МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1987

УДК 531.38

КВАТЕРНИОННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ МАТЕРИАЛЬНЫХ СИСТЕМ. II

ЧЕЛНОКОВ Ю. Н.

В [1] развиты кватернионные методы исследования относительного движения динамически симметричных материальных систем, использующие в качестве кинематических параметров параметры Родрига – Гамильтона. В публикуемой работе, являющейся продолжением [1], даны приложения кватернионных методов к исследованию в нелинейной постановке движения гиромаятниковых систем [2–5]. Приведены кватернионные уравнения движения гиромаятниковых систем в параметрах Родрига – Гамильтона, обобщающие уравнения, полученные в [6]. Указаны преобразования вращения, позволяющие полностью или частично исключить из уравнений движения гиромаятниковых систем проекцию абсолютной угловой скорости вращения гиросистемы на ее ось динамической симметрии и привести уравнения движения к форме, не содержащей гироскопических и неконсервативных позиционных сил [7]. С геометрической точки зрения введенные замены переменных означают рассмотрение уравнений движения в системе координат, вращающейся с абсолютной угловой скоростью, коллинеарной вектору кинетического момента относительного движения гиромаятниковой системы. Рассмотрены отдельные случаи движения точки подвеса гиромаятниковой системы. Показано, в частности, что для кеплеровских движений точки подвеса уравнения движения гиромаятниковой системы приводятся к уравнениям движения гармонического осциллятора, а для движений, близких к кеплеровским,– к уравнениям движения возмущенного осциллятора. Рассмотрены условия невозмущаемости [2–5, 8, 9] гиромаятниковых систем и соответствующие им кватернионные уравнения движения невозмущаемых гиромаятниковых систем в параметрах Родрига – Гамильтона. С помощью теоремы об устойчивости движения по отношению к части переменных [10] рассмотрена устойчивость движения приборной вертикали невозмущаемых гиромаятниковых систем. Применение аппарата параметров Родрига – Гамильтона к исследованию движения гиромаятниковых систем ранее рассматривалось в [4, 6, 11–14].

1. При рассмотрении движения гиромаятниковой системы будем использовать следующие системы координат, имеющие общее начало в точке O подвеса гиромаятниковой системы: систему координат $X_1X_2X_3(X)$, перемещающуюся относительно инерциальной системы координат $O^*X_1^*X_2^*X_3^*(X^*)$ поступательно; систему координат $Z_1Z_2Z_3(Z)$, вращающуюся относительно $X(X^*)$ с заданной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}^\circ$ так, что ее ось OZ_3 во все время движения остается направленной по геоцентрической вертикали; систему координат $Y_1Y_2Y_3(Y)$, жестко связанную с гирорамой, ось OY_3 которой проходит через точку подвеса и центр масс системы; систему координат $Y_1'Y_2'Y_3'(Y')$, вращающуюся с абсолютной угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$, коллинеарной вектору $\mathbf{L}$ кинетического момента относительного движения гиромаятниковой системы.

Взаимную ориентацию введенных систем координат будем задавать кватернионами в соответствии со схемой поворотов

$$X \xrightarrow{\boldsymbol{\nu}} Z \xrightarrow{\boldsymbol{\varkappa}} Y \xrightarrow{\boldsymbol{\mu}} Y' \sim X \xrightarrow{\boldsymbol{\nu}} Z \xrightarrow{\boldsymbol{\lambda}} Y' \sim X \xrightarrow{\mathbf{s}} Y \xrightarrow{\boldsymbol{\mu}} Y' \sim X \xrightarrow{\mathbf{z}} Y' \qquad (1.1)$$

Кватернион $\boldsymbol{\nu}$ определяет собой ориентацию системы координат Z относительно X, кватернионы $\boldsymbol{\varkappa}$, $\mathbf{s}$ определяют собой ориентацию системы координат Y относительно систем координат Z и X соответственно, а кватернионы $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{z}$ – ориентацию системы координат Y' относительно систем координат Y, Z и X соответственно.

Полагаем, что каждый кватернион $\boldsymbol{\pi}=\pi_0+\pi_1\mathbf{i}_1+\pi_2\mathbf{i}_2+\pi_3\mathbf{i}_3$ ($\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\varkappa}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{s}$) определен своими компонентами π_j ($j=0, 1, 2, 3$) в базисе, преобразуемом этим кватернионом, т. е. параметрами Родрига — Гамильтона соответствующего конечного поворота ($\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ — орты гиперкомплексного пространства [15]).

Обозначим через I_i ($i=1, 2, 3$) моменты инерции гирорамы относительно осей OY_i (оси OY_i полагаем главными осями инерции гирорамы), а через p, q, r — проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости вращения системы координат Y (гирорамы) на ее же оси.

Будем рассматривать такие гиромаятниковые системы, для которых проекции H_i вектора собственного кинетического момента $\mathbf{H}$ гироскопов на оси системы координат Y определяются соотношениями [3—5, 8, 9]:

$$H_1=(k-I_1)p, \quad H_2=(k-I_2)q, \quad H_3=0, \quad k=\text{const} \tag{1.2}$$

где k — некоторая величина, зависящая от параметров системы.

Тогда отображение кинетического момента $\mathbf{L}$ движения гиромаятниковой системы относительно системы координат X, вычисленного относительно точки O, на оси системы координат Y имеет вид $\mathbf{L}_Y=k\boldsymbol{\omega}_Y+(I_3-k)r\mathbf{i}_3$. Положим, что центр масс гиромаятниковой системы лежит на отрицательной части оси OY_3 и находится от точки подвеса O на расстоянии l.

Кватернионная форма уравнений возмущенного движения такой гиромаятниковой системы в параметрах Родрига — Гамильтона $\varkappa_j$ получается из соотношений (2.5), (2.6) [1], если в них формально положить $\mathbf{H}=0$, и имеет вид

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\varkappa}^{\cdot\cdot}+\boldsymbol{\omega}_Z{}^\circ\circ\boldsymbol{\varkappa}^{\cdot}-cr\boldsymbol{\varkappa}^{\cdot}\circ\mathbf{i}_3+{}^1/_2(\boldsymbol{\omega}_Z{}^{\circ\cdot}-cr^2+nA_3)\circ\boldsymbol{\varkappa}+\\+{}^1/_2[n\mathbf{A}_Z-c(r^{\cdot}+r\boldsymbol{\omega}_Z{}^\circ)]\circ\boldsymbol{\varkappa}\circ\mathbf{i}_3=\chi\boldsymbol{\varkappa}+{}^1/_2n\boldsymbol{\varkappa}\circ\mathbf{M}_Y\end{gathered} \tag{1.3}$$

$$\begin{gathered}\chi={}^1/_4(\omega^{\circ2}-\omega^2)+{}^1/_2n(A_3-A_3')=\\=-(\varkappa_0^{\cdot2}+\varkappa_1^{\cdot2}+\varkappa_2^{\cdot2}+\varkappa_3^{\cdot2})-p_0(\varkappa_0\varkappa_1^{\cdot}-\varkappa_1\varkappa_0^{\cdot}+\varkappa_2\varkappa_3^{\cdot}-\varkappa_3\varkappa_2^{\cdot})-\\-q_0(\varkappa_0\varkappa_2^{\cdot}-\varkappa_2\varkappa_0^{\cdot}-\varkappa_1\varkappa_3^{\cdot}+\varkappa_3\varkappa_1^{\cdot})-r_0(\varkappa_0\varkappa_3^{\cdot}-\varkappa_3\varkappa_0^{\cdot}+\varkappa_1\varkappa_2^{\cdot}-\varkappa_2\varkappa_1^{\cdot})-\\-n[lmw_1(\varkappa_0\varkappa_2+\varkappa_1\varkappa_3)+lmw_2(\varkappa_2\varkappa_3-\varkappa_0\varkappa_1)-A_3(\varkappa_1^2+\varkappa_2^2)]\end{gathered} \tag{1.4}$$

$$I_3r^{\cdot}=M_3 \tag{1.5}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{A}_Z=lm\mathbf{w}_Z+\mathbf{i}_3dU(\gamma_3)/d\gamma_3, \quad A_3=lmw_3+dU(\gamma_3)/d\gamma_3\\A_3'=lmw_3'+\gamma_3dU(\gamma_3)/d\gamma_3\end{gathered} \tag{1.6}$$

$$\boldsymbol{\omega}_Z{}^\circ=p_0\mathbf{i}_1+q_0\mathbf{i}_2+r_0\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{w}_Z=w_1\mathbf{i}_1+w_2\mathbf{i}_2+w_3\mathbf{i}_3 \tag{1.7}$$

$$\gamma_3=\cos\vartheta=1-2(\varkappa_1^2+\varkappa_2^2)=2(\varkappa_0^2+\varkappa_3^2)-1 \tag{1.8}$$

$$\boldsymbol{\varkappa}\circ\mathbf{M}_Y=\mathbf{M}_Z\circ\boldsymbol{\varkappa}, \quad \mathbf{M}_Y=\Sigma M_i\mathbf{i}_i, \quad \mathbf{M}_Z=\Sigma M_i{}^\circ\mathbf{i}_i \quad (i=\overline{1,3})$$

$$c=(k-I_3)k^{-1}, \quad n=k^{-1}, \quad \omega^\circ=|\boldsymbol{\omega}^\circ|, \quad \omega=|\boldsymbol{\omega}|$$

Здесь $\varkappa_j$ — параметры Родрига — Гамильтона конечного поворота системы координат Y (гирорамы) относительно системы координат Z, w_i ($i=1, 2, 3$) — проекции вектора $\mathbf{w}$ абсолютного ускорения точки подвеса гиромаятниковой системы на оси системы координат Z, w_3' — проекция вектора $\mathbf{w}$ на приборную вертикаль (ось OY_3); p_0, q_0, r_0 — проекции вектора $\boldsymbol{\omega}^\circ$ на оси системы координат Z, являющиеся, так же как и величины w_i, известными функциями времени t; $U(\gamma_3)$ — силовая функция потенциального силового поля, в котором движется гиромаятниковая система, являющаяся произвольной непрерывной дифференцируемой функцией переменной $\gamma_3=\cos\vartheta$, ϑ — угол между геоцентрической и приборной вертикалями (между осями OZ_3 и OY_3), $\mathbf{A}_Z$ — отображение вектора $\mathbf{A}=\mathbf{z}_3dU(\gamma_3)/d\gamma_3+lm\mathbf{w}$ ($\mathbf{z}_3$ — единичный вектор оси OZ_3) на базис Z; A_3, A_3' — проекции вектора $\mathbf{A}$ на оси OZ_3 и OY_3 соответственно, $\boldsymbol{\omega}_Z{}^\circ$, $\mathbf{w}_Z$ — отображения векторов $\boldsymbol{\omega}^\circ$ и $\mathbf{w}$ на базис Z, $\mathbf{M}$ — главный момент действующих на гиромаятниковую систему внешних сил (помимо потенциальных сил с силовой функцией $U(\gamma_3)$), вычисленный относительно точки O; M_i, M_i° — проекции вектора $\mathbf{M}$ на оси систем координат Y и Z; $\mathbf{M}_Y$, $\mathbf{M}_Z$ — отображения вектора $\mathbf{M}$ на базисы Y и Z; m — масса гиромаятниковой системы; точка означает дифференцирование по времени t, знак $\circ$ — кватернионное умножение.

Отметим, что рассматриваемые потенциальные силы создают относительно точки подвеса гиромаятниковой системы момент $\mathbf{M}_1'=(dU(\gamma_3)/d\gamma_3)\mathbf{y}_3\times\mathbf{z}_3$, где $\mathbf{y}_3$ — орт приборной вертикали.

Выделим среди них равнодействующую сил тяготения Земли, принимаемой за сферу с однородным распределением масс. Для этого представим силовую функцию $U(\gamma_3)$ в виде $U(\gamma_3)=lmg\gamma_3+U'(\gamma_3)$, где g — модуль вектора $\mathbf{g}$ гравитационного ускорения точки подвеса гиромаятниковой системы, $U'(\gamma_3)$ — некоторая непрерывная дифференцируемая функция переменной γ_3.

Соотношения (1.6) в этом случае примут вид

$$\mathbf{A}_Z=lm\mathbf{a}_Z+\mathbf{i}_3 dU'(\gamma_3)/d\gamma_3,\quad A_3=lma_3^\circ+$$
$$+dU'(\gamma_3)/d\gamma_3,\quad A_3'=lma_3+\gamma_3 dU'(\gamma_3)/d\gamma_3 \tag{1.9}$$

где $a_3^\circ=w_3+g$, $a_3=w_3'+g\gamma_3$ — проекции вектора $\mathbf{a}$ кажущегося ускорения точки подвеса системы на геоцентрическую и приборную вертикали, $\mathbf{a}_Z=\mathbf{w}_Z-\mathbf{g}_Z=\mathbf{w}_Z+g\mathbf{i}_3$ — отображение вектора $\mathbf{a}=\mathbf{w}-\mathbf{g}=\mathbf{w}+g\mathbf{z}_3$ на базис Z.

Для $U'(\gamma_3)=0$ из (1.9) получаем $\mathbf{A}_Z=lm\mathbf{a}_Z$, $A_3=lma_3^\circ$, $A_3'=lma_3$. Отметим, что кватернионное уравнение возмущенного движения гиромаятниковой системы, полученное в [6], является частным случаем уравнения (1.3) и получается из него при $M_1=M_2=0$ и $U'(\gamma_3)=0$.

2. Рассмотрим невозмущаемые гиромаятниковые системы. Гиромаятниковая система называется невозмущаемой [2—5, 8, 9], если при произвольном движении точки подвеса системы ее ось OY_3 будет направлена по геоцентрической вертикали. Для невозмущаемой гиромаятниковой системы ее кватернионное уравнение движения (1.3) должно иметь частное решение вида

$$\varkappa^*=1,\quad \varkappa^{*\cdot}=0\quad (\varkappa_0^*=1,\ \varkappa_i^*=0,\ \varkappa_j^{*\cdot}=0,\ i=\overline{1,3},\ j=\overline{0,3}) \tag{2.1}$$

Этому частному решению соответствует совпадение приборного трехгранника Y с трехгранником Z. Подставляя в уравнение (1.3) значения (2.1) переменных $\varkappa_j$, убеждаемся, что оно обращается в тождество при выполнении равенства

$$\boldsymbol{\omega}_Z^{\circ\cdot}-cr^2+nA_3+[n\mathbf{A}_Z-c(r^\cdot+r\boldsymbol{\omega}_Z^\circ)]\circ\mathbf{i}_3=n\mathbf{M}_Y \tag{2.2}$$

Кватернионное равенство (2.2) эквивалентно следующим скалярным:

$$r_0^\cdot-r^\cdot=0,\quad cr(r_0-r)=0 \tag{2.3}$$
$$p_0^\cdot-crq_0+lmnw_2=nM_1,\quad q_0^\cdot+crp_0-lmnw_1=nM_2$$

Таким образом, для невозмущаемости гиромаятниковой системы, описываемой уравнением (1.3), необходимо и достаточно выполнение условий (2.3) и условий $\varkappa(t_0)=1$, $\varkappa^\cdot(t_0)=0$. Напомним, что рассматриваются гиромаятниковые системы, для которых выполнены известные условия невозмущаемости [3—5, 8, 9], касающиеся проекций собственного кинетического момента гиросистемы, т. е. условия (1.2). Из условий невозмущаемости (2.3) следуют законы изменения моментов M_1, M_2 внешних сил, придающих гиромаятниковой системе свойство невозмущаемости для произвольного движения ее точки подвеса и произвольных значений ее параметров c, n.

Предположим, что $M_1=M_2=0$, а точка подвеса системы движется по поверхности невращающейся сферы радиуса R, концентрической с земным шаром [2].

Условия невозмущаемости (2.3) примут в этом случае вид

$$r_0^\cdot-r^\cdot=0,\quad cr(r_0-r)=0 \tag{2.4}$$
$$p_0^\cdot-crq_0+lmnw_2=0,\quad q_0^\cdot+crp_0-lmnw_1=0$$

Трехгранник Z является в рассматриваемом случае координатным трехгранником Дарбу [2]. Учитывая, что для трехгранника Дарбу в общем случае [2] справедливы соотношения $w_1=R(q_0^{\cdot}+p_0r_0)$, $w_2=-R(p_0^{\cdot}-q_0r_0)$, получаем, что условия (2.4) выполняются, когда имеет место одна из следующих групп равенств:

$$1/n=k=lmR, \quad r=0, \quad r_0=0 \tag{2.5}$$

$$1/n=k=lmR, \quad c=1, \quad r_0=r \tag{2.6}$$

Из этих равенств следует, что гиромаятниковая система, параметры которой удовлетворяют условиям $k=lmR$, $r=0$ (параметр c может быть при этом произвольным), моделирует в своем невозмущенном движении азимутально свободный трехгранник (естественно полагается, что выполнены также условия невозмущаемости, касающиеся ориентации и угловой скорости вращения приборного трехгранника Y в начальный момент времени). Гиромаятниковая же система, параметры которой удовлетворяют условиям $k=lmR$, $c=1$, моделирует в своем невозмущенном движении такой трехгранник Дарбу, проекция r_0 абсолютной угловой скорости которого на геоцентрическую вертикаль равна проекции r абсолютной угловой скорости вращения гирорамы на приборную вертикаль (напомним, что для трехгранника Дарбу в рассматриваемом общем случае компонента r_0 может быть задана произвольной функцией времени).

Для естественного трехгранника Дарбу (частный случай рассмотренного выше трехгранника Дарбу) [2] $w_1=Rq_0^{\cdot}$, $w_2=Rq_0r_0$, где r_0 уже не является произвольной функцией времени, а задается формулой $r_0=v/\rho$, в которой v — модуль вектора $\mathbf{v}$ абсолютной скорости точки подвеса гиросистемы, ρ — радиус геодезической кривизны траектории точки подвеса.

С учетом этих равенств получаем, что условия (2.4) выполняются, когда

$$k=lmR, \quad c=1, \quad r=r_0=v/\rho \tag{2.7}$$

Это говорит о том, что гиромаятниковая система, параметры которой удовлетворяют условиям (2.7), моделирует в своем невозмущенном движении естественный трехгранник Дарбу.

Следует отметить, что равенство $c=1$ может быть выполнено лишь в рамках прецессионной теории, а также то, что равенство $r=r_0=v/\rho$ может быть реализовано за счет приложения к гиросистеме момента $M_3=I_3r_0^{\cdot}$.

Полагая, что выполнены условия невозмущаемости (2.2) и $M_1=M_2=0$, а также учитывая соотношение $\boldsymbol{\varkappa}\circ\mathbf{i}_3-\mathbf{i}_3\circ\boldsymbol{\varkappa}=2(\varkappa_2\mathbf{i}_1-\varkappa_1\mathbf{i}_2)$ и уравнение (1.5), из (1.3) получаем следующее кватернионное уравнение движения невозмущаемой гиромаятниковой системы:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\varkappa}^{\cdot\cdot}+\boldsymbol{\omega}_Z{}^{\circ}\circ\boldsymbol{\varkappa}^{\cdot}-cr\boldsymbol{\varkappa}^{\cdot}\circ\mathbf{i}_3+\\+(n\mathbf{A}_Z-r^{\cdot}-cr\boldsymbol{\omega}_Z{}^{\circ})\circ(\varkappa_2\mathbf{i}_1-\varkappa_1\mathbf{i}_2)=\chi\boldsymbol{\varkappa}\end{gathered} \tag{2.8}$$

где функция χ определяется выражением (1.4).

Подставляя последовательно в уравнение (2.8) равенства (2.5)—(2.7), которым должны удовлетворять параметры невозмущаемых гиромаятниковых систем в рассматриваемых случаях, получаем соответствующие им кватернионные уравнения движения невозмущаемых гиромаятниковых систем. Так, подставляя в уравнение (2.8) равенства (2.5), получаем кватернионное уравнение

$$\boldsymbol{\varkappa}^{\cdot\cdot}+\boldsymbol{\omega}_Z{}^{\circ}\circ\boldsymbol{\varkappa}^{\cdot}+(lmR)^{-1}\mathbf{A}_Z\circ(\varkappa_2\mathbf{i}_1-\varkappa_1\mathbf{i}_2)=\chi\boldsymbol{\varkappa} \tag{2.9}$$

из которого при $U'(\gamma_3)=0$ ($\mathbf{A}_Z=lm\mathbf{a}_Z$) следуют скалярные уравнения в параметрах Родрига — Гамильтона, приведенные в [6].

Уравнением (2.9) при $\mathbf{A}_Z=lm\mathbf{a}_Z$ описывается движение относительно азимутально свободного трехгранника невозмущаемого физического маятника [2, 16], платформы свободной в азимуте системы инерциальной навигации [2, 17], невозмущаемой двухроторной гирорамы [4].

Подставляя в (2.8) равенства (2.7), получаем кватернионное уравнение прецессионного движения приборной вертикали невозмущаемой двухроторной гирорамы относительно естественного трехгранника Дарбу:

$$\varkappa^{\cdot\cdot}+\omega_Z{}^\circ\circ\varkappa^{\cdot}-r_0\varkappa^{\cdot}\circ\mathbf{i}_3+$$
$$+[(lmR)^{-1}\mathrm{A}_Z-r_0^{\cdot}-r_0\omega_Z{}^\circ]\circ(\varkappa_2\mathbf{i}_1-\varkappa_1\mathbf{i}_2)=\chi\varkappa \tag{2.10}$$

При $\mathrm{A}_Z=lm\mathbf{a}_Z$ из кватернионного уравнения (2.10) следуют скалярные уравнения движения приборной вертикали в параметрах Родрига — Гамильтона, полученные в [4, 6].

Сопоставление уравнений (2.8)—(2.10) с уравнением (1.3) позволяет проанализировать изменение структуры уравнений движения гиромаятниковых систем (структуры действующих на них сил), происходящее при выполнении условий невозмущаемости. Так, например, из (2.9) и (1.3) видно, что при выполнении условий невозмущаемости (2.5) исчезают гироскопические силы $cr\varkappa^{\cdot}\circ\mathbf{i}_3$, неконсервативные позиционные силы $cr^{\cdot}\varkappa\circ\mathbf{i}_3$, $\omega_Z{}^{\circ\cdot}\circ\varkappa$, консервативные силы $cr\omega_Z{}^\circ\circ\varkappa\circ\mathbf{i}_3$, нарушается структура консервативных сил $n\mathrm{A}_Z\circ\varkappa\circ\mathbf{i}_3$.

Предположим, что $r=\mathrm{const}$ и силовая функция $U(\gamma_3)$ не зависит явно от времени. Рассмотрим такое движение точки подвеса гиромаятниковой системы по поверхности невращающейся сферы радиуса R, для которого вектор $\boldsymbol{\omega}^\circ$ абсолютной угловой скорости вращения системы координат Z постоянен в этой же системе координат по модулю и направлению. Тогда при выполнении любой из совокупности условий (2.5)—(2.7) уравнение движения невозмущаемой гиромаятниковой системы (2.8) имеет интеграл энергии (суммирование по j здесь и ниже производится от 0 до 3):

$$\Sigma\varkappa_j^{\cdot 2}-\omega^{\circ 2}(\varkappa_1{}^2+\varkappa_2{}^2)-U(\gamma_3)/(2lmR)=\mathrm{const},\qquad \omega^\circ=|\boldsymbol{\omega}^\circ| \tag{2.11}$$

Рассмотрим устойчивость невозмущенного движения (2.1) гиросистемы. Для этого разложим функцию $U(\gamma_3)$ в ряд по степеням переменной $\varkappa_{12}=\varkappa_1{}^2+\varkappa_2{}^2$, учитывая равенство (1.8):

$$U(\gamma_3)=U(\gamma_3)|_{\gamma_3=1}-2dU(\gamma_3)/d\gamma_3|_{\gamma_3=1}(\varkappa_1{}^2+\varkappa_2{}^2)+O(\varkappa^4) \tag{2.12}$$

Здесь символом $O(\varkappa^4)$ обозначена совокупность членов разложения высших порядков, начиная с четвертого, относительно переменных $\varkappa_1$, $\varkappa_2$.

С учетом разложения (2.12) интеграл (2.11) примет вид

$$\Sigma\varkappa_j^{\cdot 2}+[(lmR)^{-1}dU(\gamma_3)/d\gamma_3|_{\gamma_3=1}-\omega^{\circ 2}](\varkappa_1{}^2+\varkappa_2{}^2)+$$
$$+O(\varkappa^4)=\mathrm{const} \tag{2.13}$$

Принимая выражение, стоящее в левой части равенства (2.13), в качестве функции Ляпунова, на основании теоремы об устойчивости движения по отношению к части переменных [10] получаем, что невозмущенное движение (2.1) гиромаятниковой системы устойчиво по отношению к переменным $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_j^{\cdot}$ $(j=\overline{0,3})$ для указанного движения точки подвеса системы, если выполнено условие

$$(lmR)^{-1}dU(\gamma_3)/d\gamma_3|_{\gamma_3=1}>\omega^{\circ 2} \tag{2.14}$$

В первом приближении $\varkappa_1\cong\beta/2$, $\varkappa_2\cong\gamma/2$, где β и γ — углы отклонения приборной вертикали (оси OY_3) от геоцентрической вертикали. Поэтому (2.14) является достаточным условием устойчивости невозмущенного движения приборной вертикали невозмущаемой гиромаятниковой системы для такого движения точки подвеса системы, при котором вектор $\boldsymbol{\omega}^\circ$ постоянен по модулю и направлению в системе координат Z.

При рассмотрении движения гиромаятниковой системы в центральном ньютоновском поле сил тяготения силовая функция $U(\gamma_3)=lmg\gamma_3+$ $+{}^3/_2(I_1-I_3)R^{-1}g\gamma_3{}^2$. В этом случае интеграл (2.13) и условие (2.14) принимают вид

$$\Sigma\varkappa_j^{\cdot 2}+(gR^{-1}+d'-\omega^{\circ 2})(\varkappa_1{}^2+\varkappa_2{}^2)-d'(\varkappa_1{}^2+\varkappa_2{}^2)^2=\mathrm{const}$$
$$d'=3(I_1-I_3)g(lmR^2)^{-1}$$
$$[1+3(I_1-I_3)/lmR]\nu^2>\omega^{\circ 2},\qquad \nu^2=g/R$$

Для невозмущаемой гиромаятниковой системы, материализующей в своем невозмущенном движении азимутально свободный трехгранник, $\omega^{\circ 2}=p_0^2+q_0^2=v^2/R^2$, а для системы, материализующей в невозмущенном движении естественный трехгранник Дарбу, $\omega^{\circ 2}=q_0^2+r_0^2=v^2(R^{-2}+\rho^{-2})$.

При $d'=0$ и $\omega^{\circ 2}=q_0^2+r_0^2$ достаточное условие устойчивости движения приборной вертикали переходит в известное [18, 19] достаточное условие устойчивости движения пространственного гирогоризонткомпаса [2, 20] по отношению ко всем переменным и совпадает с достаточным условием устойчивости положения относительного равновесия гиромаятниковой системы, полученным в [3].

3. Запишем кватернионное уравнение движения гиромаятниковой системы в параметрах Родрига — Гамильтона λ_j, т. е. запишем это уравнение в системе координат Y', вращающейся относительно гирорамы вокруг приборной вертикали с угловой скоростью $\mathbf{u}'=-cr\mathbf{y}_3$. Это уравнение получается из уравнения (3.7) [1] и имеет вид

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda}^{\cdot\cdot}+\boldsymbol{\omega}_Z{}^{\circ}\circ\boldsymbol{\lambda}^{\cdot}+{}^1/_2(nA_3+\boldsymbol{\omega}_Z{}^{\circ\cdot})\circ\boldsymbol{\lambda}+{}^1/_2n\mathbf{A}_Z\circ\boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{i}_3=\\ =\chi^*\boldsymbol{\lambda}+{}^1/_2n\mathbf{M}_Z\circ\boldsymbol{\lambda}\end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}\chi^*={}^1/_4(\omega^{\circ 2}-\Omega^2)+{}^1/_2n(A_3-A_3')=\\ =-(\lambda_0^{\cdot 2}+\lambda_1^{\cdot 2}+\lambda_2^{\cdot 2}+\lambda_3^{\cdot 2})-p_0(\lambda_0\lambda_1^{\cdot}-\lambda_1\lambda_0^{\cdot}+\lambda_2\lambda_3^{\cdot}-\lambda_3\lambda_2^{\cdot})-\\ -q_0(\lambda_0\lambda_2^{\cdot}-\lambda_2\lambda_0^{\cdot}-\lambda_1\lambda_3^{\cdot}+\lambda_3\lambda_1^{\cdot})-r_0(\lambda_0\lambda_3^{\cdot}-\lambda_3\lambda_0^{\cdot}+\\ +\lambda_1\lambda_2^{\cdot}-\lambda_2\lambda_1^{\cdot})-n[lmw_1(\lambda_0\lambda_2+\lambda_1\lambda_3)+\\ +lmw_2(\lambda_2\lambda_3-\lambda_0\lambda_1)-A_3(\lambda_1^2+\lambda_2^2)]\end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\gamma_3=1-2(\lambda_1^2+\lambda_2^2)=2(\lambda_0^2+\lambda_3^2)-1 \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_Z\circ\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{M}_{Y1}, \quad \mathbf{M}_{Y1}=\overline{\boldsymbol{\mu}}\circ\mathbf{M}_Y\circ\boldsymbol{\mu},\\ \boldsymbol{\mu}=\cos(\varepsilon/2)-\mathbf{i}_3\sin(\varepsilon/2)\end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\cdot}=cr=c\Omega_3/(1-c)=2c[-\lambda_3\lambda_0^{\cdot}+\lambda_2\lambda_1^{\cdot}-\lambda_1\lambda_2^{\cdot}+\\ +\lambda_0\lambda_3^{\cdot}+p_0(\lambda_1\lambda_3+\lambda_0\lambda_2)+q_0(\lambda_2\lambda_3-\lambda_0\lambda_1)+\\ +r_0({}^1/_2-\lambda_1^2-\lambda_2^2)]/(1-c)\end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь $\Omega=|\boldsymbol{\Omega}|$, $\mathbf{M}_{Y1}$ — отображение момента $\mathbf{M}$ на базис Y', Ω_3 — проекция вектора $\boldsymbol{\Omega}$ на приборную вертикаль, величины A_3, A_3', $\mathbf{A}_Z$ определяются соотношениями (1.6), в которых переменная γ_3 задается равенствами (3.3).

В общем случае задания момента $\mathbf{M}$ его проекциями M_i в системе координат Y, связанной с гирорамой, кватернионное уравнение (3.1) необходимо рассматривать совместно с соотношениями (3.4), (3.5). В случаях, когда проекция M_3 этого момента на приборную вертикаль является известной функцией времени t, переменная ε также является известной функцией времени (в силу равенства $I_3r^{\cdot}=M_3$) и уравнение (3.5), связывающее ε с параметрами λ_j, выпадает из рассмотрения. Уравнение (3.1) может рассматриваться независимо от соотношений (3.4), (3.5) в случаях, когда момент $\mathbf{M}=0$, когда $\mathbf{M}=M_3(t)\mathbf{y}_3$, а также когда момент $\mathbf{M}$ задан своими проекциями $M_i{}^{\circ}$ как функциями времени в системе координат Z.

Отметим, что уравнение (3.1) и соотношение (3.2) могут быть формально получены из уравнения (1.3) и соотношения (1.4), если в них положить $r=0$, а вместо $\varkappa$, ω и $\varkappa_j$ взять соответственно $\boldsymbol{\lambda}$, Ω и λ_j (при этом необходимо учесть равенство $\boldsymbol{\varkappa}\circ\mathbf{M}_Y=\mathbf{M}_Z\circ\boldsymbol{\varkappa}$).

Переход от переменных λ_j к $\varkappa_j$, характеризующим ориентацию гирорамы относительно системы координат Z, производится по формуле, вытекающей из схемы поворотов (1.1):

$$\boldsymbol{\varkappa}=\boldsymbol{\lambda}\circ\overline{\boldsymbol{\mu}} \quad (3.6)$$

Кватернион $\boldsymbol{\mu}$ здесь определяется соотношениями (3.4), (3.5).

Уравнение (3.1) гораздо проще уравнения (1.3), поэтому его использование для аналитического и численного исследования движения гиросистем может оказаться в некоторых случаях более предпочтительным.

4. Рассмотрим кватернионное уравнение движения гиромаятниковой системы в параметрах Родрига — Гамильтона z_j, характеризующих собой ориентацию системы координат Y' относительно системы координат X, перемещающейся по отношению к инерциальной системе координат X^* поступательно. Это уравнение получается из уравнения (4.5) и соотношения (4.4) [1] и имеет вид

$$\mathbf{z}^{\cdot\cdot}+{}^1/_4\Omega^2\mathbf{z}=-{}^1/_2 n(\mathbf{A}_X\circ\mathbf{z}\circ\mathbf{i}_3+A_3'\mathbf{z})+{}^1/_2 n\mathbf{M}_X\circ\mathbf{z} \qquad (4.1)$$

$$\mathbf{z}=z_0+\Sigma z_i\mathbf{i}_i, \qquad \mathbf{A}_X=\Sigma A_i^*\mathbf{i}_i, \qquad \mathbf{M}_X=\Sigma M_i^*\mathbf{i}_i \qquad (i=\overline{1,3}) \qquad (4.2)$$

$${}^1/_4\Omega^2=z_0^{\cdot 2}+z_1^{\cdot 2}+z_2^{\cdot 2}+z_3^{\cdot 2}={}^1/_4 n^2L^2, \qquad \Omega=|\mathbf{\Omega}|, \qquad L=|\mathbf{L}| \qquad (4.3)$$

$$A_3'=2A_1^*(z_0z_2+z_1z_3)+2A_2^*(z_2z_3-z_0z_1)+$$
$$+A_3^*(z_0^2-z_1^2-z_2^2+z_3^2) \qquad (4.4)$$

Здесь A_i^*, M_i^* — проекции вектора $\mathbf{A}$ и момента $\mathbf{M}$ на ось $OX_i(O^*X_i^*)$, $\mathbf{A}_X$, $\mathbf{M}_X$ — отображения векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{M}$ на базис $X(X^*)$.

Нетрудно заметить, что уравнение (4.1) получается из уравнения (3.1) и соотношения (3.2), если в них положить $Z=X$, $\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{z}$, $\lambda_j=z_j$, $\boldsymbol{\omega}^\circ=0$, т. е. если принять, что система координат Z не вращается относительно инерциальной системы координат X^*.

Переход от переменных z_j к параметрам Родрига — Гамильтона $\varkappa_j$, характеризующим ориентацию гирорамы относительно системы координат Z, производится в соответствии с равенством, вытекающим из схемы поворотов (1.1):

$$\boldsymbol{\varkappa}=\overline{\boldsymbol{\nu}}\circ\mathbf{z}\circ\overline{\boldsymbol{\mu}} \qquad (4.5)$$

Кватернион $\boldsymbol{\nu}$, фигурирующий в формуле (4.5), характеризует собой ориентацию системы координат Z относительно X и является известной функцией времени t. Он может быть найден по заданному закону движения точки подвеса гиромаятниковой системы, или интегрированием кинематического уравнения $2\boldsymbol{\nu}^\cdot=\boldsymbol{\nu}\circ\boldsymbol{\omega}_Z^\circ$ по заданным проекциям p_0, q_0, r_0 вектора $\boldsymbol{\omega}^\circ$ на оси системы координат Z.

Кватернион $\boldsymbol{\mu}$, входящий в формулу (4.5), определяется соотношениями

$$\boldsymbol{\mu}=\cos(\varepsilon/2)-\mathbf{i}_3\sin(\varepsilon/2) \qquad (4.6)$$

$$\varepsilon^\cdot=cr=c\Omega_3/(1-c)=2c(-z_3z_0^\cdot+z_2z_1^\cdot-z_1z_2^\cdot+z_0z_3^\cdot)/(1-c)$$

Уравнение (4.1) и соотношения (4.2), (4.3) позволяют непосредственно находить переменные z_j, в случаях, когда известны как функции времени проекции A_i^*, M_i^* векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{M}$ на оси системы координат $X(X^*)$.

Если же вектор $\mathbf{A}$ задан своими проекциями A_i в системе координат Z (с помощью соотношений (1.6), (1.7) или (1.9), (1.7)), то уравнение (4.1) необходимо дополнить равенством

$$\mathbf{A}_X=\boldsymbol{\nu}\circ\mathbf{A}_Z\circ\overline{\boldsymbol{\nu}} \qquad (4.7)$$

из которого при $U'(\gamma_3)=0$ предварительно находятся как функции времени проекции A_i^* вектора $\mathbf{A}$ через его проекции $A_i(t)$ и компоненты $\nu_j(t)$ кватерниона $\boldsymbol{\nu}$. При $U'(\gamma_3)\neq 0$ к равенству (4.7) необходимо в соответствии с (1.9) присоединить соотношение для нахождения переменной γ_3:

$$\gamma_3=\mathbf{z}_3\cdot\mathbf{y}_3=4(\nu_0\nu_2+\nu_1\nu_3)(z_0z_2+z_1z_3)+$$
$$+4(\nu_2\nu_3-\nu_0\nu_1)(z_2z_3-z_0z_1)+[1-2(\nu_1^2+\nu_2^2)][1-2(z_1^2+z_2^2)]$$

В случаях, когда момент $\mathbf{M}$ задан своими проекциями M_i в системе координат Y, связанной с гирорамой, уравнение (4.1) необходимо дополнить соотношением $\mathbf{M}_x\circ\mathbf{z}=\mathbf{z}\circ\mathbf{M}_{y1}=\mathbf{z}\circ\overline{\boldsymbol{\mu}}\circ\mathbf{M}_y\circ\boldsymbol{\mu}$, где кватернион $\boldsymbol{\mu}$ определяется соотношениями (4.6).

Второе из соотношений (4.6), связывающее переменную ε с параметрами z_j и их производными $\dot{z}_j$, выпадает из рассмотрения, если $r=r(t)$ $(M_3=M_3(t))$.

Величину Ω^2, фигурирующую в уравнении (4.1), можно рассматривать в качестве новой переменной, дополняя кватернионное уравнение (4.1) ее законом изменения

$$d\Omega^2/dt=2n[2A_1{}^*d(z_0z_2+z_1z_3)/dt+$$
$$+2A_2{}^*d(z_2z_3-z_0z_1)/dt+A_3{}^*d(z_0{}^2-z_1{}^2-z_2{}^2+z_3{}^2)/dt]+$$
$$+4n\,\mathrm{sgal}(\bar{\dot{\mathbf{z}}}\circ\mathbf{M}_X\circ\mathbf{z}) \qquad (4.8)$$

Остановимся на некоторых частных случаях. Предположим, что момент $\mathbf{M}=0$ (или $\mathbf{M}\perp\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{L})$), $U'(\gamma_3)=0$ и точка подвеса гиромаятниковой системы движется в инерциальной системе координат с постоянным кажущимся ускорением. Тогда $\mathbf{A}_X=lm\mathbf{a}_X=\mathrm{const}$ и из уравнения (4.8) получаем $^1/_4\Omega^2={}^1/_2nA_3'+h$, $h=\mathrm{const}$. Уравнение движения гиромаятниковой системы (4.1) в этом случае принимает вид $\ddot{\mathbf{z}}+(h+nA_3')\mathbf{z}+{}^1/_2n\mathbf{A}_X\circ\mathbf{z}\circ\mathbf{i}_3=0$ $(h,\ \mathbf{A}_X=\mathrm{const})$. Для кеплеровских движений точки подвеса гиромаятниковой системы (эллиптического, гиперболического, параболического) кажущееся ускорение точки подвеса $\mathbf{a}=0$, поэтому уравнение (4.1) движения гиросистемы при $\mathbf{M}=0$ и $U'(\gamma_3)=0$ принимает вид уравнения движения гармонического осциллятора: $\ddot{\mathbf{z}}+{}^1/_4\Omega^2\mathbf{z}=0$ $(\Omega=\mathrm{const})$, а для движений точки подвеса, близких к кеплеровским,— вид уравнения движения возмущенного осциллятора.

В случае движения точки подвеса гиросистемы по экватору или по дуге большого круга невращающейся сферы, концентрической с Землей, уравнение движения гиросистемы (4.1) принимает вид уравнения движения динамически симметричного спутника. В случае, когда точка подвеса гиросистемы движется по неподвижной вертикальной прямой с произвольным абсолютным ускорением $\mathbf{w}=w_3\mathbf{z}_3$, а $\mathbf{M}=0$, уравнение (4.1) распадается на две независимые системы интегродифференциальных уравнений. Эти уравнения целесообразно использовать для исследования колебаний гиромаятниковой системы с вибрирующей точкой подвеса. Для движения точки подвеса с постоянным кажущимся ускорением $\mathbf{a}=(w_3+g)\mathbf{z}_3=\mathrm{const}$ каждая из указанных систем при $U'(\gamma_3)=0$ интегрируется в квадратурах, причем можно показать, что достаточное условие устойчивости движения приборной вертикали в этом случае имеет вид неравенства $a_3{}^\circ=w_3+g>0$.

5. Уравнения (3.1), (4.1) представляют собой две формы уравнений движения гиромаятниковой системы, записанных в системе координат Y', вращающейся с абсолютной угловой скоростью, пропорциональной вектору $\mathbf{L}$ кинетического момента относительного движения гиросистемы. Уравнение (3.1) описывает собой динамику движения гиромаятниковой системы относительно системы координат Z, связанной с геоцентрической вертикалью, а уравнение (4.1) — динамику движения гиросистемы относительно системы координат X, перемещающейся в инерциальном пространстве поступательно. Из сопоставления уравнений (3.1), (4.1) с уравнением движения гиросистемы (1.3), записанным в системе координат Y, связанной с гирорамой, видно, как изменяется структура уравнений движения гиромаятниковой системы при использовании преобразований вращения (3.6), (4.5). Указанные замены переменных позволяют полностью или частично (в зависимости от того, каким образом задан момент $\mathbf{M}$) исключить из уравнений движения проекцию r абсолютной угловой скорости вращения гиросистемы на ее ось динамической симметрии (приборную вертикаль). Поэтому уравнения (3.1) и (4.1) не содержат, в отличие от уравнения (1.3), гироскопических, неконсервативных позиционных и консервативных сил [7], обусловленных проекцией r (т. е. членов вида $cr\dot{\boldsymbol{\varkappa}}\circ\mathbf{i}_3$, $c\dot{r}\boldsymbol{\varkappa}\circ\mathbf{i}_3$, $cr\boldsymbol{\omega}_Z{}^\circ\circ\boldsymbol{\varkappa}\circ\mathbf{i}_3$). Кроме того, в отличие от уравнений (1.3) и (3.1) уравнение (4.1) не содержит гироскопических и неконсервативных позиционных сил, обусловленных абсолютной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}^\circ$ вращения системы координат Z (т. е. членов вида $\dot{\boldsymbol{\omega}}_Z{}^\circ\circ\dot{\boldsymbol{\varkappa}}$, $\boldsymbol{\omega}_Z{}^\circ\circ\boldsymbol{\varkappa}$).

Отметим, что введенные в п. 4 кватернионные переменные $\mathbf{z}$, $\mathbf{z}^{\bullet}$ позволяют легко находить закон изменения кинетического момента $\mathbf{L}$ относительного движения гиромаятниковой системы по формуле $\mathbf{L}_X=\mathbf{\Omega}_X/n=(2/n)\mathbf{z}^{\bullet}\circ\bar{\mathbf{z}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Челноков Ю. Н.* Кватернионные методы в задачах относительного движения динамически симметричных материальных систем. I.— Изв. АН СССР. МТТ, 1986, № 6, с. 30—37.
2. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
3. *Андреев В. Д.* Теория инерциальной навигации. (Корректируемые системы). М.: Наука, 1967. 648 с.
4. *Кошляков В. Н.* Теория гироскопических компасов. М.: Наука, 1972. 344 с.
5. *Климов Д. М.* Механика невозмущаемых гироскопических систем.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 4, с. 57—65.
6. *Челноков Ю. Н.* Об уравнениях движения гиромаятниковых систем в параметрах Родрига — Гамильтона.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 2, с. 20—29.
7. *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы. М.: Наука, 1974. 344 с.
8. *Климов Д. М.* Об условиях невозмущаемости гироскопической рамы.— ПММ, 1964, т. 28, вып. 3, с. 511—513.
9. *Блюмин Г. Д., Чичинадзе М. В.* Условия невозмущаемости однороторного гирокомпаса.— Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 3, с. 71—78.
10. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных.— Вестн. МГУ. Сер. математики, механики, астрономии, физики, химии, 1957, вып. 4, с. 21—28.
11. *Кошляков В. Н.* Об одном классе точных решений уравнений движения корректируемого гирогоризонткомпаса.— Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 6, с. 3—9.
12. *Кошляков В. Н.* К вопросу построения некоторого класса решений гиромаятниковой системы.— Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 2, с. 32—38.
13. *Жбанов Ю. К.* О точных решениях уравнений движения гирогоризонткомпаса.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 2, с. 11—18.
14. *Челноков Ю. Н.* К теории гирогоризонткомпаса в параметрах Родрига — Гамильтона.— Прикл. механика, 1984, т. 20, № 1, с. 118—123.
15. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
16. *Ишлинский А. Ю.* Об относительном равновесии физического маятника с подвижной точкой опоры.— ПММ, 1956, т. 20, вып. 3, с. 297—308.
17. *Ишлинский А. Ю.* Об уравнениях задачи определения местоположения движущегося объекта посредством гироскопов и измерителей ускорений.— ПММ, 1957, т. 21, вып. 6, с. 725—739.
18. *Жбанов Ю. К.* Исследование свободных колебаний в системе автономного определения координат движущегося объекта.— ПММ, 1960, т. 24, вып. 6, с. 1024—1029.
19. *Меркин Д. Р.* Об устойчивости движения гирорамы.— ПММ, 1961, т. 25, вып. 6, с. 983—991.
20. *Ишлинский А. Ю.* К теории гирогоризонткомпаса.— ПММ, 1956, т. 20, вып. 4, с. 487—499.

Саратов

Поступила в редакцию 17.VII.1984