ЛИТЕРАТУРА

1. *Федоренко Р. П.* Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1961, т. 1, № 5, с. 922—927.
2. *Федоренко Р. П.* О скорости сходимости одного интерационного процесса.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1964, т. 4, № 3, с. 559—564.
3. *Серпик И. Н.* О введении поэтапных аппроксимаций для расчета вагонных конструкций по методу конечных элементов.— В кн.: Вопросы строительной механики кузовов вагонов. Брянск: Изд-е Брянск. ин-та трансп. машиностроения, 1983, с. 133—144.
4. *Серпик И. Н.* Некоторые вопросы исследования скорости сходимости алгоритма поэтапных аппроксимаций.— Строит. механика и расчет сооружений, 1985, № 5, с. 14—15.
5. *Gago S. R. de J. P., Kelly D. W., Zienkiewicz O. C., Babuska I.* A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method: Pt II-Adaptive mesh refinement.— Intern. J. Numer. Methods Eng., 1983, v. 19, No. 11, p. 1621—1656.
6. *Оден Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.
7. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 349 с.
8. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.

Брянск

Поступила в редакцию
24.VI.1985

УДК 539.4

ОБЪЕКТИВНАЯ ПРОЧНОСТЬ МАТЕРИАЛА И ЕЕ ИЗМЕНЕНИЕ ПРИ ДЛИТЕЛЬНОМ ЗАГРУЖЕНИИ

РЖАНИЦЫН А. Р.

Понятие об объективной прочности материала как функции времени дано в [1], а также использовано без введения этого термина в [2, 3], где впервые был введен критерий прочности, заключающийся в том, что разрушение наступает в момент, когда напряжения от нагрузки становятся равными объективной прочности. Объективная прочность не всегда может быть выявлена прямыми испытаниями материала, и существование ее, так же как и зависимость от режима загружения, должны быть постулированы. В упомянутых работах эта зависимость предложена в виде (точкой обозначена производная по времени):

$$\dot{r}=\Phi(\sigma, r) \tag{1}$$

с критерием разрушения, соответствующим достижению в некоторый момент времени равенства

$$\sigma=r \tag{2}$$

где r — объективная прочность, σ — напряжение, вызываемое нагрузкой.

Функция $\Phi(\sigma, r)$ в [1] предложена в виде

$$\Phi(\sigma, r)=-A\sigma^n \exp\{-\beta(r-\sigma)\} \tag{3}$$

где A, n и β — некоторые постоянные величины, определяемые из условия наилучшего приближения к экспериментальным данным. Вид функции Φ (3) определяется тем, что скорость изменения r должна быть отрицательна и тем больше по абсолютной величине, чем меньше разность $r-\sigma$, т. е. чем меньше мгновенный резерв прочности материала. Множитель σ^n вводится для выполнения условия $\dot{r}=0$ при $\sigma=0$.

Уравнение (1) с функцией $\Phi(\sigma, r)$ (3) может быть проинтегрировано и примет вид

$$r=\beta^{-1}\ln\left[-A\beta\int_0^t \sigma^n e^{\beta\sigma}\,dt+e^{\beta r_0}\right] \tag{4}$$

где r_0 — начальная объективная прочность при $t=0$. Положив $\sigma=\mathrm{const}$, из (4) получим $r=[\ln(C_1-C\beta t)]/\beta$, $C_1=e^{\beta r_0}$, $C=A\sigma^n e^{\beta\sigma}$, и с учетом (2) найдем уравнение кривой длительной прочности материала, представляющей собой зависимость от σ времени t_g разрушения материала:

$$\beta\sigma=\ln(C_1-C\beta t_g),\qquad e^{\beta\sigma}=C_1-C\beta t_g \tag{5}$$
$$t_g=(C_1-e^{\beta\sigma})/(C_\beta)=\{\exp[\beta(r_0-\sigma)]-1\}/(A\sigma^n\beta)$$

В [4] предложена в качестве функции $\Phi(\sigma, r)$ зависимость $\Phi=r_0(\sigma/r)^m/A$, которая при $A=0{,}9$ сут, $m=49$ дала хорошее совпадение кривой длительной прочности с предложенной ранее для бетона эмпирической зависимостью $\sigma/r_0=0{,}92-0{,}04\log t_g$.

Более общий вид функции Φ, допускающий интегрирование уравнения (1), будет: $\Phi(\sigma, r)=\psi(\sigma)\chi(r)$. В этом случае получаем

$$\frac{dr}{\chi(r)}=\psi(\sigma)\,dt; \qquad \int_0^t \frac{dr}{\chi(r)}=\int_0^t \psi(\sigma)\,dt \tag{6}$$

Функцию $\chi(r)$ желательно выбирать так, чтобы левая часть равенства (6) интегрировалась в элементарных функциях. Для любой функции $\Phi(\sigma, r)$ и произвольного режима загружения $\sigma(t)$ в [1] предложен графический метод определения момента разрушения.

Объективную прочность, изменяющуюся согласно уравнению (1), можно отождествить с мгновенной прочностью в данный момент времени, определяемой мгновенно приложенным напряжением σ, необходимым для разрушения материала в этот момент. Зависимость (1), однако, не учитывает влияния на объективную прочность скачкообразных загружений и разгрузок. Так, например, мгновенная разгрузка на короткий срок с последующей мгновенной нагрузкой прежними напряжениями без сомнения должна влиять в отрицательную сторону на прочность образца, но уравнение (1) в этом случае уменьшения прочности не дает. Учет этого обстоятельства может быть произведен, если в правую часть уравнения (1) ввести скорость загружения, записав это уравнение в виде

$$r^{\cdot}=F(r, \sigma, \sigma^{\cdot}) \tag{7}$$

или $F_1(r, r^{\cdot}, \sigma, \sigma^{\cdot})=0$. Хорошие результаты дает следующий вид уравнения (7): $r^{\cdot}=-\psi(r)[u(\sigma)+|\sigma^{\cdot}|v(\sigma)]$. Интегрирование этого уравнения на участках возрастания σ приводит к формуле

$$R=R_0-\int_0^t u(\sigma)\,dt-\int_0^\sigma v(\sigma)\,d\sigma=R_0-\int_0^t u(\sigma)\,dt-V(\sigma)$$

$$R=\int_0^r \frac{dr}{\psi(r)}, \qquad R_0=\int_0^{r_0}\frac{dr}{\psi(r)}, \qquad V(\sigma)=\int_0^\sigma v(\sigma)\,d\sigma \tag{8}$$

Функция $u(\sigma)$ должна быть выбрана такой, чтобы она обращалась в нуль при $\sigma=0$. В момент времени t_1, когда σ достигает своего максимального значения $\sigma=\sigma_1$, функция R становится равной

$$R_1=R_0-\int_0^{t_1} u(\sigma)\,dt-V(\sigma_1) \tag{9}$$

В период убывания нагрузки имеем

$$R=R_1-\int_{t_1}^t u(\sigma)\,dt+\int_{\sigma_1}^\sigma v(\sigma)\,d\sigma=R_1-\int_{t_1}^t u(\sigma)\,dt+V(\sigma)-V(\sigma_1) \tag{10}$$

и в момент t_2 достижения ее минимального значения $\sigma=\sigma_2$:

$$R=R_1-\int_{t_1}^t u(\sigma)\,dt-V_1(\sigma)+V(\sigma_2)=R_0-\int_0^t u(\sigma)\,dt-2V(\sigma_1)+V(\sigma_2) \tag{11}$$

Далее, при чередовании периодов возрастания и убывания нагрузки, получаем

$$R=R_0-\int_0^t u(\sigma)\,dt-2V(\sigma_1)+2V(\sigma_2)-2V(\sigma_3)+\ldots\pm V(\sigma) \tag{12}$$

где нечетными индексами обозначены максимумы σ, а четными — минимумы.

Для частного случая ($\psi=e^{-\beta r}$, $u=\sigma^n e^{\beta\sigma}$, $v=Bu$) формула (12) была предложена в [5]. Заметим, что члены $V(\sigma_i)$ в (12) не зависят от закона нарастания или убывания σ, а зависят лишь от максимальных и минимальных значений σ. Поэтому формула (12) будет справедлива и при скачкообразных изменениях σ, т. е. при мгновенных нагружениях и разгружениях.

При мгновенном догружении образца от σ_1 до σ_2 получаем скачок функции объективной прочности $R(r)$ на величину $R_1-R_2=V(\sigma_2)-V(\sigma_1)$. Соответственно объективная прочность мгновенно уменьшится от r_1 до r_2, определяемого из (9). Например, полагая $\psi(r)=e^{-\beta r}$, получаем

$$R=(e^{\beta r}-1)/\beta, \quad R_1-R_2=(e^{\beta r_1}-e^{\beta r_2})/\beta$$

$$r_2=\frac{1}{\beta}\ln\left[-\beta\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} v\,d\sigma+e^{\beta r_1}\right]$$

Если r_2 окажется при этом меньше, чем σ_2, то это будет означать разрушение при мгновенном загружении. Мгновенная прочность в этот момент времени σ_M определится из уравнения

$$\beta\sigma_M+\ln\left[-\beta\int_{\sigma_1}^{\sigma_M} v\,d\sigma+e^{\beta r_1}\right]=0 \qquad (13)$$

Найденное отсюда значение σ_M будет меньше объективной прочности r_1. Поэтому для закона (8) понятие объективной прочности не совпадает с понятием мгновенной прочности, поскольку при мгновенном увеличении нагрузки объективная прочность будет мгновенно уменьшаться и равенство $\sigma=r$, означающее разрушение, не сможет реализоваться. Впрочем, определив экспериментальным путем мгновенную прочность σ_M, можно получить из уравнения (13) и объективную прочность r_1:

$$r_1=\frac{1}{\beta}\ln\left[e^{\beta\sigma_M}+\beta\int_{\sigma_1}^{\sigma_M} v\,d\sigma\right]$$

Если вместо $\psi(r)=e^{-\beta r}$ взять $\psi(r)=r^n$, то будем иметь

$$R=r^{1-n}/(1-n),\qquad r=[(1-n)R]^{1/(1-n)}$$

и мгновенная прочность должна определяться из уравнения:

$$\sigma_M=\left[r_1^{1-n}-(1-n)\int_{\sigma_1}^{\sigma_M} v\,d\sigma\right]^{1/(1-n)}$$

Если же известна мгновенная прочность, то объективная прочность определиться по формуле

$$r_1=\left[\sigma_M^{1-n}+(1-n)\int_{\sigma_1}^{\sigma_M} v\,d\sigma\right]^{1/(1-n)}$$

При мгновенном уменьшении нагрузки от σ_1 до $\sigma_2<\sigma_1$, согласно (10), получаем

$$R_2=R_1+V(\sigma_2)-V(\sigma_1)=R_1+\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} v\,d\sigma$$

В случаях $\psi(r)=e^{-\beta r}$ и $\psi(r)=r^n$ соответственно будем иметь

$$r_2=\frac{1}{\beta}\ln\left[e^{\beta r_1}-\beta\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} v\,d\sigma\right],\qquad r_2=\left[r_1^{1-n}+(1-n)\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} v\,d\sigma\right]^{1/(1-n)}$$

Необходимо, чтобы сразу после мгновенной разгрузки объективная прочность r_2 была больше σ_2, иначе произойдет разрушение в момент разгрузки.

Приведем результаты, вытекающие из описанной теории для различных случаев загружения. При этом покажем изменение под влиянием длительной нагрузки не самой объективной прочности, а функции $R(r)$, которая может иметь различные выражения, позволяющие от R перейти к r и далее к мгновенной прочности в любой момент времени.

1. При постоянной нагрузке $\sigma=\text{const}$ из (9) следует $R=R_0-u(\sigma)t$. Разрушение наступает при $r=\sigma$, причем $R=R(\sigma)=R_0-u(\sigma)t$. Этот случай может быть рассмотрен исходя из уравнения (1).

2. В случае прямоугольного импульса нагрузки: $\sigma=0$ при $t<t_1$ и $t>t_2$; $\sigma=\text{const}$ при $t_1<t<t_2$ получим

$$R=R_0-u(\sigma)(t-t_1)-\int_0^{\sigma} v\,d\sigma,\qquad t_1<t<t_2$$

$$R=R_0-u(\sigma)(t_2-t_1)-2\int_0^{\sigma} v\,d\sigma,\qquad t>t_2$$

При очень малом интервале времени $t_2-t_1\to 0$ будем иметь

$$R=R_0-2\int_0^{\sigma} v\,d\sigma$$

3. При кусочно-постоянной нагрузке получаем $R=R_0-u(\sigma)\Sigma t_i-2n\int v\,d\sigma_1$ $(0\leqslant\sigma_1\leqslant$

$\leqslant\sigma$), где n — число разрывов между участками загружения, t_i — продолжительность i-го участка загружения нагрузкой σ.

4. В случае любой периодической нагрузки имеем

$$R=R_0-\int_0^t u(\sigma)\,dt-2n\int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} v\,d\sigma=R_0-n\int_0^{t_1} u(\sigma)\,dt-2n\int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} v\,d\sigma$$

где n — число периодов нагрузки, t_1 — продолжительность одного периода.

Полученные закономерности довольно просты. Если экспериментальная проверка предлагаемых формул не приведет к слишком большим качественным несовпадениям, то количественные характеристики закономерностей нетрудно будет подобрать ввиду большого числа имеющихся в них параметров из условия максимального приближения к экспериментальным данным. Заметим, что приведенные формулы в некоторой степени аналогичны теории накопления повреждений, в которой повреждения заменены функцией R и кроме суммирования влияния самой нагрузки добавлены члены, зависящие от скорости изменения нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ржаницын А. Р.* Теория длительной прочности при произвольном одноосном и двухосном загружении.— Строит. механика и расчет сооружений, 1975, № 4, с. 25–29.
2. *Ржаницын А. Р.* Реологическая модель прочностных свойств материалов.— Сб. тр. Моск. инж.-строит. ин-та, 1974, № 113, с. 72–77.
3. *Ржаницын А. Р.* К вопросу о длительной прочности материала.— Тр. ЦНИИ Строит. конструкций, 1976, вып. 41, с. 52–59.
4. *Гвоздев А. А.* К вопросу о состоянии бетона при высоких сжимающих напряжениях.— Строит. механика и расчет сооружений, 1977, № 3, с. 14–16.
5. *Ржаницын А. Р., Антипина Ю. В.* Теория длительной прочности материалов с учетом скорости изменения нагрузки.— Строит. механика и расчет сооружений, 1979, № 5, с. 24–27.

Москва

Поступила в редакцию
5.XI.1985