

гипотезы получаем следующие зависимости между скоростями прокатки u_- , u_+ и величиной $\xi = \delta^{(1)}/\delta^{(2)} = (q_0^{(1)} + \sigma_S)/(q_0^{(2)} + \sigma_S)$:

$$\begin{aligned} u_-/(\omega R_*) &= (1+k)^{1/2} \xi^{-\lambda/2\mu} - \varepsilon^2 bl \{1/18(1+k)^{3/2} [3\lambda(\ln \xi)/\mu - 3 \ln(1+k) + \\ &+ 6k + 11] \xi^{-3\lambda/2\mu} - (1+k)^2 \xi^{-\lambda/\mu} + (1/2+k)^{1/2} \xi^{-\lambda/2\mu} - 1/9(1+3k)\} / (2r^2 k^2 \lambda) \\ u_+/(\omega R_*) &= (1+k)^{-1/2} \xi^{-\lambda/2\mu} - \varepsilon^2 bl \{1/18(1+k)^{3/2} [11+3 \ln(1+k) + \\ &+ 3\lambda(\ln \xi)/\mu] \xi^{-3\lambda/2\mu} - (1-k) \xi^{-\lambda/\mu} + 1/2(1+k)^{3/2} \xi^{-\lambda/2\mu} + 1/9(1+k)^2\} / (2r^2 k^2 \lambda) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Формулы (3.9) позволяют по доступным измерениям величин u_+ , u_- определять напряжения $q_0^{(1)}$, $q_0^{(2)}$, возникающие в реальных процессах прокатки труб на передней и задней границах зоны обжатия. Поскольку из (3.9) величина ξ в явном виде не выражается, следует использовать графическое представление решения. Для примера на фиг. 2, а показаны графики зависимости $q_0^{(1)}/\sigma_S$ от величины $u_-/\omega R_*$ для $q_0^{(2)}=0$ (кривые 1-3), для $q_0^{(2)}=0,5 \sigma_S$ (кривые 4-6) и для $q_0^{(2)}=-0,5 \sigma_S$ (кривые 7-9), а на фиг. 2, б приведены зависимости $q_0^{(2)}/\sigma_S$ от величины $u_+/\omega R_*$ для $q_0^{(1)}=0$ (кривые 1-3), для $q_0^{(1)}=0,5 \sigma_S$ (кривые 4-6) и для $q_0^{(1)}=-0,5 \sigma_S$ (кривые 7-9), численно рассчитанные для диапазонов $2\sigma_S > q_0^{(j)} > -\sigma_S$ ($j=1, 2$) при следующих значениях параметров прокатки: $r=0,050$ м; $b=0,056$ м; $R_*=0,289$ м; $\mu=0,3$; $\Phi_0=1$ рад.

Кривые 1, 4, 7 соответствуют значению $R_0=0,058$ м, $k=1/3$, для кривых 2, 5, 8: $k=2/3$, $R_0=0,060$ м, а кривым 3, 6, 9 соответствуют значения $k=1$, $R_0=0,062$ м.

Согласно формулам (3.7), в рамках поставленной первой основной задачи теории течения скорость v_+ перетекания частиц металла через линию $\varphi=\Phi_0$ в зону выпусков определяется не только угловой скоростью вращения валков ω и величинами

внешних напряжений $q_0^{(1)}$, $q_0^{(2)}$, которые по доступным измерениям величин u_+ , u_- можно найти из соотношений (3.9), но зависит, кроме того, еще и от неизвестного распределения бокового давления $q_0^{(3)}(x)$ вдоль линии $\varphi=\Phi_0$.

На фиг. 3 для приведенных значений параметров прокатки показаны зависимости величины $v_+/\omega R_*$ от безразмерной координаты $\bar{x}=x/l$ для частного случая $q_0^{(3)}=0$, при $q_0^{(1)}=q_0^{(2)}=0$. Кривые 1-4 рассчитаны для значений $k=1/3$; $2/3$; 1 ; $3/2$ и соответствуют, согласно кривым 1 на фиг. 2, а, б, значениям $u_-/\omega R_*=1,15$ и $u_+/\omega R_*=0,86$.

Построение общего решения для поперечной компоненты скорости течения металла и зависящих от нее образования разностенности и отхода металла от оправки в зоне выпусков потребует постановки всех трех основных задач теории течения [1] и их совместного исследования для всего очага деформации, включая зону выпусков, в которой металл в виде тонкой пластической оболочки течет в пространстве под действием растягивающих усилий со стороны переднего и заднего жестких концов трубы и сжимающих усилий со стороны металла, вытекающего из зоны обжатия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Вопросы теории течения пластического вещества по поверхностям. — ПММ, 1954, т. 18, вып. 3, с. 265—288.
2. Ильюшин А. А. Полная пластичность в процессах течения между жесткими поверхностями, аналогия с песчаной насыпью и некоторые приложения. — ПММ, 1955, т. 19, вып. 6, с. 693—713.
3. Арутюнов Ю. С. Прокатка тонкого листа. — Вестн. МГУ. Сер. математики, механики, астрономии, физики, химии, 1957, № 4, с. 17—28.
4. Арутюнов Ю. С., Гонор А. Л. Осаживание тонких поковок произвольной формы в плане. — Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1963, № 1, с. 166—171.
5. Кийко И. А. Теория пластического течения. М.: Изд-во МГУ, 1978. 76 с.
6. Ишлинский А. Ю. Прокатка и волочение при больших скоростях деформирования. — ПММ, 1943, т. 7, вып. 3, с. 226—230.

Москва

Поступила в редакцию
5.XI.1985

УДК 539.3

ТРЕХЭТАПНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

СЕРНИК И. Н.

Применение многосеточных итерационных методов является одним из перспективных путей повышения эффективности решения задач математической физики методом конечных элементов и методом конечных разностей. В [1, 2] строится алгоритм, в котором на мелкой сетке главным образом производится итерационное подавление составляющих погрешности, имеющих относительно малую длину волны,

соизмеримую с шагом сетки. Составляющие погрешности с большой длиной волны в основном подавляются на более грубой сетке. В итерационной схеме на последовательности сгущающихся сеток¹ реализуется многослойный итерационный процесс, основанный на неявном итерационном методе решения систем алгебраических уравнений с использованием спектрально эквивалентного оператора. Для решения системы уравнений, связанной с сеткой определенной густоты, в качестве спектрально эквивалентного применяется оператор, соответствующий предыдущей сетке в ряду сгущающихся сеток.

Для осуществления декомпозиции численного решения больших задач механики деформируемого твердого тела методом конечных элементов в [3] предложен многосеточный алгоритм, в котором выполняется непосредственное выделение местных деформаций и производится их итерационное взаимодействие с общими деформациями. Отличительной особенностью алгоритма итерационного взаимодействия местных и общих деформаций является то, что независимо от количества используемых сеток он не требует организации многоуровневых итерационных процедур. Это снимает вопрос о выборе соотношений между величинами достигаемых погрешностей определения неизвестных на итерационных циклах разных уровней. В данном алгоритме базис пространства аппроксимирующих функций строится поэтапно последовательным заданием дополняющих друг друга наборов базисных функций. Начиная со второго этапа, в узловых точках вновь вводимых базисных функций рассматриваются неизвестные, являющиеся местными перемещениями относительно перемещений узлов предыдущих этапов. Получающаяся при таком выборе неизвестных система алгебраических уравнений метода Рунге решается блочным методом Зейделя, который в данном случае имеет весьма высокую скорость сходимости. Для достижения удовлетворительной точности расчета дискретизированного тела, как правило, приходится выполнять всего 3-6 итераций. Каждая итерация этого вычислительного процесса требует решения нескольких систем уравнений с относительно малой шириной ленты [3, 4].

Общая структура формирования базиса, применяемая в алгоритме итерационного взаимодействия местных и общих деформаций, оказалась в определенной степени схожей со схемой задания базисных функций в адаптивном методе определения оптимальной густоты сетки конечных элементов [5]. Однако, в отличие от рассмотренных в [1-4] алгоритмов, указанный адаптивный процесс не находит решения задачи по мелкой сетке, а лишь производит некоторую корректировку результатов расчета по крупной сетке, не изменяя даже перемещений ее узловых точек.

В [4] продолжено изучение алгоритма итерационного взаимодействия местных и общих деформаций при двухэтапной аппроксимации перемещений, применение которой целесообразно прежде всего в случае, когда на одной или нескольких сравнительно небольших областях тела следует вводить сетку конечных элементов повышенной густоты. В публикуемой статье развивается вопрос об использовании этого алгоритма для задач, в которых мелкая сетка конечных элементов строится на всем теле или значительной его части. Данная проблема решается с помощью трехэтапной аппроксимации перемещений.

1. Сформулируем основы схемы поэтапных аппроксимаций функций [3, 4] для плоской и объемной задач линейной теории упругости в случае трехэтапной аппроксимации. Ограничимся рассмотрением симплексных базисных функций [6]. Представим функцию F^- , аппроксимирующую неизвестную функцию перемещений F , в виде

$$F^- = \sum_{j=1}^3 F_{j^-}$$

где каждая из функций F_{j^-} является линейной комбинацией базисных функций j -го этапа.

Функция F_{1^-} определяется на обычной сетке H_1 симплексных конечных элементов. При использовании в отдельности для решения задачи она должна быть относительно грубой аппроксимацией функции F . Функции F_{2^-} и F_{3^-} рассматриваются на дополнительных симплексных конечных элементах соответственно сеток H_2 и H_3 .

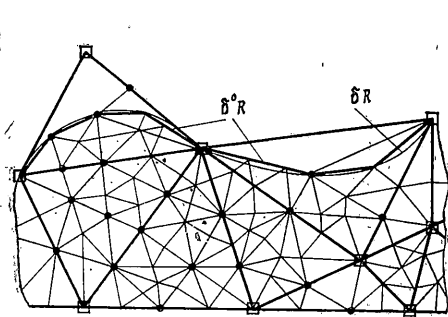
Далее введем следующие обозначения: R - множество точек тела (область определения F), R_j ($j=1, 2, 3$) - подобласть R , разбиваемая на конечные элементы сетки H_j с аппроксимацией границы подобласти ($R_1=R$; при $j=2, 3$ R_j может быть частью R); \bar{R}_j^- ($j=1, 2, 3$) - область определения F_{j^-} ; X_j ($j=1, 2, 3$) - множество узлов сетки H_j ; множество $Y_j = X_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} X_i$ ($j=2, 3$), $Y_1 = X_1$, δG - граница некоторой области G .

В схеме поэтапных аппроксимаций выполняются следующие условия:

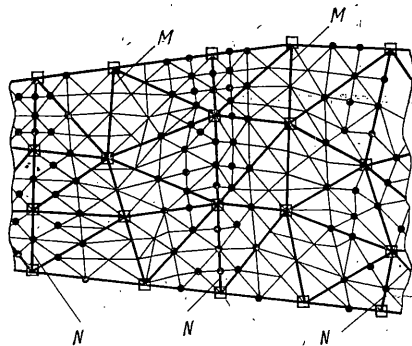
$$F_{j^-}(X_i) = 0 \quad (j=2, 3; i < j), \quad R_j^- \subset R_{i^-} \quad (j=2, 3) \quad (1.1)$$

Кроме того, при $i < j$ границы конечных элементов сетки H_i не пересекают конечные элементы сетки H_j ;

¹ Крамарева И. В., Лиликин С. В., Паутов А. Н. и др. Итерационная схема на последовательности сгущающихся сеток и вопросы ее реализации в двумерных задачах теории упругости. Горький, 1984.-43 с. Деп. в ВИНТИ 09.04.84; № 2133-84.



Фиг. 1



Фиг. 2

участки δR_j ($j=2, 3$), не лежащие на δR , аппроксимируются границами конечных элементов сеток предыдущих этапов, причем на этих участках сетка H_j не образует новых узлов;

если участок δR является также участком границ областей R_j нескольких этапов, то считается, что окончательную аппроксимацию границы тела на этом участке осуществляет сетка этапа с наибольшим номером (за пределами аппроксимированной границы тела $\delta^\circ R$ энергия деформации не вычисляется ни в одном из этапов);

в узлах Y_1 и Y_2 , лежащих за пределами $\delta^\circ R$, базисные функции не рассматриваются.

Для плоской задачи теории упругости пример построения сеток H_j приведен на фиг. 1. Жирными линиями показаны $\delta^\circ R$ и отрезки прямой, образующие сетку H_1 . При построении сетки H_2 дополнительно вводятся ряд отрезков, соединяющих узлы Y_2 между собой и с узлами Y_1 , сетки H_3 — ряд отрезков, соединяющих между собой узлы Y_3 и узлы Y_3 с узлами Y_1 и Y_2 .

Заметим, что выражение (1.1) является достаточным условием линейной независимости базисных функций.

Сопоставим аппроксимацию функции F в схеме поэтапных аппроксимаций и с помощью обычного метода конечных элементов на сетке S , построенной в пределах аппроксимированной границы тела на границах конечных элементов всех трех этапов. Из принятых в схеме поэтапных аппроксимаций условий образования базиса вытекает, что в пределах $\delta^\circ R$ функция F (для каждой из двух или трех функций перемещений) непрерывна и на областях отдельных конечных элементов сетки S изменяется по линейному закону. Следовательно, аппроксимация перемещений в алгоритме итерационного взаимодействия местных и общих деформаций по сравнению с обычным методом конечных элементов при одинаковом учете кинематических граничных условий отличается только выбором базиса. Так как в методе Ритца минимизирующая функция не зависит от выбора базиса [7], решение задачи на основе схемы поэтапных аппроксимаций должно совпадать (без учета погрешностей вычислений) с решением этой задачи с помощью обычной процедуры метода конечных элементов на сетке S .

2. Для достижения эффективной декомпозиции будем представлять R_j^- ($j=2, 3$) в виде суммы l_j линейно связанных множеств L_{jt} :

$$R_j^- = \bigcup_{t=1}^{l_j} L_{jt} \quad (2.1)$$

выполняя условие, чтобы каждое множество L_{jt} состояло из группы конечных элементов этапа j и ни одна узловая точка, входящая в Y_j , не принадлежала более чем одному из множеств L_{jt} .

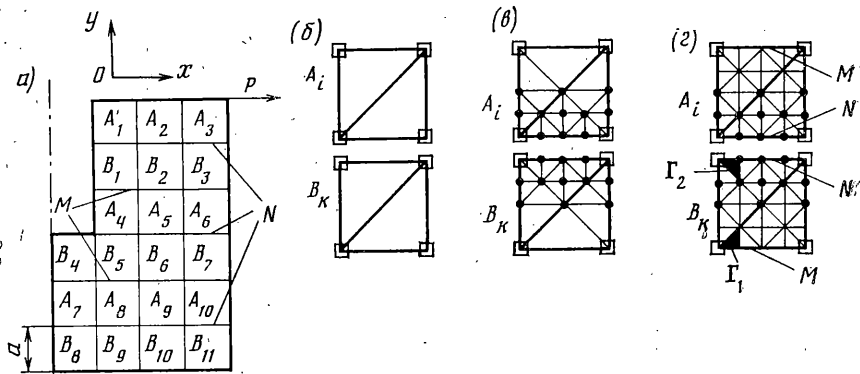
Пример образования областей L_{jt} в плоской задаче теории упругости показан на фиг. 2. Области L_{2t} отделяются линиями M , области L_{3t} — линиями N . На линиях M расположены только узлы Y_1 и Y_3 , на линиях N — только узлы Y_1 и Y_2 .

В результате систему разрешающих уравнений метода Ритца можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

где K_{im} ($i, m=1, 2, 3$) — подматрица общей матрицы системы уравнений, причем K_{jj} ($j=1, 2, 3$) — обычная матрица жесткости метода конечных элементов, построенная с учетом выражения (1.1) на сетке конечных элементов H_j ; δ_j ($j=1, 2, 3$) — вектор значений F_j^- в узлах Y_j для всех перемещений, рассматриваемых в задаче; P_j ($j=1, 2, 3$) — вектор компонентов правых частей уравнений, вычисляемых в соответствии с процедурой метода Ритца с помощью базисных функций этапа j для узлов Y_j .

Ленточная матрица K_{11} имеет относительно невысокий порядок, потому что строится для грубой сетки конечных элементов. Так как множества L_{jt} ($j=2, 3$;



Фиг. 3

$t=1, 2, \dots, l_j$) этапа j не имеют общих узловых точек Y_j , матрицы K_{jj} ($j=2, 3$) являются блочно-диагональными. В матрицы K_{jj} входят по l_j расположенных по диагонали ленточных подматриц $K_{jj,t}$ ($t=1, 2, \dots, l_j$), представляющих собой матрицы жесткости, построенные на конечных элементах множеств L_{j1} .

В алгоритме итерационного взаимодействия местных и общих деформаций система уравнений (2.2) решается блочным методом Зейделя по следующей схеме (s — номер итерации):

$$K_{11}\delta_1^{(s)} = P_1 - K_{12}\delta_2^{(s-1)} - K_{13}\delta_3^{(s-1)} \quad (2.3)$$

$$K_{22}\delta_2^{(s)} = P_2 - K_{21}\delta_1^{(s)} - K_{23}\delta_3^{(s-1)}, \quad K_{33}\delta_3^{(s)} = P_3 - K_{31}\delta_1^{(s)} - K_{32}\delta_2^{(s)}$$

При обеспечении в расчетной схеме кинематической неизменяемости тела итерационный процесс (2.3) сходится, так как квадратичная форма матрицы системы уравнений (2.2), выражающая удвоенную энергию деформации дискретизированного объекта [7], является положительно-определенной.

Отметим, что целесообразно до проведения итерационного процесса один раз за время решения задачи выполнять треугольное разложение ленточных матриц K_{11} , K_{jj} ($j=2, 3$; $t=1, 2, \dots, l_j$). Для вычисления правых частей уравнений (2.3) можно формировать матрицы K_{im} ($i \neq m$), используя только матрицы упругости и деформаций [8] конечных элементов сеток H_j ($j=1, 2, 3$).

3. Расчеты на ЭВМ задач плоского напряженного состояния теории упругости на основе алгоритма итерационного взаимодействия местных и общих деформаций при трехэтапной аппроксимации перемещений показали быструю сходимость итерационного процесса (2.3). В одном из примеров рассматривалась половина симметричной изотропной пластины (фиг. 3), закрепленной на плоскости статически определенными связями. Пластина симметрично нагружена двумя сосредоточенными силами P . Коэффициент Пуассона материала равен 0,3, толщина пластины h . Сетки H_j ($j=1, 2, 3$) образованы системой одинаковых квадратных блоков A_i ($i=1, 2, \dots, 10$) и одинаковых квадратных блоков B_k ($k=1, 2, \dots, 11$), расположенных согласно фиг. 3, а. На фиг. 3, б для блоков A_i и B_k показана сетка H_1 , на фиг. 3, в — сетки H_1 и H_2 , на фиг. 3, г — сетки H_1 , H_2 и H_3 .

Скорость сходимости итерационного решения этой задачи проиллюстрирована ниже, где приведены результаты расчета нормальных напряжений по оси $x\sigma_x$ в области r_1 блока B_8 и области r_2 блока B_4 в зависимости от номера итерации s (указаны значения безразмерной величины $\sigma_x^0 = \sigma_x ah/P$):

s	1	2	3	4	5	6	7	8
r_1	-2,08	-2,55	-2,64	-2,66	-2,66	-2,65	-2,65	-2,65
r_2	2,28	2,87	3,07	3,16	3,20	3,22	3,23	3,24

В начальном приближении значения неизвестных системы уравнений принимались равными нулю. Видно, что для практических целей в данном примере достаточно выполнить только 5–6 итераций.

Принятые в схеме поэтапных аппроксимаций условия образования базиса таковы, что неизвестные δ_2 фактически являются местными перемещениями относительно перемещений узлов Y_1 , а неизвестные δ_3 — местными перемещениями относительно перемещений узлов Y_1 и Y_2 . Сравнительно слабое влияние местных деформаций на общие и обеспечивает быструю сходимость итераций.

Разделение деформаций на общие и местные и выполнение их итерационного взаимодействия позволит эффективно осуществлять сведение расчетов по методу конечных элементов широкого круга больших задач механики деформируемого твердого тела к решению нескольких относительно малых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоренко Р. П. Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений. — Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1961, т. 1, № 5, с. 922—927.
2. Федоренко Р. П. О скорости сходимости одного итерационного процесса. — Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1964, т. 4, № 3, с. 559—564.
3. Серник И. Н. О введении поэтапных аппроксимаций для расчета вагонных конструкций по методу конечных элементов. — В кн.: Вопросы строительной механики кузовов вагонов. Брянск: Изд-е Брянск. ин-та трансп. машиностроения, 1983, с. 133—144.
4. Серник И. Н. Некоторые вопросы исследования скорости сходимости алгоритма поэтапных аппроксимаций. — Строит. механика и расчет сооружений, 1985, № 5, с. 14—15.
5. Gago S. R. de J. P., Kelly D. W., Zienkiewicz O. C., Babuska I. A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method: Pt II-Adaptive mesh refinement. — Intern. J. Numer. Methods Eng., 1983, v. 19, No. 11, p. 1621—1656.
6. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.
7. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 349 с.
8. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.

Брянск

Поступила в редакцию
24.VI.1985

УДК 539.4

ОБЪЕКТИВНАЯ ПРОЧНОСТЬ МАТЕРИАЛА И ЕЕ ИЗМЕНЕНИЕ ПРИ ДЛИТЕЛЬНОМ ЗАГРУЖЕНИИ

РЖАНИЦЫН А. Р.

Понятие об объективной прочности материала как функции времени дано в [1], а также использовано без введения этого термина в [2, 3], где впервые был введен критерий прочности, заключающийся в том, что разрушение наступает в момент, когда напряжения от нагрузки становятся равными объективной прочности. Объективная прочность не всегда может быть выявлена прямыми испытаниями материала, и существование ее, так же как и зависимость от режима нагружения, должны быть постулированы. В упомянутых работах эта зависимость предложена в виде (точкой обозначена производная по времени):

$$\dot{r} = \Phi(\sigma, r) \quad (1)$$

с критерием разрушения, соответствующим достижению в некоторый момент времени равенства

$$\sigma = r \quad (2)$$

где r — объективная прочность, σ — напряжение, вызываемое нагрузкой.

Функция $\Phi(\sigma, r)$ в [1] предложена в виде

$$\Phi(\sigma, r) = -A\sigma^n \exp\{-\beta(r-\sigma)\} \quad (3)$$

где A , n и β — некоторые постоянные величины, определяемые из условия наилучшего приближения к экспериментальным данным. Вид функции Φ (3) определяется тем, что скорость изменения r должна быть отрицательна и тем больше по абсолютной величине, чем меньше разность $r-\sigma$, т. е. чем меньше мгновенный резерв прочности материала. Множитель σ^n вводится для выполнения условия $\dot{r}=0$ при $\sigma=0$.

Уравнение (1) с функцией $\Phi(\sigma, r)$ (3) может быть проинтегрировано и примет вид

$$r = \beta^{-1} \ln \left[-A\beta \int_0^t \sigma^n e^{\beta\sigma} dt + e^{\beta r_0} \right] \quad (4)$$

где r_0 — начальная объективная прочность при $t=0$. Положив $\sigma = \text{const}$, из (4) получим $r = [\ln(C_1 - C\beta t)]/\beta$, $C_1 = e^{\beta r_0}$, $C = A\sigma^n e^{\beta\sigma}$, и с учетом (2) найдем уравнение кривой длительной прочности материала, представляющей собой зависимость от σ времени t_g разрушения материала:

$$\begin{aligned} \beta\sigma &= \ln(C_1 - C\beta t_g), & e^{\beta\sigma} &= C_1 - C\beta t_g \\ t_g &= (C_1 - e^{\beta\sigma})/C\beta = \{\exp[\beta(r_0 - \sigma)] - 1\}/(A\sigma^n\beta) \end{aligned} \quad (5)$$

В [4] предложена в качестве функции $\Phi(\sigma, r)$ зависимость $\Phi = r_0(\sigma/r)^m/A$, которая при $A=0,9$ сут, $m=49$ дала хорошее совпадение кривой длительной прочности с предложенной ранее для бетона эмпирической зависимостью $\sigma/r_0 = 0,92 - 0,04 \log t_g$.

Более общий вид функции Φ , допускающий интегрирование уравнения (1), бу-