МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1987

УДК 531.36

О СУБОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ЗАДАЧАХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

ЛАРИН В. Б., НАУМЕНКО К. И.

Исследуются вопросы синтеза фильтра Калмана – Бьюси, который формирует оценку вектора малого поворота, определяющего ошибку интегрирования кинематических уравнений. Показано, что в случаях, когда измеряемый вектор, ориентация которого известна в неподвижной системе координат, вращается с малой угловой скоростью или малы погрешности измерений этого вектора, при реализации фильтра наблюдается потеря устойчивости вычислительного процесса. В связи с этим обсуждаются вопросы синтеза субоптимальных фильтров, не требующих процедуры интегрирования уравнений Риккати, и нелинейных фильтров некалмановской структуры, при реализации которых не возникает вычислительная неустойчивость в упомянутых ситуациях. Исследуется эффективность оценивания нелинейным фильтром при возникновении в процессе его функционирования конечных ошибок.

1. Фильтр Калмана — Бьюси. Рассмотрим задачу определения ориентации твердого тела по результатам измерения проекций вектора угловой скорости на оси связанной с телом системы координат и информации о проекциях на эти же оси подвижного вектора, ориентация которого известна в неподвижной системе координат. Для матрицы направляющих косинусов A, определяющей ориентацию связанной с телом системы координат относительно неподвижной, справедливы кинематические уравнения

$$A^{\cdot}=-V(\omega)A,\quad V(\omega)=\begin{Vmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{Vmatrix}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}=\|\omega_1\omega_2\omega_3\|^T$ — вектор угловой скорости тела в проекциях на оси связанной с телом системы координат, T — знак операции транспонирования.

Пусть при известной (с некоторой погрешностью) начальной ориентации твердого тела, заданной матрицей направляющих косинусов $A_0(t_0)$, и сопровождающихся погрешностями измерения вектора угловой скорости тела ($\mathbf{v}$ — вектор погрешностей измерений)

$$\boldsymbol{\omega}_0=\boldsymbol{\omega}+\mathbf{v} \tag{1.1}$$

доступна информация о проекциях на связанные с телом оси нормированного вектора $\mathbf{m}(t)$, положение которого задано в неподвижной системе координат

$$\mathbf{k}=\mathbf{r}+\boldsymbol{\varepsilon},\qquad \mathbf{r}=\mathbf{A}\mathbf{m} \tag{1.2}$$

Компоненты вектора $\mathbf{r}$ определяют величины этих проекций, а $\boldsymbol{\varepsilon}$ — вектор погрешностей.

Задача состоит в определении ориентации твердого тела по результатам интегрирования кинематических уравнений

$$A_0^{\cdot}=-V(\boldsymbol{\omega}_0)A_0 \tag{1.3}$$

с начальным значением $A_0(t_0)$ и по результатам измерений (1.2).

Сформулированная задача является задачей нелинейной фильтрации. Так, если наблюдения (1.2) дополнить требованием $A_0{}^TA_0=E$ (E — единичная матрица), интерпретировав его как измерения, не сопровождающиеся погрешностями, то результаты наблюдений являются квадратичными функциями параметров состояния объекта (1.3).

Аналогичная ситуация возникает, если ориентацию тела задавать параметрами Родрига — Гамильтона λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 [1, 2], которые можно представить четырехмерным вектором $\boldsymbol{\lambda}=\|\lambda_0\boldsymbol{\lambda}_v^T\|^T$ ($\boldsymbol{\lambda}_v^T=\|\lambda_1\lambda_2\lambda_3\|$). В этом случае кинематические уравнения и результаты измерений (1.2) можно записать в виде

$$\boldsymbol{\lambda}^\cdot={}^1/_2\Phi(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\lambda}, \qquad \Phi(\boldsymbol{\omega})=\left\|\begin{matrix} 0 & -\boldsymbol{\omega}^T \\ \boldsymbol{\omega} & -V(\boldsymbol{\omega})\end{matrix}\right\| \tag{1.4}$$

$$\mathbf{k}=A(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{m}+\boldsymbol{\varepsilon}, \qquad A(\boldsymbol{\lambda})=(\lambda_0^2-\boldsymbol{\lambda}_v^T\boldsymbol{\lambda}_v)E+2[\boldsymbol{\lambda}_v\boldsymbol{\lambda}_v^T-\lambda_0V(\boldsymbol{\lambda}_v)] \tag{1.5}$$

Обычными подходами при решении сформулированной задачи являются методы линеаризации в той или иной форме и построение фильтров типа Калмана — Бьюси [1, 3]. Рассмотрим один из таких подходов.

Пусть погрешность начальной ориентации мала, т. е. $A(t_0)A_0^T(t_0)\simeq E$, и также малы погрешности измерений (1.1) и (1.2). Тогда вектор малого поворота $\boldsymbol{\vartheta}$, совмещающий оси трехгранника, определяемого результатами интегрирования уравнений (1.3), с осями связанной с телом системы координат, является решением линейного дифференциального уравнения (уравнение ошибок) [3] с соответствующим начальным значением

$$\boldsymbol{\vartheta}^\cdot=-V(\boldsymbol{\omega}_0)\boldsymbol{\vartheta}-\mathbf{v} \tag{1.6}$$

Использование дополнительной информации (1.2) предполагает коррекцию результата интегрирования кинематических уравнений (1.3) при помощи оценки вектора малого поворота $\boldsymbol{\vartheta}$, полученной на основании измерений (1.2). Не затрагивая вопросов реализации коррекции (см. [3]), далее будем рассматривать только задачу оценивания.

В качестве информации для отыскания оценки вектора малого поворота $\boldsymbol{\vartheta}$ используется вектор невязок

$$\mathbf{y}=\mathbf{k}-A_0\mathbf{m} \tag{1.7}$$

для которого имеет место представление [3]:

$$\mathbf{y}=V(\mathbf{k})\boldsymbol{\vartheta}+\boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.8}$$

При известных статистических характеристиках погрешностей начальной ориентации и измерений (1.1), (1.2) традиционной схемой определения оценок состояния объекта, описываемого уравнением (1.6), по результатам наблюдений (1.8) является фильтр Калмана — Бьюси [4]. Так, пусть задающий ошибку начальной ориентации вектор $\boldsymbol{\vartheta}(t_0)$ — случайный вектор с известным математическим ожиданием $\langle\boldsymbol{\vartheta}(t_0)\rangle$ и ковариационной матрицей $\langle\boldsymbol{\vartheta}(t_0)\boldsymbol{\vartheta}^T(t_0)\rangle=\alpha_0^2E$, а погрешности измерений $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ — независимые центрированные векторы с ковариационными матрицами $\langle\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(\tau)\rangle=\varkappa^2E\delta(t-\tau)$, $\langle\boldsymbol{\varepsilon}(t)\boldsymbol{\varepsilon}^T(\tau)\rangle=\beta^2E\delta(t-\tau)$ (ковариационные матрицы случайных процессов выбраны пропорциональными единичной с целью упрощения последующего аналитического исследования). Тогда искомая оценка является решением дифференциального уравнения

$$\boldsymbol{\vartheta}^{\vee\cdot}=-V(\boldsymbol{\omega}_0)\boldsymbol{\vartheta}^\vee-\beta^{-2}SV(\mathbf{k})[y-V(\mathbf{k})\boldsymbol{\vartheta}^\vee] \tag{1.9}$$

с начальным значением $\boldsymbol{\vartheta}^\vee(t_0)=\langle\boldsymbol{\vartheta}(t_0)\rangle$, а симметричная неотрицательно определенная ковариационная матрица ошибки оценки S — решение дифференциального уравнения Риккати

$$S^\cdot=-V(\boldsymbol{\omega}_0)S+SV(\boldsymbol{\omega}_0)+\beta^{-2}SV^2(\mathbf{k})S+\varkappa^2E \tag{1.10}$$

с начальным значением $S(t_0)=\alpha_0^2E$.

Отметим, что при численной реализации фильтра типа (1.9) наблюдалась потеря устойчивости вычислительной процедуры и приходилось сознательно загрублять оценки путем использования субоптимальных фильтров [1]. Эффект вычислительной неустойчивости чаще всего объясняется нелинейностью исходной задачи[1]. Однако, как будет показано, может иметь место потеря устойчивости вычислительной процедуры, связанная не с нелинейностью сформулированной задачи, а с неустойчивостью процесса интегрирования дифференциального уравнения Риккати (1.10). В этой связи возникает вопрос о синтезе субоптимальных фильтров при решении таких задач, т. е. фильтров, не требующих процедуры интегрирования уравнения (1.10) или вообще не использующих калмановскую структуру.

2. Реализация фильтра Калмана — Бьюси. Вычислительная неустойчивость процедуры построения фильтра (1.9) может возникнуть при решении дифференциального уравнения (1.10), если в процессе этого решения будет получаться плохо обусловленная матрица S. Вследствие этого матрица S может потерять свойство неотрицательной определенности, что приведет к расходимости процесса фильтрации.

Рассматриваемые вопросы целесообразно исследовать на примере, допускающем достаточно глубокое аналитическое исследование решения. Пусть измеряемый вектор $\mathbf{m}$ вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси, фиксированной в неподвижной системе координат.

Отметим, что изменение ориентации в неподвижной системе координат наблюдаемого вектора несет дополнительную информацию. Это утверждение можно проиллюстрировать примером.

Рассмотрим два варианта задачи определения начальной ориентации объекта по показаниям датчиков угловой скорости и проекциям на оси подвижной системы координат вектора, ориентация которого известна в неподвижной системе. Пусть датчики угловой скорости идеальны и проекции вектора регистрируются без помех (можно их дифференцировать). Для простоты предположим, что объект неподвижен (сигналы датчиков равны нулю). В первом варианте задачи полагаем, что наблюдаемый вектор неподвижен. Очевидно, в этом случае ориентацию объекта можно определить с точностью до поворота вокруг наблюдаемого вектора. Во втором варианте предположим подвижность этого вектора. В этом случае ориентация определяется уже точно, так как имеется возможность использовать в качестве второго доступного наблюдению вектора скорость конца подвижного вектора (дополнительный канал информации). Аналогичная точка зрения содержится и в [3].

Для упрощения исследования рассматриваемой задачи введем в уравнениях (1.6), (1.8) и (1.9) замену переменных

$$\boldsymbol{\vartheta}=U\mathbf{x},\quad \boldsymbol{\vartheta}^{\vee}=U\mathbf{x}^{\vee},\quad \mathbf{y}=U\mathbf{z},\quad U=A_0A_m \tag{2.1}$$

Здесь матрица A_m — решение уравнения $A_m^{\bullet}=A_mV(\boldsymbol{\omega}_m)$ с единичным начальным значением, а $\boldsymbol{\omega}_m$ — вектор угловой скорости некоторого жестко связанного с измеряемым вектором $\mathbf{m}$ трехгранника в проекциях на неподвижную систему координат, т. е. $\mathbf{m}=A_m\mathbf{m}_0$, где $\mathbf{m}_0=\mathbf{m}(t_0)$.

Ортогональная замена переменных (2.1) преобразует уравнения (1.6), (1.8), (1.9) к виду

$$\mathbf{x}^{\bullet}=-V(\boldsymbol{\omega}_m)\mathbf{x}+U^T\mathbf{v},\quad \mathbf{z}=V(m_0)\mathbf{x}+U^T\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.2}$$

$$\mathbf{x}^{\vee\bullet}=-V(\boldsymbol{\omega}_m)\mathbf{x}^{\vee}-\beta^{-2}PV(\mathbf{m}_0)[\mathbf{z}-V(\mathbf{m}_0)\mathbf{x}^{\vee}] \tag{2.3}$$

причем в уравнениях (2.2) и (2.3) учитываются величины того же порядка малости, что и в соответствующих им уравнениях (1.8) и (1.9), а матрица P — решение дифференциального уравнения Риккати

$$P^{\bullet}=-V(\boldsymbol{\omega}_m)P+PV(\boldsymbol{\omega}_m)+\beta^{-2}PV^2(\mathbf{m}_0)P+\varkappa^2E \tag{2.4}$$

с начальным значением $P(t_0)=\alpha_0^2E$.

Таким образом, в рассматриваемом случае уравнение Риккати (2.4) является уравнением с постоянными коэффициентами и в нем, не умаляя общности, можно положить (u и γ — постоянные величины):

$$\boldsymbol{\omega}_m=\begin{Vmatrix}0\\0\\u\end{Vmatrix},\quad \mathbf{m}_0=\begin{Vmatrix}0\\\cos\gamma\\\sin\gamma\end{Vmatrix}$$

[1] См. [5]: если начальная оценка является плохой или возмущения велики настолько, что линеаризация дает неадекватное описание системы, то можно не получить сходимости к приемлемой оценке.

Поскольку нахождение аналитического решения дифференциального уравнения Риккати даже в случае постоянных коэффициентов — далеко не тривиальная задача, ограничимся исследованием стационарного решения уравнения (2.4). Этим решением является постоянная неотрицательно определенная симметричная матрица P, удовлетворяющая алгебраическому уравнению Риккати

$$R(P)=-V(\omega_m)P+PV(\omega_m)+\beta^{-2}PV^2(\mathbf{m}_0)P+\varkappa^2E=0 \tag{2.5}$$

и обеспечивающая расположение собственных чисел матрицы $-V(\omega_m)+$ $+\beta^{-2}PV^2(\mathbf{m}_0)$ в левой полуплоскости.

Когда u или β — малые величины (вектор $\mathbf{m}$ вращается с малой угловой скоростью или мала интенсивность шума погрешности измерений этого вектора), искомое решение уравнения (2.5) в первом приближении имеет вид ($s=\sin\gamma$, $c=\cos\gamma$):

$$P^{(1)}=\beta\begin{Vmatrix} \varkappa+\beta uc & (\varkappa-\beta uc)\,c & (\varkappa-\beta uc)\,s \\ (\varkappa-\beta uc)\,c & \dfrac{\varkappa^2 c}{u\beta}+\varkappa-\beta uc & \dfrac{\varkappa^2 s}{u\beta} \\ (\varkappa-\beta uc)\,s & \dfrac{\varkappa^2 s}{u\beta} & \dfrac{\varkappa^2 s^2}{u\beta c}+\varkappa+\beta uc^{-1}s^2 \end{Vmatrix} \tag{2.6}$$

причем подстановка этого приближения в (2.5) дает

$$R\left(P^{(1)}\right)=\beta^2u^2\begin{Vmatrix} -3c^2 & c^3-2c & c^2s \\ c^3-2c & c^2 & 0 \\ c^2s & 0 & -s^2 \end{Vmatrix}$$

Известно, что для плохо обусловленной положительно-определенной матрицы малые возмущения могут привести к ее вырожденности и даже потере свойства неотрицательной определенности [6]. В связи с этим исследуем обусловленность полученного стационарного решения уравнения Риккати. Число обусловленности (отношение максимального сингулярного числа к минимальному) [6] матрицы $P^{(1)}$ имеет вид $\operatorname{cond} P^{(1)}=$ $=(\varkappa/(u\beta\cos\gamma)+1+\ldots)^2$ и, следовательно, при малых u или β матрица $P^{(1)}$ является плохо обусловленной. Поэтому для того, чтобы в процессе интегрирования уравнения (2.4) матрица P не потеряла свойство положительной определенности, относительная погрешность вычисления ее элементов должна быть достаточно малой, так как известно (см. [6, п. 16.3]), что возмущенная матрица $P+\varepsilon$ будет невырожденной, если норма $\|\varepsilon\|$ возмущения ε удовлетворяет неравенству $\|\varepsilon\|\|P\|^{-1}\leqslant(\operatorname{cond}P)^{-1}$. Так, например, в процессе вычисления малые возмущения коэффициентов, имеющих множитель $(u\beta)^{-1}$, в элементах матрицы $P^{(1)}$ могут приводить к вырожденности и, более того, к потере свойства неотрицательной определенности этой матрицы.

Такого рода эффекты, вероятно, являются одной из причин синтеза фильтров, регуляризующих или вообще исключающих процедуру интегрирования уравнения Риккати, но сохраняющих в той или иной мере калмановскую структуру. Такие фильтры реализуются искусственным загрублением статистических характеристик шумов измерений [1], использованием методов модального управления и канонической декомпозиции линейных систем [3], применением фильтров с конечной и фильтров с затухающей памятью [7] и др.

В принципе возможно использование нелинейных фильтров некалмановской структуры (например, подходы [8] [2] и др.). Один из таких подходов (обобщающий результаты [2]), в котором отсутствуют операции с плохо обусловленными матрицами, будет изложен дальше.

3. Дискретный субоптимальный фильтр. Оценки ошибок результатов интегрирования кинематических уравнений (1.3) будем определять в дискретные моменты $t_1,\ldots,t_i,t_{i+1},\ldots$. Оценку ошибки определения

[2] *Черноусько Ф. Л., Овсеевич А. И., Клепфиш Б. Р., Трущенков В. Л.* Эллипсоидальное оценивание состояния управляемых динамических систем.— Препринт Ин-та проблем механики АН СССР. М., 1983, № 224. 52 с.

ориентации в момент времени t_i зададим вектором малого поворота ϑ_i^*, полагая его случайным вектором с нулевым математическим ожиданием $\langle\vartheta_i^*\rangle=0$ (произведена коррекция результата интегрирования кинематических уравнений) и ковариационной матрицей $\langle\vartheta_i^*\vartheta_i^{*T}\rangle=P_{i/i}$. Пусть матрица направляющих косинусов A_{0i} — результат интегрирования кинематических уравнений (1.3) на интервале (t_i, t_{i+1}) с единичным начальным значением, а ϑ_i^ν — определяющий ошибки этого интегрирования вектор малого поворота, для статистических характеристик которого согласно (1.6) справедливы представления

$$\langle\vartheta_i^\nu\rangle=0,\quad \langle\vartheta_i^\nu\vartheta_i^{\nu T}\rangle=\mu^2E,\quad \mu^2=\varkappa^2\Delta t_i,\quad \Delta t_i=t_{i+1}-t_i$$

Тогда заданная вектором малого поворота $\overset{0}{\vartheta}_{i+1}$ ошибка определения ориентации в момент времени t_{i+1} имеет вид

$$\overset{0}{\vartheta}_{i+1}=A_{0i}\vartheta_i^*+\vartheta_i^\nu \tag{3.1}$$

Задачу нахождения оценки ошибки интегрирования сформулируем как задачу определения оценки вектора малого поворота $\overset{0}{\vartheta}_{i+1}$ по данным измерений вектора $\mathbf{m}(t)$ в моменты времени t_i и t_{i+1}. В качестве информации для отыскания этой оценки используем определяемые формулами (1.7) векторы невязок, которые представим в аналогичном (1.8) виде

$$\mathbf{y}_i=V(\mathbf{k}_i)\vartheta_i^*+\varepsilon_i,\qquad \mathbf{y}_{i+1}=V(\mathbf{k}_{i+1})\overset{0}{\vartheta}_{i+1}+\varepsilon_{i+1} \tag{3.2}$$

где векторы с индексами i и $i+1$ соответствуют их значениям в моменты времени t_i и t_{i+1}.

Для сформулированной задачи алгоритм оптимальной фильтрации строится следующим образом [5]. Пусть $\langle\varepsilon_i\varepsilon_i^T\rangle=n^2E$ — ковариационная матрица погрешностей измерений в каждый из рассматриваемых дискретных моментов. Тогда оценка вектора погрешности результата интегрирования кинематических уравнений разыскивается при помощи построения фильтра, формирующего на основании измерений (3.2) оценку состояния объекта, описываемого конечно-разностным уравнением (3.1). Так, если $\check{\vartheta}_{i+1/i}$ — оценка вектора $\overset{0}{\vartheta}_{i+1}$ по измерениям в момент времени t_i, $\check{\vartheta}_{i+1/i+1}$ — оценка этого вектора по измерениям в моменты t_i и t_{i+1}, то уравнения фильтра имеют вид

$$\check{\vartheta}_{i+1/i}=-A_{0i}[n^2E-P_{i/i}V^2(\mathbf{k}_i)]^{-1}P_{i/i}V(\mathbf{k}_i)\mathbf{y}_i \tag{3.3}$$

$$\check{\vartheta}_{i+1/i+1}=\check{\vartheta}_{i+1/i}-[n^2E-P_{i+1/i}V^2(\mathbf{k}_{i+1})]^{-1}P_{i+1/i}\times$$
$$\times V(k_{i+1})[\mathbf{y}_{i+1}-V(\mathbf{k}_{i+1})\check{\vartheta}_{i+1/i}] \tag{3.4}$$

причем матрица $P_{i+1/i}$ определяется соотношением

$$P_{i+1/i}=n^2A_{0i}[n^2E-P_{i/i}V^2(\mathbf{k}_i)]^{-1}P_{i/i}A_{0i}^T+\mu^2E \tag{3.5}$$

Для ковариационной матрицы оценки $\mathbf{e}_{i+1}=\overset{0}{\vartheta}_{i+1}-\check{\vartheta}_{i+1/i+1}$ имеем

$$P_{i+1/i+1}=n^2[n^2E-P_{i+1/i}V^2(\mathbf{k}_{i+1})]^{-1}P_{i+1/i} \tag{3.6}$$

или, используя рекуррентные формулы, связывающие значения ковариационных матриц ошибки оценки через несколько тактов дискретизации [9], для ошибки оценки $\mathbf{e}_{i+1}$ и ее ковариационной матрицы получаем

$$\mathbf{e}_{i+1}=F_i(P_{i/i})\vartheta_i^*+\eta_i \tag{3.7}$$

$$P_{i+1/i+1}=Q_iA_{0i}(E+P_{i/i}D_i)^{-1}P_{i/i}A_{i0}^TQ_i+\mu^2Q_i \tag{3.8}$$

Здесь η_i — линейная однородная функция погрешностей измерений

$$F_i(P_{i/i})=Q_iA_{0i}(E+P_{i/i}D_i)^{-1},\quad D_i=-\varkappa_1V^2(\mathbf{k}_i)-\varkappa_2V^2(A_{0i}^T\mathbf{k}_{i+1}) \tag{3.9}$$

$$Q_i=\varkappa_2(n^2E+\mu^2\mathbf{k}_{i+1}\mathbf{k}_{i+1}^T),\quad \varkappa_1=n^{-2},\quad \varkappa_2=(n^2+\mu^2)^{-1}$$

Следует отметить, что и в этом случае может наблюдаться потеря устойчивости вычислительного процесса при малом n, связанная с обращением плохо обусловленных матриц в выражениях (3.5) и (3.6), так как матрицы $V(\mathbf{k}_i)$ и $V(\mathbf{k}_{i+1})$ сингулярны. В аналогичной ситуации для повышения устойчивости вычислительной процедуры используются так называемые фильтры с затухающей памятью. Так, в [7] при синтезе фильтра на каждом шаге оценивания вместо ковариационной матрицы ошибки оценки $P_{i/i}$ используется матрица P_i^*, которая удовлетворяет неравенству

$$P_i^* - P_{i/i} > 0 \tag{3.10}$$

и задается в виде $P_i^* = aP_{i/i}$, где $a > 1$. Такая процедура введения матрицы P_i^* является, по-видимому, наиболее простой, но не самой эффективной, так как величина коэффициента a не связана со спектром матрицы $P_{i/i}$, характеризующим ее обусловленность. В этой связи удовлетворяющую неравенству (3.10) матрицу P_i^* можно задать в виде

$$P_i^* = \alpha_i^2 E \tag{3.11}$$

где α_i^2 — верхняя оценка максимального собственного значения матрицы $P_{i/i}$, которая применительно к рассматриваемой здесь задаче может быть получена аналитически. Несмотря на кажущуюся искусственность этой процедуры, она позволяет получить эффективный алгоритм фильтрации (дальше будет указана строгая вариационная постановка задачи фильтрации, для которой данный алгоритм будет оптимальным), в котором не возникает особенностей при отсутствии шумов измерений или малой угловой скорости вращения измеряемого вектора (см. п. 2).

Действительно, используя процедуру двухшаговой оптимальной фильтрации (3.3)—(3.5) и полагая при синтезе фильтра $P_{i/i} = P_i^*$, для оценки вектора погрешности результата интегрирования кинематических уравнений имеем [10]:

$$\check{\vartheta}_{i+1} = -Q_i P_{1i} A_{0i} V(\mathbf{k}_i) y_i - (n^2+\mu^2)^{-1}(Q_i P_{0i} + \mu^2 E) V(\mathbf{k}_{i+1}) \mathbf{y}_{i+1} \tag{3.12}$$

$$P_{0i} = n^2 P_{1i} + P_{2i}, \quad P_{2i} = (\alpha_i^4 (n^2+\mu^2)/\sigma_i^2) \mathbf{k}_i^0 \mathbf{k}_i^{0T}$$

$$P_{1i} = \frac{\alpha_i^4}{\sigma_i^2} \left[\frac{n^2+\mu^2}{\alpha_i^2} E + \mathbf{k}_{i+1} \mathbf{k}_{i+1}^T + \frac{\alpha_i^2 (n^2+\mu^2)}{\alpha_i^2 (2n^2+\mu^2) + n^2 (n^2+\mu^2)} \mathbf{q}_{i+1} \mathbf{q}_{i+1}^T \right]$$

$$\sigma_i^2 = \sin^2 \varphi_m n^2 (n^2+\mu^2) \alpha_i^4 + (2n^2+\mu^2) \alpha_i^2 + n^2 (n^2+\mu^2)$$

Здесь φ_m — угол между векторами $\mathbf{m}(t_i)$ и $\mathbf{m}(t_{i+1})$:

$$\mathbf{k}_i^0 = A_{0i} \mathbf{k}_i, \quad \mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{k}_i^0 \times \mathbf{k}_{i+1} \tag{3.13}$$

Как видно из формулы (3.12), при реализации фильтра не возникает особенностей при $n \to 0$ и $\varphi_m \to 0$ (угловая скорость вращения измеряемого вектора мала). Отметим, что это является следствием описанного загрубления матрицы $P_{i/i}$, что позволило исключить при решении ковариационных конечно-разностных уравнений операции с плохо обусловленными матрицами.

4. Точностные характеристики и устойчивость. Точностные свойства алгоритмов фильтрации будем характеризовать максимальным собственным значением ковариационной матрицы ошибки оценки. Для этого исследуем спектральные свойства ковариационной матрицы ошибки оценки $P_{i+1} = P_{i+1/i+1}$ при функционировании оптимального фильтра (3.3), (3.5) и соответствующей субоптимальному фильтру (3.12) матрицы P^0_{i+1}.

Обозначим $\rho_m\{X\}$ собственные значения симметричной матрицы X третьего порядка ($1 \leqslant m \leqslant 3$), занумерованные в порядке неубывания.

Найдем оценку для максимального собственного значения матрицы P_{i+1}, используя неравенства для собственных значений сумм и произведений симметричных положительно-определенных матриц (см. [6, пп. 20.11; 20.19]). Пусть α_i^2 — максимальное собственное значение матрицы P_i, матрица P_i невырождена и $\Pi_i = A_{0i}(E + P_i D_i)^{-1} P_i A_{0i}^T$. Тогда из равенства (3.8) имеем

$$\rho_3\{P_{i+1}\} \leqslant \rho_3\{\Gamma_i\} + \rho_3\{\mu^2 Q_i\}, \quad \Gamma_i = Q_i \Pi_i Q_i \tag{4.1}$$

а так как $\rho_3\{Q_i\}=1$, то $\rho_3\{\Gamma_i\}\leqslant\rho_3\{Q_i^{-1}\Gamma_i\}=\rho_3\{\Pi_iQ_i\}\leqslant\rho_3\{\Pi_i\}$ и согласно (4.1)

$$\rho_3\{P_{i+1}\}\leqslant\rho_3\{\Pi_i\}+\mu^2 \tag{4.2}$$

Далее, из очевидных соотношений $\rho_3\{\Pi_i\}=\rho_3\{(P_i^{-1}+D_i)^{-1}\}=\rho_1^{-1}\{P_i^{-1}+D_i\}$, $\rho_1\{P_i^{-1}+D_i\}\geqslant\rho_1\{P_i^{-1}\}+\rho_1\{D_i\}$ и неравенства для минимального собственного значения матрицы D_i $\rho_1\{D_i\}\geqslant\varkappa_1\varkappa_2\sin^2\varphi_m/(\varkappa_1+\varkappa_2)$ в соответствии с (4.2) имеем

$$\rho_3\{P_{i+1}\}\leqslant\alpha_{i+1}^2,\qquad \alpha_{i+1}^2=[1+\alpha_i^2\varkappa_1\varkappa_2\sin^2\varphi_m/(\varkappa_1+\varkappa_2)]^{-1}\alpha_i^2+\mu^2 \tag{4.3}$$

Найдем оценку для максимального собственного значения ковариационной матрицы P_{i+1}^0 ошибки оценки фильтра (3.12). Так как уравнения для ошибки оценки в этом случае, согласно (3.7), имеют вид

$$\vartheta_{i+1}^*=F_i^*\vartheta_i^*+\eta_i^*,\qquad F_i^*=F_i(P_i^*) \tag{4.4}$$

то матрицы P_{i+1}^0 и P_i^0 связаны равенством

$$P_{i+1}^0=F_i^*P_i^0F_i^*+P_{\eta i} \tag{4.5}$$

в котором $P_{\eta i}$ — ковариационная матрица вектора η_i^*. Поскольку для матрицы

$$S_{i+1}=Q_iA_{0i}(E+P_i^*D_i)^{-1}P_i^*A_{0i}^TQ_i+\mu^2Q_i \tag{4.6}$$

справедливо представление $S_{i+1}=F_i^*P_i^*F_i^{*T}+P_{\eta i}$, то подстановка матрицы $P_i^0=P_i^*-P_i^-$ (здесь $P_i^-\leqslant 0$ и имеет по крайней мере одно равное нулю собственное значение) в равенство (4.5) дает $P_{i+1}^0=S_{i+1}+F_i^*P_i^-F_i^{*T}$. Отсюда вследствие равенства $\rho_3\{F_i^*P_i^-F_i^{*T}\}=0$ имеем

$$\rho_3\{P_{i+1}^0\}\leqslant\rho_3\{S_{i+1}\} \tag{4.7}$$

причем согласно (3.11), (4.6) и (4.1)—(4.3), $\rho_3\{S_{i+1}\}\leqslant\alpha_{i+1}^2$.

Таким образом, из (4.7) следует, что формирующий субоптимальную оценку фильтр (3.12) приводит к ошибке оценки, максимальное собственное значение ковариационной матрицы которой ограничено сверху той же константой α_i^2 (определяемой в каждый из дискретных моментов t_i конечно-разностным уравнением (4.3)), что и максимальное собственное значение ковариационной матрицы ошибки оценки оптимального фильтра.

Проиллюстрируем эффективность этой оценки на примере п. 2 в случае стационарного режима фильтрации. При непрерывной фильтрации максимальное собственное значение ковариационной матрицы (2.6) равно

$$\rho_3\{P^{(1)}\}=\varkappa^2/(u\cos\gamma)+\ldots$$

Из (4.3), полагая $\alpha_{i+1}^2=\alpha_i^2=\alpha^2$, $\mu^2=\varkappa^2\Delta t=\mathrm{const}$ (стационарный режим) и учитывая, что $\varphi_m=u\Delta t\cos\gamma$ при малом Δt, получим

$$\alpha^2=\frac{1}{2}\left[\varkappa^2\Delta t+\left(\varkappa^4(\Delta t)^2+\frac{4\varkappa^4}{u^2\cos^2\gamma}+\frac{8\varkappa^2n^2}{u^2\cos^2\gamma}\right)^{1/2}\right]$$

Отсюда при малых n и u имеем

$$\varkappa^2/(u\cos\gamma)+\ldots=\rho_3\{P^{(1)}\}\leqslant\alpha^2=\varkappa^2/(u\cos\gamma)+\ldots$$

и в этом случае можно говорить об асимптотической оптимальности субоптимального алгоритма фильтрации (3.12).

Рассмотрим вопросы устойчивости фильтра (3.12). Так, если при нахождении оценки в каждый из дискретных моментов t_{i+1} пользоваться процедурой загрубления (3.11), задавая α_i^2 равным оценке максимального собственного значения ковариационной матрицы ошибки оценки (пользуясь равенством (4.3)), то ошибка определения ориентации в каждый из дискретных моментов удовлетворяет конечно-разностному уравнению (4.4). Максимальное сингулярное число матрицы F_i^* удовлетворяет неравенству (доказательство этого неравенства аналогично процедуре (4.1)—

(4.3)):

$$\rho_3\{(F_i^{*T}F_i^*)^{1/2}\}\leqslant\frac{\varkappa_1+\varkappa_2}{\alpha_i^2\varkappa_1\varkappa_2\sin^2\varphi_m+\varkappa_1+\varkappa_2}\leqslant 1,$$

которое является строгим при $\varphi_m\neq 0$. В этом случае формирующий оценку вектора погрешности интегрирования кинематических уравнений фильтр (3.12) устойчивый.

Отмеченная близость описанного алгоритма фильтрации к оптимальному, по-видимому, является следствием того, что можно указать функционал (сформулировать вариационную задачу), для которого он оптимален. Эта вариационная задача в терминах параметров Родрига — Гамильтона будет сформулирована дальше. Ее решение в случае малых рассогласований соответствует алгоритму (3.12), имеющему калмановскую структуру. В противном случае (например, оценка $\boldsymbol{\vartheta}_i^*$ — конечный вектор) алгоритм нелинейный и имеет некалмановскую структуру.

5. Нелинейный алгоритм определения ориентации. Оценка вектора параметров Родрига — Гамильтона разыскивается в дискретные моменты времени $t_1,\ldots,t_i,t_{i+1}\ldots$. Пусть $\lambda^*(i)$ — известная оценка вектора $\lambda(t_i)$, а $\delta\lambda(i+1)$ — результат интегрирования кинематических уравнений (1.4) по данным измерений (1.1) на интервале времени $(t_i,\ t_{i+1})$ с единичным начальным значением $\delta\lambda(t_i)=\|1,\ 0,\ 0,\ 0\|^T$.

Вектор $m(t)$ меняет свое направление в неподвижной системе координат, поэтому определение ориентации твердого тела в момент времени t_{i+1} целесообразно производить на основании измерений (1.5) в дискретные моменты t_i и t_{i+1} (а не только в момент времени t_{i+1} [2]). Задача определения ориентации формулируется как задача определения оценки $\lambda^*(i+1)$ вектора $\lambda(t_{i+1})$, минимизирующей квадратичный функционал

$$I=4\alpha_1\|\lambda'(i)-\lambda^*(i)\|^2+4\alpha_2\|\lambda^*(i+1)-\Phi(\delta\lambda(i+1))\lambda'(i)\|^2+$$
$$+\beta_1\|A(\lambda'(i))\mathbf{m}(t_i)-\mathbf{k}(t_i)\|^2+\beta_2\|A(\lambda^*(i+1))\mathbf{m}(t_{i+1})-\mathbf{k}(t_{i+1})\|^2 \qquad (5.1)$$

Здесь α_1, α_2, β_1 и β_2 — положительные весовые константы, вектор $\lambda'(i)$ — сглаженная (построенная на основании $\lambda^*(i)$ с использованием измерений (1.5) в момент времени t_{i+1}) оценка вектора $\lambda(t_i)$:

$$\Phi(\lambda)=\left\|\begin{matrix}\lambda_0 & -\lambda_v^T\\ \lambda_v & \lambda_0E-V(\lambda_v)\end{matrix}\right\|$$

а произведение матрицы $\Phi(\delta\lambda(i+1))$ на вектор $\lambda'(i)$ соответствует сложению конечных поворотов, определяемых $\delta\lambda(i+1)$ и $\lambda'(i)$.

Первое слагаемое в функционале (5.1) отражает вклад погрешности всей предыстории до момента t_i, второе — связывает оценки, полученные по одним и тем же измерениям, и отражает вклад погрешности измерений вектора угловых скоростей тела и метода интегрирования кинематических уравнений, а третье и четвертое слагаемое — невязки измерений (1.5) с определяемыми искомыми оценками их значениями. В соответствии с этим весовые константы в функционале задаются исходя из точностных свойств каждого из каналов информации.

Решение сформулированной задачи имеет вид [10]:

$$\lambda^*(i+1)=g[E+b_*K(\mathbf{m}_{i+1},\ \mathbf{k}_{i+1})][E+bK(\mathbf{m}_i\times\mathbf{m}_{i+1},\ \mathbf{q}_{i+1})]\times$$
$$\times[E+b_1K(\mathbf{m}_i,\ \mathbf{k}_i^0)+b_2K(\mathbf{m}_{i+1},\ \mathbf{k}_{i+1})]\lambda^0(i+1) \qquad (5.2)$$

Здесь $\lambda^0(i+1)$ — результат интегрирования кинематических уравнений (1.4) по данным измерений (1.1) на интервале времени $(t_i,\ t_{i+1})$ с начальным значением, равным оценке $\lambda^*(i)$ вектора $\lambda(t_i)$:

$$K(\mathbf{m},\mathbf{k})=\left\|\begin{matrix}0 & -\mathbf{m}^T\\ \mathbf{m} & V(\mathbf{m})\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}0 & \mathbf{k}^T\\ -\mathbf{k} & V(\mathbf{k})\end{matrix}\right\|$$

векторы $\mathbf{k}_i^0$ и $\mathbf{q}_{i+1}$ определяются выражениями (3.13), операции умножения вектора на скалярную величину g соответствуют их нормировке, а скалярные величины b_*, b, b_1 и b_2 определяются через исходные данные задачи [10].

Вычисление оптимальной оценки вектора параметров Родрига — Гамильтона $\lambda^*(i+1)$ с помощью фильтра (5.2) можно интерпретировать как коррекцию (дополнительный поворот) результата интегрирования кинематических уравнений $\lambda^0(i+1)$, т. е. представить эту оценку в виде

$$\lambda^*(i+1)=\Phi(\lambda^\vee(i+1))\lambda^0(i+1) \tag{5.3}$$

в котором $\lambda^\vee(i+1)$ определяет конечный поворот, совмещающий заданный кватернионом $\lambda^0(i+1)$ базис с базисом, определяемым найденной оценкой $\lambda^*(i+1)$.

При предположении о погрешностях, принятых в п. 3, весовые константы в (5.1) можно задать равенствами $\alpha_1=\alpha_i^{-2}$, $\alpha_2=\mu^{-2}$, $\beta_1=\beta_2=n^{-2}$. Тогда для скалярных величин в (5.2) справедливы представления

$$b_*=\mu^2(2n^2+\mu^2)^{-1},\quad b=\alpha_i^4[\sin^2\varphi_m\alpha_i^4+(2n^2+\mu^2)\alpha_i^2+2(n^2+\mu^2)n^2]^{-1}$$

$$b_1=\alpha_i^2(n^2+\mu^2)b_0^{-1},\quad b_2=\alpha_i^4n^2b_0^{-1},\quad b_0=(2n^2+\mu^2)\alpha_i^2+2(n^2+\mu^2)n^2$$

В этом случае вектор параметров Родрига — Гамильтона $\lambda^\vee(i+1)$ в (5.3) определяет малый поворот и с точностью до величин первого порядка малости имеет вид [10], причем вектор $\overset{\vee}{\vartheta}_{i+1}$ определен в (3.12):

$$\lambda^\vee(i+1)=\left\|\begin{matrix}1\\ {}^1/_2\overset{\vee}{\vartheta}_{i+1}\end{matrix}\right\|$$

Следовательно, алгоритм фильтрации (3.12) соответствует линеаризованному решению (5.2) вариационной задачи, определяемой функционалом (5.1).

Исследуем поведение алгоритма (5.2) в случае возникновения в процессе его функционирования конечных ошибок, сохраняя предположение о малости погрешностей измерений. Для этого введем характеризующие ошибки фильтрации кватернионы $\delta\overset{*}{\lambda}_{i+1}$ и $\delta\overset{0}{\lambda}_{i+1}$, которые определим равенствами $\lambda(t_{i+1})=\Phi(\delta\overset{*}{\lambda}_{i+1})\lambda^*(i+1)$, $\lambda(t_{i+1})=\Phi(\delta\overset{0}{\lambda}_{i+1})\lambda^0(i+1)$.

Эти кватернионы соответствуют конечным поворотам, которые совмещают заданные кватернионами $\lambda^*(i+1)$ и $\lambda^0(i+1)$ базисы с истинным положением подвижной системы координат в момент времени t_{i+1}, и для них из (5.2) следует [10]:

$$\delta\overset{*}{\lambda}_{i+1}=g[E+b_*K(\mathbf{k}_{i+1},\mathbf{k}_{i+1})][E+bK(\mathbf{q}_{i+1},\mathbf{q}_{i+1})]\times$$

$$\times[E+b_1K(\mathbf{k}_i^0,\mathbf{k}_i^0)+b_2K(\mathbf{k}_{i+1},\mathbf{k}_{i+1})]\delta\overset{0}{\lambda}_{i+1}+gB(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1})\delta\overset{0}{\lambda}_{i+1} \tag{5.4}$$

где элементы матрицы $B(\boldsymbol{\varepsilon}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_{i+1})$ — однородные функции погрешностей измерений $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}$ (см. (3.2)). Выполнив умножение в выражении (5.4), приведем его к виду ($\varkappa_*$, $\varkappa_1^*$ и $\varkappa_2^*$ — некоторые положительные скалярные величины):

$$\delta\overset{*}{\lambda}_{i+1}=gg_0\left\|\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \alpha_1Q_*P_*\end{matrix}\right\|\delta\overset{0}{\lambda}_{i+1}+gB(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1})\delta\overset{0}{\lambda}_{i+1} \tag{5.5}$$

$$Q_*=(\alpha_2+\varkappa_*)^{-1}(\alpha_2E+\varkappa_*\mathbf{k}_{i+1}\mathbf{k}_{i+1}^T)$$

$$P_*=\sigma^{-1}(\alpha_1E+\varkappa_1^*\mathbf{k}_i^0\mathbf{k}_i^{0\,T}+\varkappa_2^*\mathbf{k}_{i+1}\mathbf{k}_{i+1}^T+\varkappa_1^*\varkappa_2^*\nu_1^{-1}\mathbf{q}_{i+1}\mathbf{q}_{i+1}^T)$$

$$\nu_1=\alpha_1+\varkappa_1^*+\varkappa_2^*,\quad \sigma=\alpha_1\nu_1+\varkappa_1^*\varkappa_2^*\sin^2\varphi_m$$

Выражение (5.5) позволяет перейти к описанию ошибки в терминах вектора конечного поворота $\boldsymbol{\vartheta}=2\lambda_0^{-1}\boldsymbol{\lambda}_v$, что дает более наглядное, чем в (5.5), представление о поведении ошибки. Так, из (5.5) с учетом уравнения (3.1) следует

$$\overset{*}{\boldsymbol{\vartheta}}_{i+1}=F_i^0\boldsymbol{\vartheta}_i^*+\boldsymbol{\eta}_i^0,\quad F_i^0=\alpha_iQ_*P_*A_{0i} \tag{5.6}$$

и для максимального сингулярного числа матрицы F_i^0 справедлива оценка

$$\rho_3\{(F_i^{0T}F_i^0)^{1/2}\}\leqslant[1+\varkappa_1^*\varkappa_2^*\sin^2\varphi_m/(\alpha_1(\varkappa_1^*+\varkappa_2^*))]^{-1}\leqslant 1 \qquad (5.7)$$

Таким образом, скорость затухания переходного процесса (5.6) в случае, когда ϑ_i^* — конечный вектор, а η_i^0 — малый, будет определяться согласно (5.7) выбором константы α_1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Завьялов П. П., Константинов Г. И., Кудин В. Д.* Метод определения ориентации объекта при действии на него неизвестных возмущающих моментов.– В кн.: Навигационные гироскопические системы. Киев; Изд-е Ин-та математики АН УССР, 1973, с. 146–160.
2. *Ларин В. Б., Науменко К. И.* Об определении ориентации твердого тела.– Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 3, с. 24–32.
3. *Парусников Н. А., Морозов В. М., Борзов В. И.* Задача коррекции в инерциальной навигации. М.: Изд-во МГУ, 1982. 174 с.
4. *Kalman R. E., Bucy R. S.* New results in linear filtering and prediction theory.– Trans. ASME. Ser. D. J. Basic Eng., 1961, v. 83, No. 1, p. 95–108.
5. *Брайсон А., Хо-Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.
6. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 318 с.
7. *Chang C. B., Tabaczynski J. A.* Application of state estimation to target tracking.– IEEE Trans. Autom. Control, 1984, AC-29, No. 2, p. 98–109.
8. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
9. *Науменко К. И.* Наблюдение и управление движением динамических систем. Киев: Наук. думка, 1984. 206 с.
10. *Науменко К. И.* Об определении оценок угловой ориентации корпуса шагающего аппарата.– В кн.: Управление движением шагающего аппарата. Киев; Изд-е Ин-та математики АН УССР, 1985, с. 48–62.

Киев

Поступила в редакцию
26.III.1985