

УДК 531.383

## УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ ДВУХСТЕПЕННЫХ СИЛОВЫХ ГИРОСКОПОВ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ОСЯМИ ПРЕЦЕССИИ ПРИ ОГРАНИЧЕННЫХ УГЛАХ ПРЕЦЕССИИ

ВАСИЛЬЕВ В. Н., ВЕЙНБЕРГ Д. М.

В [1] рассмотрена задача управления гиросиловой системой, состоящей из типовых групп двухстепенных силовых гироскопов-гиродинов, приведены алгоритмы управления типовой группой гиродинов с параллельными осями прецессии и неограниченными углами прецессии. Ограничение углов прецессии гиродинов делают некоторые траектории кинетического момента внутри области  $S$  вариации кинетического момента гиросистемы физически не осуществимыми [2]. Предлагается алгоритм управления типовой группой гиродинов с ограниченными углами прецессии, позволяющий максимально использовать область реализуемых траекторий кинетического момента. Исследуются свойства типовой группы гиродинов как исполнительного органа системы управления.

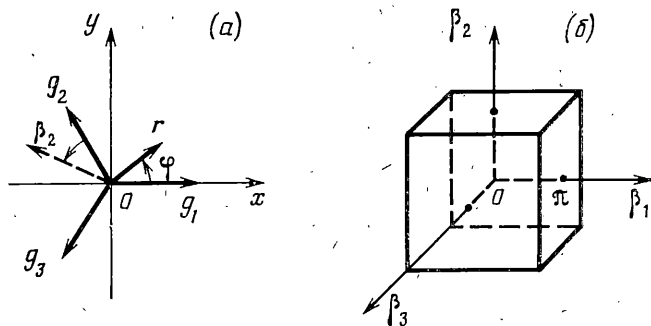
1. Типовая группа гиродинов с параллельными осями прецессии представляет собой автономный исполнительный орган, создающий управляющие моменты относительно двух осей космического аппарата. Две или три такие группы, расположенные на космическом аппарате соответствующим образом, могут обеспечить управление его угловым положением [3, 4].

Рассмотрим типовую группу, состоящую из трех одинаковых гиродинов. Единичные векторы, совпадающие по направлению с векторами кинетического момента гиродинов  $G_j$  ( $j=1, 2, 3$ ), обозначим  $g_j$ . В исходном состоянии, когда вектор кинетического момента группы равен нулю, углы между векторами  $g_j$ , приведенными в общую точку  $O$ , составляют  $2\pi/3$  (фиг. 1, а). Полагаем, что углы прецессии гиродинов  $\beta_j$  отсчитываются от исходного положения и ограничены диапазоном  $\pm\pi$ . Положительному направлению отсчета углов соответствует вращение векторов  $g_j$  против часовой стрелки.

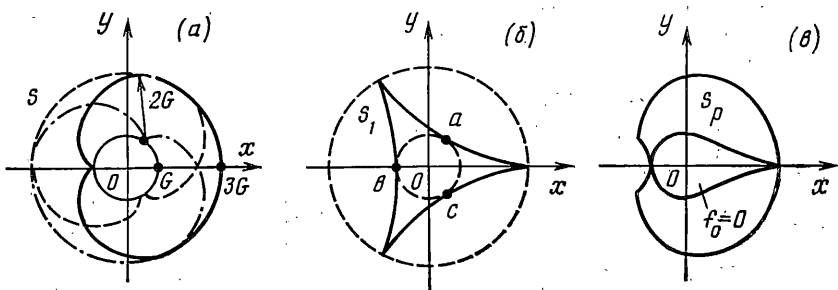
Область  $S$  вариации кинетического момента типовой группы представляет собой круг с радиусом  $3G$  и центром в точке  $O$ . Вектор кинетического момента группы  $H=Gg$ ,  $g=g_1+g_2+g_3$  определяет точку  $s \in S$  с координатами  $H_1=Gx$ ,  $x=x_1+x_2+x_3$ ;  $H_2=Ky$ ,  $y=y_1+y_2+y_3$ , где  $x_1=\cos \beta_1$ ,  $y_1=\sin \beta_1$ ,  $x_2=\cos(\beta_2+2\pi/3)$ ,  $y_2=\sin(\beta_2+2\pi/3)$ ,  $x_3=\cos(\beta_3-2\pi/3)$ ,  $y_3=\sin(\beta_3-2\pi/3)$  — проекции единичных векторов  $g_j$  на координатные оси,  $G$  — кинетический момент одного гиродина.

Каждой точке, заданной в пространстве углов прецессии  $\beta_j$ , соответствует одна точка  $s$ , расположенная внутри или на границе области  $S$ . При изменении угла прецессии  $\nu$ -го гиродина точка  $s$  перемещается по окружности радиуса  $G$  с центром в точке, определяемой вектором  $G(\Sigma g_j - g_\nu)$ . При изменении углов прецессии всех гиродинов точка  $s$  описывает траекторию, радиус-вектор которой есть вектор-функция  $H(t)$ . Типовая группа с неограниченными углами прецессии дает возможность реализовать любую траекторию  $H(t)$ , удовлетворяющую условию  $H(t) \leq 3G$  [1].

В пространстве углов прецессии ограничение  $|\beta_j| \leq \pi$  определяет куб с длиной ребра  $2\pi$  (фиг. 1, б). Траектория  $H(t)$  является реализуемой, если всем ее точкам соответствует множество углов прецессии, находящееся внутри куба. Область реализуемых траекторий  $S_p \subset S$  состоит из трех взаимно перекрывающихся «листов» (фиг. 2, а). Переход с одного листа



Фиг. 1



Фиг. 2

на другой возможен только внутри круга радиуса  $G$ , в котором может быть реализована любая траектория.

Границы области  $S_p$  образуются в результате сопряжения дуг окружностей радиуса  $3G$  с центром  $O$ , радиуса  $2G$  с центрами  $(G, \pi)$ ,  $(G, \pi/3)$ ,  $(G, -\pi/3)$  и радиуса  $G$  с центрами  $(G, 0)$ ,  $(G, 2\pi/3)$ ,  $(G, -2\pi/3)$ , где полярный угол отсчитывается от оси  $Ox$ . При обходе границы области  $S_p$  вектор кинетического момента движется по окружности радиуса  $3G$ , пока один из гироидов не достигнет упора. Затем он движется по окружности радиуса  $2G$ . Когда второй гироид достигает упора, движение происходит по окружности радиуса  $G$ . В пространстве углов прецессии окружности радиуса  $3G$  соответствуют точки внутри куба, окружностям радиуса  $2G$  — точки на гранях, а радиуса  $G$  — на ребрах куба.

2. Область  $W$  изменения вектора управляющего момента типовой группы, в общем случае, представляет собой равносторонний шестиугольник с длиной сторон  $2G\lambda_*$ , где  $\lambda_*$  — максимальная скорость прецессии [1]. Вектор управляющего момента типовой группы

$$\mathbf{M} = -G \sum_{j=1}^3 \lambda_j \mathbf{h} \times \mathbf{g}_j$$

определяет точку  $w \in W$  с координатами

$$\begin{aligned} M_1 &= Gw_1, & w_1 &= \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 \\ M_2 &= Gw_2, & w_2 &= -\lambda_1 x_1 - \lambda_1 x_2 - \lambda_3 x_3 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\lambda_j$  — скорость прецессии  $j$ -го гироидина,  $\mathbf{h}$  — единичный вектор, направленный по оси прецессии гироидинов.

Задача управления типовой группой заключается в нахождении скоростей прецессии  $\lambda_j$ , обеспечивающих согласованное движение гироидинов, при котором выполняется равенство вектора  $\mathbf{M}$  требуемому вектору управления  $\mathbf{U}$ . Заменяя в (2.1) вектор  $\mathbf{M}$  на вектор  $\mathbf{U}$ , получим систему двух уравнений моментов для определения скоростей прецессии

$$\begin{aligned} y_1 \lambda_1 + y_2 \lambda_2 + y_3 \lambda_3 &= u_1, & u_1 &= U_1/G \\ x_1 \lambda_1 + x_2 \lambda_2 + x_3 \lambda_3 &= -u_2, & u_2 &= U_2/G \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для однозначного решения систему уравнений (2.2) необходимо дополнить некоторым условием оптимальности. При ограниченных углах прецессии оно должно обеспечивать настройку типовой группы так, чтобы область реализуемых траекторий  $S_p$  использовалась полностью. Этому требованию удовлетворяет условие минимизации суммы углов прецессии.

Определим границу области  $S_1 \subset S_p$ , в которой вектор  $\mathbf{H}$  может быть реализован при условии  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$ . Система уравнений  $x_1 + x_2 + x_3 = x$ ,  $y_1 + y_2 + y_3 = y$ ,  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$  однозначно разрешима относительно  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  и  $\beta_3$  в окрестности некоторой точки  $s \in S_1$ , если якобиан системы в этой точке

$$\begin{vmatrix} -y_1 & -y_2 & -y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3 + \mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1) \mathbf{h}$$

отличен от нуля. На границе области  $S_1$  имеем равенство  $\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3 + \mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1 = 0$ . Это условие выполняется, если любые два вектора совпадают по направлению. Если  $\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_2$ , то  $\beta_3 = -2\beta_1$  и точки на границе области  $S_1$  определяются координатами

$$H_1^* = Gx_*, \quad x_* = 2x_1 + x_3 = 2 \cos \beta_1 + \cos 2\beta_1$$

$$H_2^* = Gy_*, \quad y_* = 2y_1 + y_3 = 2 \sin \beta_1 - \sin 2\beta_1$$

Аналогичные соотношения можно написать при совпадении векторов  $\mathbf{g}_2$  и  $\mathbf{g}_3$ ,  $\mathbf{g}_3$  и  $\mathbf{g}_1$ . Следовательно, границей области  $S_1$  является гипоциклоида, у которой радиус подвижной окружности в три раза меньше радиуса неподвижной окружности (фиг. 2, б).

Внутри области  $S_1$  любая траектория  $\mathbf{H}(t)$  может быть реализована при условии  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$ . В процессе такого движения отклонения гиродинов от исходного состояния остаются ограниченными. При движении вектора  $\mathbf{H}(t)$  по границе области  $S_1$  углы прецессии гиродинов не превышают  $2\pi/3$ , при движении по окружности радиуса  $G$  с центром  $O$  углы прецессии не превышают  $\pi/3$ .

Для траекторий  $\mathbf{H}(t) \subset S_1$  уравнение настройки типовой группы можно записать в виде ( $\tau$  — постоянная):

$$\tau(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = -f_0, \quad f_0 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \quad (2.3)$$

Вне области  $S_1$  сумма углов прецессии отлична от нуля. Пусть в точке  $O \in S$  задано направление  $\mathbf{r}$  изменения вектора кинетического момента. Сумма углов прецессии минимальна ( $f_0 = 0$ ) при достижении границы области  $S$  по направлениям  $\mathbf{r} = \mathbf{g}_i(0)$  (они лежат в области  $S_1$ ) и максимальна ( $|f_0| = \pi$ ) для противоположных направлений. При обходе границы области  $S_p$  сумма углов прецессии изменяется по абсолютной величине от 0 до  $8\pi/3$ .

Точки  $a$ ,  $b$ ,  $c$  на границе области  $S_1$  (фиг. 2, б) являются особыми. В пространстве углов прецессии им соответствуют точки с координатами  $(\pi/3, -\pi/3, 0)$ ,  $(0, \pi/3, -\pi/3)$ ,  $(-\pi/3, 0, \pi/3)$ . В особых состояниях векторы  $\mathbf{g}_i$  коллинеарны. Остальные точки границы области  $S_1$  не являются особыми, однако во всех точках границы, по крайней мере, два вектора из трех совпадают. С целью минимизации суммы углов прецессии совмещенное состояние двух векторов необходимо сохранить и при выходе траектории кинетического момента за пределы области  $S_1$ . В этом случае область  $S_1$  делит каждый «лист» области  $S_p$  на три зоны: внутреннюю, в которой выполняется условие  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$ , и две внешние, в которых выполняется одно из условий совмещенного состояния векторов  $\beta_k - \beta_{k-1} = \pm 2\pi/3$ , где нумерация гиродинов принята циклической (фиг. 2, в). Во внешних зонах за счет совмещения векторов выполняется условие  $|\beta_1 + \beta_2 + \beta_3| = \min$ .

Совместное движение двух векторов можно рассматривать как движение одного вектора с модулем, равным  $2G$ . Чтобы при совместном движении векторов не менялась последовательность их нумерации, взаимное сближение векторов можно ограничить некоторым углом, например  $\pi/6$ .

Тогда для сохранения взаимного положения двух векторов  $g_j$  должна равняться нулю одна из трех функций  $f_h = \beta_{h+1} - \beta_{h-1} - \pi/2$ . Уравнения настройки, обеспечивающие совместное движение двух гироскопов, имеют вид

$$\tau(\lambda_{h+1} - \lambda_{h-1}) = -f_h \quad (2.4)$$

С учетом соотношений (2.3) и (2.4) можно записать уравнение настройки типовой группы

$$\kappa_1 \lambda_1 + \kappa_2 \lambda_2 + \kappa_3 \lambda_3 = -f \quad (2.5)$$

$$f = \tau^{-1} - (1 - |\kappa_1|) f_1 + (1 - |\kappa_2|) f_2 + (1 - |\kappa_3|) f_3 + \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 f_0$$

или

$$f = \tau^{-1} [\kappa_1 \beta_1 + \kappa_2 \beta_2 + \kappa_3 \beta_3 - (1 + \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3) \pi/2]$$

Параметры  $\kappa_j$  принимают значение  $-1, 0$  или  $1$  в зависимости от того, в какой зоне находится вектор кинетического момента типовой группы. Для внутренней зоны  $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 0$ . При переходе вектора кинетического момента из внутренней зоны во внешнюю происходит изменение знака одной из функций  $f_h$ . Если  $f_h \geq 0$ , то  $\kappa_h = 0$ ,  $\kappa_{h+1} = 1$ ,  $\kappa_{h-1} = -1$ .

Уравнения моментов (2.2) совместно с уравнением настройки (2.5) образуют систему уравнений для определения неизвестных скоростей прецессии

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 \\ -u_2 \\ -f \end{vmatrix} \quad (2.6)$$

Умножая матричное уравнение (2.6) слева на транспонированную матрицу коэффициентов, получим итерационные формулы, удобные для нахождения скоростей прецессии численными методами

$$\lambda_k = (1 - 0,5\kappa_k) [ (g_k \times u) h - \tau^{-1} \kappa_k f - (g_{k-1} g_k + \kappa_{k-1} \kappa_k) \lambda_{k-1} - (g_k g_{k+1} + \kappa_k \kappa_{k+1}) \lambda_{k+1} ] \quad (2.7)$$

где нумерация скоростей прецессии принята циклической, а в правой части используются значения переменных, полученные на предыдущем шаге решения.

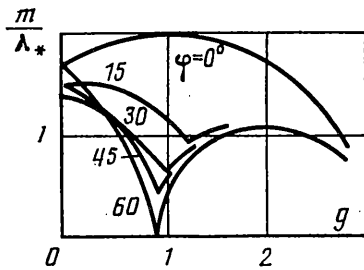
3. Наглядное представление об управляющих свойствах типовой группы дают моментные характеристики  $m(g, t)$ , где  $g = H/G$  — вектор кинетического момента типовой группы в относительных единицах,  $m = dg/dt = -M/G$  — вектор, равный по величине и противоположный по направлению вектору управляющего момента в относительных единицах,  $t$  — время движения по заданной траектории кинетического момента.

Пусть вектор кинетического момента изменяется по лучу произвольного направления  $g(\varphi)$ , где  $\varphi$  — полярный угол, который отсчитывается по оси  $Ox$  (фиг. 1, а). Чтобы обеспечить изменение кинетического момента из точки  $O \in S$  по лучу  $g$  за минимальное время, в уравнениях моментов (2.2) вектор управления задается в виде  $u_1 = -\cos \varphi$ ,  $u_2 = -\sin \varphi$ , а расчетные скорости прецессии, найденные по формулам (2.7), умножаются на коэффициент масштаба  $k = \min_j \lambda_* / |\lambda_j|$ .

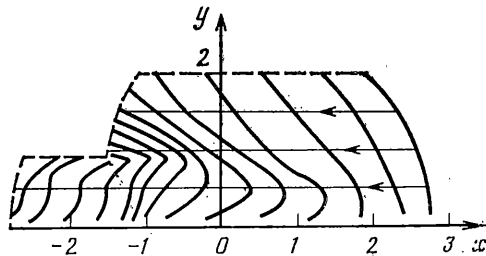
$$m/\lambda_* = k, \quad g = \int_0^t m dt, \quad \beta_j = \int_0^t k \lambda_j dt$$

Величина  $m$  характеризует скорость изменения кинетического момента при движении по заданной траектории. Семейство моментных характеристик гиросистемы при изменении кинетического момента от нуля до границы области  $S$  ( $\lambda_* = 0,2$  рад/с,  $\tau = 1$  с, сближение векторов  $g_j$  ограничено углом  $\pi/6$ ) изображено на фиг. 3. Эти характеристики в отличие от моментных характеристик типовой группы с неограниченными углами прецессии [1] имеют глубокие «провалы».

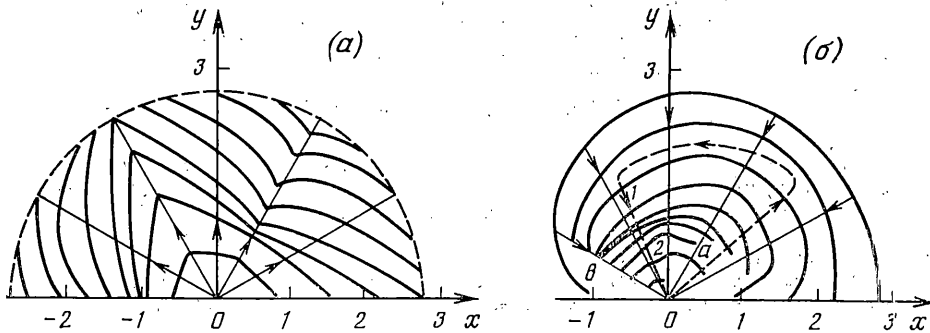
С точки зрения длительности программных поворотов космического аппарата важной характеристикой гиросистемы является время перемещения вектора кинетического момента из одной точки области  $S$  в другую по заданной траектории. Для типовых траекторий внутри области  $S$  могут быть построены «изохроны», которые определяют величину кинетического момента, достижимую за один и тот же промежуток времени. Типовой траекторией может служить движение изображающей точки  $s \in S$  параллельно строительным осям космического аппарата или движение по лучу из точки  $O \in S$  до границы области  $S$  и обратно. Семейство изохрон при изменении кинетического момента по лучу изображено на фиг. 4, а. Семейство изохрон при изменении кинетического момента по лучу в пределах одного листа области  $S$



Фиг. 3



Фиг. 5



Фиг. 4

изображено на фиг. 4, б. Семейство изохрон при изменении кинетического момента вдоль оси  $Ox$  (составляющая по оси  $Oy$  — параметр) изображено на фиг. 5. Направление движения указано стрелками. В расчетах принято  $\lambda_* = 0,2$  рад/с,  $\tau = 1$  с; обилие векторов ограничено углом  $\pi/6$ . Изохроны построены с интервалом 2 с.

Изучение изохрон показывает, что при увеличении кинетического момента по лучу (фиг. 4, а) наиболее медленное изменение кинетического момента происходит в районе особых точек. При изменении кинетического момента в обратном направлении в пределах одного листа области  $S$  (фиг. 4, б) скорость движения по траектории минимальна во всех точках дуги  $ab$ . Это связано с перестройкой гиросиловой системы. Пусть кинетический момент изменялся по траектории, изображенной на фиг. 4, б пунктирной линией. В точке 1 траектории, находящейся во внешней зоне, сумма углов прецессии  $f_0$  отлична от нуля. Во внутренней зоне (точка 2) положение гиросилов регулируется таким образом, чтобы сумма углов прецессии была равна нулю. При пересечении траекторией кинетического момента дуги  $ab$  с внешней стороны скорости прецессии гиросилов, необходимые для настройки гиросиловой системы, возрастают, что приводит к уменьшению управляющего момента, создаваемого вдоль траектории.

Таким образом, ограничение на углы прецессии гиросилов приводит к появлению внутри области  $S$  зон перестройки гиросиловой системы, движение в этих зонах связано с существенным уменьшением управляющего момента. Предлагаемый алгоритм управления типовой группой обеспечивает минимальное отклонение гиросилов от исходного состояния. В каждой точке траектории кинетического момента сумма углов прецессии минимальна, при движении из внешних зон во внутреннюю настройка гиросиловой системы осуществляется непрерывно. Минимизация суммы углов прецессии позволяет практически полностью использовать область реализуемых траекторий кинетического момента.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев В. Н. Управление системой двухстепенных силовых гироскопов с параллельными осями прецессии. — Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 3, с. 14–20.
2. Токарь Е. Н. Влияние ограничительных упоров на работу гиросиловых стабилизаторов. — Космич. исслед., 1978, т. 16, вып. 4, с. 505–513.
3. Васильев В. Н., Вейнберг Д. М., Шереметьевский Н. Н. Управление угловым положением долговременной орбитальной станции при помощи двухстепенных силовых гироскопов. — Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 5, с. 3–9.
4. Токарь Е. Н., Легостаев В. П., Платонов В. Н., Седых Д. А. Кратные гиросиловые системы. — Космич. исслед., 1981, т. 19, вып. 6, с. 813–822.

Москва

Поступила в редакцию  
7.11.1985