МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1987

УДК 531.36

ПРИБЛИЖЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ УСРЕДНЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

БОЙЦОВА И. А., МАРЧЕНКО В. П.

Исследуется усредненная по быстрой переменной задача об оптимальной стабилизации вращательного движения управляемого твердого тела на конечном промежутке времени.

1. Пусть движение объекта управления описывается системой дифференциальных уравнений и граничных условий следующего вида:

$$x^{\cdot}=f(t,\ x,\ u,\ \varepsilon) \tag{1.1}$$

$$x(t_0,\ \varepsilon)=x^0,\quad x(T,\ \varepsilon)=x^T \tag{1.2}$$

в которых вектор фазовых переменных x и вектор управления u принадлежат множествам $D_x\subset E^n$, $D_u\subset E^r$, ε — малый параметр, t — время, f — n-мерная вектор-функция, определенная в некоторой области D, $t\in[t_0,\ T]$, $T=L\varepsilon^{-1}$, $L=\mathrm{const}$, $\varepsilon\in[0,\ \varepsilon_1]$, а множества D_x и D_u являются открытыми или замкнутыми, $t_0\geqslant 0$, T фиксировано. Требуется определить кусочно-непрерывное управление $u(t,\ \varepsilon)\in D_u$, которое на траекториях системы (1.1) — (1.2) минимизирует значение функционала

$$I[u]=\Phi(x(T,\varepsilon))+\int_{t_0}^{T}F(t,x,u,\varepsilon)\,dt \tag{1.3}$$

Предположим, что определенная в области D вектор-функция $f(t,\ x,\ u(t,\ \varepsilon),\ \varepsilon)$ удовлетворяет следующим условиям: в этой области она равномерно ограничена и непрерывна по x равномерно относительно t, x, ε; f есть функция интегрально-непрерывная по ε в точке ε_0 [1]; при $\varepsilon=\varepsilon_0$ уравнение (1.1) имеет единственное решение $x(t,\ u(\cdot),\ \varepsilon)\in D_x$, определенное при $t_0\leqslant t\leqslant T$ и такое, что $x(t_0,\ u(\cdot),\ \varepsilon_0)=x_0^0\in D_x$. Тогда можно доказать, что для всякого $\eta>0$ существует окрестность $E(\varepsilon_0)$ точки ε_0, такая, что для всех $\varepsilon\in E(\varepsilon_0)$ и для всех решений уравнения (1.1), удовлетворяющих начальному условию в момент времени t_0, $x(t_0,\ u(\cdot),\ \varepsilon_0)=x_0^0$, справедливо неравенство

$$\|x(t,\ u(\cdot),\ \varepsilon)-x(t,\ u(\cdot),\ \varepsilon_0)\|<\eta \tag{1.4}$$

В силу принятых допущений будет оправдана методика усреднения по быстрой переменной, а также сравнительная характеристика решений исходной и усредненной задач, полученных численными методами.

В дальнейшем рассматривается случай, когда в системе (1.1) можно выделить быстрые и медленные переменные, записав ее в специальном виде [2]. Такое преобразование иногда можно выполнить подходящей заменой переменных или использованием определенных свойств конкретной задачи и найденных ее первых интегралов.

2. Пусть движение управляемого объекта описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений, содержащей медленную x и

быструю y векторные переменные

$$x^{\bullet}=\varepsilon X(t,\ x,\ y,\ u,\ \varepsilon),\quad y^{\bullet}=Y(t,\ x,\ y,\ u)+\varepsilon Z(t,\ x,\ y,\ u,\ \varepsilon) \tag{2.1}$$

Здесь x, X — векторы размерности n; y, Y, Z — векторы размерности m, u — вектор управления размерности r из множества U, ε — малый параметр, $\varepsilon\in[0,\ \varepsilon_1]$, причем предполагается, что векторные функции X, Y, Z являются аналитическими функциями параметра ε во всей области их определения D:

$$D=\{(t,\ x,\ y,\ \varepsilon):t\in[t_0,\ T],\ x\in D_x,\ y\in D_y,\ \varepsilon\in[0,\ \varepsilon_1]\} \tag{2.2}$$

Начальные и конечные условия задаются соотношениями

$$x(t_0)=x^0,\ y(t_0)=y^0,\ x(T)=x^T \tag{2.3}$$

Движение системы исследуется на асимптотически большом интервале времени $T\sim\varepsilon^{-1}$, на котором медленные переменные изменяются на величины порядка единицы, а быстрые — на величины порядка ε^{-1}. Правые части уравнений (2.1) нужное число раз дифференцируемы по всем аргументам. Требуется определить стабилизирующее управление $u(t,\ x,\ y)\in\in U$, переводящее систему из произвольного начального состояния $(x_0,\ y_0)\in D$ в заданное устойчивое конечное положение $x^T\in D$ и минимизирующее на траекториях системы функционал

$$I[u]=\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{t_0}^{T}X_0(t,x,y,u,\varepsilon)\,dt \tag{2.4}$$

В дальнейшем будут рассматриваться одночастотные системы или приводящиеся к ним. Исходная стабилизируемая система приводится к стандартной форме с вращающейся фазой, усреднением которой по этой фазе разделяются быстрые и медленные движения.

3. Исследование задачи об оптимальной стабилизации проводится в предположении выполнения условий, обеспечивающих существование решения и его единственность. Воспользовавшись принципом максимума Л. С. Понтрягина, представим функцию Гамильтона в виде

$$H=-{}^1/{}_2\varepsilon X_0+\varepsilon\psi X+\varphi Y+\varepsilon\varphi Z \tag{3.1}$$

Здесь ψ — n-мерный вектор, сопряженный медленной переменной x, а φ — m-мерный вектор, сопряженный быстрой переменной y, причем эти сопряженные или импульсные векторы определяются соотношениями

$$\begin{aligned}\psi^{\bullet}&=-\frac{\partial H}{\partial x}=-\varepsilon\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial X_0}{\partial x}+\psi\frac{\partial X}{\partial x}\right)-\varphi\left(\frac{\partial Y}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\\ \varphi^{\bullet}&=-\frac{\partial H}{\partial y}=-\varepsilon\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial X_0}{\partial y}+\psi\frac{\partial X}{\partial y}\right)-\varphi\left(\frac{\partial Y}{\partial y}+\varepsilon\frac{\partial Z}{\partial y}\right)\end{aligned} \tag{3.2}$$

и дополнительным условием на правом конце $\varphi(T)=0$.

Управляющие воздействия u^* находятся из условия максимума гамильтона H по u с помощью обычной процедуры

$$H(t,x,y,u^*,\varphi,\psi)=\max_{u\in U}H(t,x,y,u,\varphi,\psi) \tag{3.3}$$

причем в силу высказанного предположения найденное, предполагаемое оптимальным управление разрешает сформулированную задачу.

Пусть множество U является открытым. Тогда необходимое условие экстремума гамильтониана сводится к системе нелинейных уравнений вида

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0,\qquad -\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial X_0}{\partial u}+\varepsilon\psi\frac{\partial X}{\partial u}+\varphi\frac{\partial Y}{\partial u}+\varepsilon\varphi\frac{\partial Z}{\partial u}=0 \tag{3.4}$$

откуда находятся оптимальные управляющие функции

$$u^*=u^*(t,\ x,\ y,\ \varepsilon,\ \psi,\ \varphi) \tag{3.5}$$

а следовательно, исходная оптимизационная задача сводится к специальной двухточечной краевой задаче, зависящей от малого параметра ε, причем наличие в системе малых возмущений позволяет воспользоваться разработанной в [3] методикой усреднения по быстрой переменной.

Дальнейшие выкладки и преобразования проведем для управляемых систем специального вида, хотя структура алгоритма сохраняется и в более общем случае.

Рассмотрим класс задач, описываемых системой уравнений (2.1), в которой соответствующие функции правых частей уравнений и функционала определяются выражениями

$$X=X(x,\ y,\ u),\qquad X_0=X_0(x,\ y,\ u),\qquad Y=Y(x,\ y),\qquad Z=0 \tag{3.6}$$

Так как система слабоуправляемая, то с учетом (3.6) обе части уравнения (3.4) можно разделить на $\varepsilon\neq0$ и из полученного векторного уравнения выразить оптимальные управляющие воздействия в виде функции искомых переменных $u^*=u^*(x,\ y,\ \psi)$.

Теперь надлежит выполнить такие преобразования, чтобы медленные и быстрые переменные в исходной и сопряженной системах разделились. Для получения нужной краевой задачи будем придерживаться следующей схемы.

Потребуем, чтобы правые части уравнений для медленных переменных $X(x,\ y,\ u)$ и подынтегральная функция $X_0(x,\ y,\ u)$ зависели лишь от одной быстрой переменной y_k и были бы периодическими функциями y_k с периодом 2π. Этого можно добиться за счет специального вида функции управления. Необходимые и достаточные условия, которым должно удовлетворять указанное управление, даны в [4]. После подстановки таких управлений в X и X_0 получим выражения

$$X(x,\ y,\ u^*(x,\ y,\ \psi))=f(x,\ y_k,\ \psi),\qquad X_0(x,\ y,\ u^*(x,\ y,\ \psi))=f_0(x,\ y_k,\ \psi) \tag{3.7}$$

Дальше будет показано на конкретном примере, что класс прикладных задач, обладающих указанным свойством, не пуст.

Дифференциальное уравнение $y_k^{\boldsymbol{\cdot}}=Y_k(x,\ y)$ приводится путем подходящей замены переменных к стандартному виду с вращающейся фазой $G_k(x)$, которая зависит лишь от медленных переменных.

Уравнения для определения оставшихся быстрых переменных y_i, $i=\overline{1,\ m}$, $i\neq k$ приводятся к виду

$$y_i^{\boldsymbol{\cdot}}=G_i(x,\ y_k),\qquad y_i(t_0)=y_i^0 \tag{3.8}$$

откуда они могут быть получены квадратурами. В результате указанных преобразований приходим к краевой задаче

$$\begin{gathered}
x^{\boldsymbol{\cdot}}=\varepsilon f(x,\ y_k,\ \psi),\qquad x(t_0)=x^0,\ x(T)=x^T\\
y_k^{\boldsymbol{\cdot}}=G_k(x),\qquad y_k(t_0)=y_k^0,\qquad \varphi(T)=0\\
\psi^{\boldsymbol{\cdot}}=-\varepsilon\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial f_0(x,y_k,\psi)}{\partial x}+\psi\frac{\partial f(x,y_k,\psi)}{\partial x}\right)-\varphi\frac{\partial G}{\partial x}\\
\varphi^{\boldsymbol{\cdot}}=-\varepsilon\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial f_0(x,y_k,\psi)}{\partial y}+\psi\frac{\partial f(x,y_k,\psi)}{\partial y}\right)-\varphi\frac{\partial G}{\partial y}
\end{gathered} \tag{3.9}$$

Здесь G, f и f_0 — достаточно гладкие функции своих аргументов, являющиеся 2π-периодическими функциями по y_k.

Полученная краевая задача (3.9) усредняется по быстрой переменной y_k [3, 4] по формулам

$$\begin{gathered}
F(x,\psi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{t_0}^{t_0+2\pi} f(x,y_k,\psi)\,dy_k,\\
F_0(x,\psi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{t_0}^{t_0+2\pi} f_0(x,y_k,\psi)\,dy_k
\end{gathered} \tag{3.10}$$

Сохранив за новыми переменными те же обозначения, усредненную краевую задачу окончательно запишем в виде

$$x^{\cdot}=\varepsilon F(x,\ \psi),\quad x(t_0)=x^0,\quad x(T)=x^T \tag{3.11}$$
$$y_k^{\cdot}=G_k(x),\quad y_k(t_0)=y_k^0,\quad \varphi(T)=0$$
$$\psi^{\cdot}=\varepsilon\left(\frac{1}{2}\frac{\partial F_0(x,\psi)}{\partial x}-\psi\frac{\partial F(x,\psi)}{\partial x}\right)-\varphi\frac{\partial G}{\partial x}$$
$$\varphi^{\cdot}=\varepsilon\left(\frac{1}{2}\frac{\partial F_0(x,\psi)}{\partial y}-\psi\frac{\partial F(x,\psi)}{\partial y}\right)-\varphi\frac{\partial G}{\partial y}$$

Анализируя правые части последней системы, замечаем, что

$$\frac{\partial F_0(x,\psi)}{\partial y}=\frac{\partial F(x,\psi)}{\partial y}=\frac{\partial G_k(x)}{\partial y}=\frac{\partial G_i(x,y_k)}{\partial y_i}=0$$

для всех $i=\overline{1,\ m}$, $i\neq k$, а поэтому последнее уравнение вырождается в $\varphi^{\cdot}=0$, $\varphi(T)=0$, откуда $\varphi=0$.

Таким образом, окончательно приходим к краевой задаче

$$x^{\cdot}=\varepsilon F(x,\ \psi),\quad y_k^{\cdot}=G_k(x)$$
$$\psi^{\cdot}=\varepsilon\left({}^1\!/_2\partial F_0(x,\ \psi)/\partial x-\psi\partial F(x,\ \psi)/\partial x\right) \tag{3.12}$$
$$x(t_0)=x^0,\quad x(T)=x^T,\quad y_k(t_0)=y_k^0$$

в которой можно отдельно определить медленные переменные x и ψ, а затем квадратурами все быстрые y. Для нахождения медленных переменных перейдем к медленному времени $\tau=\varepsilon t$, после чего приходим к краевой задаче

$$x^{\cdot}=F(x,\ \psi),\quad x(t_0)=x^0,\quad x(T)=x^T \tag{3.13}$$
$$\psi^{\cdot}={}^1\!/_2\partial F_0(x,\ \psi)/\partial x-\psi\partial F(x,\ \psi)/\partial x$$

Полученная задача (3.13) проще исходной, причем согласно общей теории метода усреднения медленные переменные определяются с погрешностью ε, а быстрые — с погрешностью порядка единицы на интервале изменения времени t порядка ε^{-1}.

4. В качестве иллюстрации изложенной методики рассматривается управляемое движение динамически симметричного тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, описываемое системой вида

$$Ap^{\cdot}+(C-A)qr=w\sin\theta\cos\varphi_0+\varepsilon u_1$$
$$Aq^{\cdot}+(A-C)pr=-w\sin\theta\sin\varphi_0+\varepsilon u_2$$
$$Cr^{\cdot}=\varepsilon u_3,\quad w=mgl,\quad d=1-CA^{-1} \tag{4.1}$$
$$\varphi_0^{\cdot}=r-(p\sin\varphi_0+q\cos\varphi_0)\operatorname{ctg}\theta$$
$$\theta^{\cdot}=p\cos\varphi_0-q\sin\varphi_0,\quad \Psi_0^{\cdot}=(p\sin\varphi_0+q\cos\varphi_0)\operatorname{cosec}\theta$$

где p, q, r — проекции вектора угловой скорости ω на главные оси инерции тела, u_i, $i=1$, 2, 3 — проекции вектора управления, $u_i=u_i(p,\ q,\ r,\ \varphi_0,\ \theta,\ \Psi_0)$, φ_0, θ, Ψ_0 — углы Эйлера, m — масса тела, g — ускорение силы тяжести, l — расстояние от неподвижной точки O до центра масс тела, A — экваториальный, C — осевой моменты инерции тела, ε — малый параметр, причем при $\varepsilon=0$ система описывает движение в случае Лагранжа. Минимизируемый функционал выбирается в виде

$$I[u]=\frac{\varepsilon}{2}\int_{t_0}^{T}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+u_1^2+u_2^2+u_3^2)\,dt \tag{4.2}$$

Преобразуя исходную задачу к стандартной форме [5], имеем

$$x_1^{\cdot}=\varepsilon\left[(u_1\sin x_4+u_2\cos x_4)\sin x_5+u_3\cos x_5\right]$$

$$x_2^{\cdot}=\varepsilon(u_1p+u_2q+u_3x_3),\qquad x_3^{\cdot}=\varepsilon C^{-1}u_3 \tag{4.3}$$
$$x_4^{\cdot}=x_3-(p\sin x_4+q\cos x_4)\operatorname{ctg}x_5$$
$$x_5^{\cdot}=p\cos x_4-q\sin x_4,\qquad x_6^{\cdot}=(p\sin x_4+q\cos x_4)\operatorname{cosec}x_5$$

при этом p и q могут быть найдены из соотношений вида

$$P=p\sin x_4+q\cos x_4=(x_1-Cx_3\cos x_5)(A\sin x_5)^{-1}$$
$$Q=p^2+q^2=[2(x_2-w\cos x_5)-Cx_3^2]A^{-1} \tag{4.4}$$

а функция Гамильтона для этой задачи представима выражением

$$H=-{}^1/{}_2\varepsilon(x_1^2+x_2^2+x_3^2+u_1^2+u_2^2+u_3^2)+\varepsilon\psi_1[(u_1\sin x_4+u_2\cos x_4)\sin x_5+$$
$$+u_3\cos x_5]+\varepsilon\psi_2(u_1p+u_2q+u_3x_3)+\varepsilon\psi_3C^{-1}u_3+\psi_4(x_3-P\operatorname{ctg}x_5)+\psi_5R+ \tag{4.5}$$
$$+\psi_6P\operatorname{cosec}x_5,\qquad R=\pm(Q-P^2)^{1/2}$$

Знак перед корнем выбирается в зависимости от поведения угла x_5. Если угол x_5 увеличивается, то величина R должна быть положительной, в противном случае — отрицательной.

Из принципа максимума получим управления

$$u_1=\psi_1\sin x_4\sin x_5+\psi_2p,\qquad u_2=\psi_1\cos x_4\sin x_5+\psi_2q$$
$$u_3=\psi_1\cos x_5+\psi_2x_3+\psi_3C^{-1} \tag{4.6}$$

имеющие требуемый вид и удовлетворяющие необходимому и достаточному условиям исключения зависимости правых частей уравнений для медленных переменных от x_4 и x_6. Подставляя управления в систему и функцию Гамильтона и дифференцируя последнюю, получим краевую задачу принципа максимума

$$x_1^{\cdot}=\varepsilon[\psi_1+\psi_2(x_1A^{-1}+x_3\cos x_5d)+\psi_3C^{-1}\cos x_5]$$
$$x_2^{\cdot}=\varepsilon[\psi_1(x_1A^{-1}+x_3\cos x_5d)+ \tag{4.7}$$
$$+\psi_2(2A^{-1}(x_2-w\cos x_5)+x_5^2d)+\psi_3C^{-1}x_3]$$
$$x_3^{\cdot}=\varepsilon C^{-1}(\psi_1\cos x_5+\psi_2x_3+\psi_3C^{-1})$$
$$x_4^{\cdot}=x_3-P\operatorname{ctg}x_5,\qquad x_5^{\cdot}=R,\qquad x_6^{\cdot}=P\operatorname{cosec}x_5$$
$$\psi_1^{\cdot}=\varepsilon(x_1-\psi_1\psi_2A^{-1})+\psi_5(x_1-Cx_5\cos x_5)(A^2R\sin^2x_5)^{-1}$$
$$\psi_2^{\cdot}=\varepsilon(x_2-\psi_2^2A^{-1})-\psi_5(AR)^{-1}$$
$$\psi_3^{\cdot}=\varepsilon(x_3-\psi_2((\psi_1\cos x_5+\psi_2x_3)d+\psi_3C^{-1}))+$$
$$+\psi_5(Cx_3\sin x_5-C\cos x_5(x_1-Cx_3\cos x_5)\times$$
$$\times(A\sin x_5)^{-1})(AR\sin x_5)^{-1},\qquad \psi_4^{\cdot}=0,\qquad \psi_6^{\cdot}=0$$
$$\psi_5^{\cdot}=\varepsilon(\psi_1\psi_2dx_3-\psi_2^2wA^{-1}+\psi_1\psi_3C^{-1})\sin x_5-$$
$$-[A^{-1}w\sin^2x_5-Cx_3(x_1-Cx_3\cos x_5)+(x_1-$$
$$-Cx_3\cos x_5)^2\cos x_5(\sin x_5)^{-2}](A^2R\sin x_5)^{-1}$$
$$x(t_0)=x^0,\quad x_i(T)=x_i^T\quad(i=1,2,3),\qquad \psi_j(T)=0\quad(j=4,5,6)$$

Прежде чем применять метод усреднения по быстрой переменной x_5, преобразуем уравнение $x_5^{\cdot}=R$ к стандартному виду с вращающейся фазой. Для этого выполним замену переменных $z=\cos x_5$, откуда $x_5=\arccos z$, $x_5^{\cdot}=-(1-z^2)^{-1/2}$.

Подставив эти выражения в уравнение относительно x_5:

$$x_5^{\cdot}=\pm\left[\frac{2(x_2-w\cos x_5)-Cx_3^2}{A}-\left(\frac{x_1-Cx_3\cos x_5}{A\sin x_5}\right)^2\right]^{1/2}$$

и выполнив некоторые преобразования, получим соотношение, которое преобразуется в кубическое уравнение относительно z:

$$z^3+\left(-\frac{x_2}{w}+\frac{Cx_3^2}{2w}+\frac{C^2x_3^2}{2Aw}\right)z^2+\left(-1-\frac{Cx_1x_3}{Aw}\right)z+$$

$$+\left(-\frac{A}{2w}+\frac{x_2}{w}-\frac{Cx_3^2}{2w}+\frac{x_1^2}{2Aw}\right)=0 \qquad (4.8)$$

откуда можно получить зависимость $z=z(x_1, x_2, x_3)$, а следовательно, $x_5=\arccos z(x_1, x_2, x_3)$. Функции x_4 и x_6 могут быть получены квадратурами. Применяя метод усреднения, получим $\psi_4^{\bullet}=0$, $\psi_4(T)=0$, $\psi_4\equiv0$, $\psi_5^{\bullet}=0$, $\psi_5(T)=0$, $\psi_5\equiv0$, $\psi_6^{\bullet}=0$, $\psi_6(T)=0$, $\psi_6\equiv0$.

Остается решить следующую краевую задачу в медленном времени:

$$x_1^{\bullet}=\psi_1+\psi_2A^{-1}x_1 \qquad (4.9)$$

$$x_2^{\bullet}=\psi_1A^{-1}x_1+2\psi_2A^{-1}x_2+\psi_2x_3^2d+\psi_3C^{-1}x_3$$

$$x_3^{\bullet}=\psi_2C^{-1}x_3+\psi_3C^{-1}, \qquad \psi_1^{\bullet}=x_1-\psi_1\psi_2A^{-1}$$

$$\psi_2^{\bullet}=x_2-\psi_2^2A^{-1}, \qquad \psi_3^{\bullet}=x_3-\psi_2^2x_3d-\psi_1\psi_3C^{-1}$$

Усредненная система интегрировалась численно на ЭВМ при следующих граничных условиях:

$$t_0=0,\quad x_1(t_0)=-1{,}732,\quad x_2(t_0)=0{,}987,\quad x_3(t_0)=1{,}732;\quad T=50,\quad x_1(T)=0,$$

$$x_2(T)=-0{,}5,\quad x_3(T)=0.$$

Твердое тело при таких начальных условиях переводится в устойчивое положение равновесия при значениях $A=1{,}5$, $C=1$. Численное решение задач проводилось методом минимизации невязки [6].

С целью получения возможности качественного сравнения результатов решения задачи об оптимальной стабилизации с результатами работы [4] и осуществления в какой-то степени контроля правильности численного решения были выбраны некоторые параметры системы и граничные условия такие же, как и в работе [4]. Сравнительный качественный анализ показал некоторое отличие в поведении отдельных параметров системы. Например, функция $r(\tau)$ в работе [4] убывает монотонно на всем промежутке, а в задаче оптимальной стабилизации наблюдаются участки нарушения монотонности и даже незначительное ее возрастание. На результатах численного решения задачи существенно сказываются характерные особенности краевой задачи принципа максимума, ее нелинейность, качество выбора начальных приближений для сопряженных переменных, длина промежутка интегрирования.

Таким образом, проведенное исследование позволяет сделать вывод о возможности применения развитой в работах [3, 4] методики усреднения по быстрой переменной к некоторым специальным задачам оптимальной стабилизации с малыми возмущениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наук. думка, 1971. 440 с.
2. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
3. *Черноусько Ф. Л.* О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов.– ПММ, 1963, т. 27, вып. 3, с. 474–483.
4. *Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Черноусько Ф. Л.* Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа.– ПММ, 1979, т. 43, вып. 5, с. 771–778.
5. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. В.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.
6. *Моисеев Н. Н.* Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975. 526 с.

Одесса

Поступила в редакцию
11.III.1985