* Об устойчивости стационарных движений плоского тела в поле центральной силы.– Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 4, с. 71–76.
3. *Старжинский В. М.* Об одном варианте метода определения периодических решений.– Инж. ж. МТТ, 1968, № 6, с. 46–50.
4. *Старжинский В. М.* Системы Ляпунова с демпфированием.– ПММ, 1972, т. 36, вып. 2, с. 344–348.
5. *Хейл Дж.* Колебания в нелинейных системах. М.: Мир, 1966. 230 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.VIII.1984