

**ПРОКАТКА ТОНКОСТЕННЫХ ТРУБ НА ГЛАДКОЙ ОПРАВКЕ  
В ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КАЛИБРАХ**

ФОМИН Л. Ф.

Теория течения тонкого слоя пластического вещества по поверхностям [1, 2] применялась в работах [3–5] для исследования технологических процессов, в которых внутренние движения тел инструмента либо одинаковы [3], либо отсутствуют совсем [4, 5]. Контур области течения предполагался либо свободным от нагрузки, либо образованным пазом в теле инструмента.

В данной работе теория течения [1] применяется к исследованию процесса продольной прокатки тонкостенных труб. Характерные отличия такого процесса заключаются в действии на границах области течения заранее неизвестных нагрузок, а также в том, что окружная линейная скорость точек поверхности вала переменна по ширине калибра. Получение уравнений, описывающих процесс продольной прокатки труб, оказывается возможным в предположении, что оправку можно считать гладкой.

На основании решения полученных уравнений выведено условие, обеспечивающее отсутствие в очаге деформации участков прилипания, и приведены аналитические выражения, позволяющие оценить недоступные для измерения напряжения на передней и задней границах очага деформации через такие доступные измерению величины, как скорости прокатываемой трубы на входе и выходе из калибров. Для области, прилегающей к вершине калибра, полученные результаты позволяют установить связь с исследованиями по прокатке тонкого листа с учетом натяжений [6].

**1. Постановка задачи.** Пластическое вещество в виде тонкостенной трубы начальной толщины  $h_0$  и внешнего радиуса  $R_0$  прокатывается на недеформируемой цилиндрической оправке радиуса  $r$  в эллиптических калибрах двух жестких валков, вращающихся в разные стороны с угловой скоростью  $\omega$  (фиг. 1). Поверхность оправки покрыта слоем смазки и считается гладкой. Первоначальный зазор между заготовкой и оправкой не учитывается. Скорость  $u_+$  трубы на входе в калибры и скорость  $u_-$  на выходе из калибров считаются известными (доступными измерению датчиками).

Для зоны обжатия стенки трубы ставится первая основная задача теории течения тонкого слоя пластического вещества по поверхностям [1, 2]. Через  $x, \varphi$  обозначаются ортогональные, криволинейные координаты на поверхности оправки. Координатная линия  $x$  направлена по меридиану цилиндра против направления прокатки, отсчет ведется от плоскости, проходящей через оси валков. Координатная линия  $\varphi$  — параллель цилиндра, отсчет ведется от вершины калибра к зоне выпусков. Половина угла охвата обозначается  $\varphi_0$ . Зона обжатия стенки трубы одним из валков ограничена контуром  $\Gamma$ :  $0 \leq x \leq l$ ,  $-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ . В силу симметрии рассматривается область  $\varphi \geq 0$ .

Длина зоны обжатия определяется выражением  $l = [2R_*(R_0 - b)]^{1/2}$ , где  $R_*$  — минимальный радиус вала в вершине калибра,  $b$  — высота эллиптического калибра, представляющая собой малую полуось.

Отрезок нормали к основной поверхности до пересечения с поверхностью вала определяет текущую толщину слоя  $h(x, \varphi)$ . Заменяя тороидальную поверхность вала линейчатой поверхностью, для текущей толщины слоя принимаем выражение

$$h(x, \varphi) = b(l - x)(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} / l + R_0 x / l - r$$

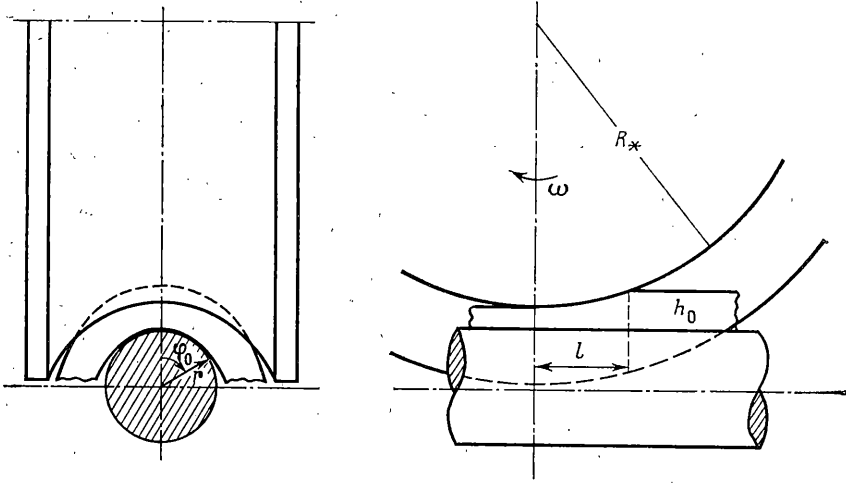
где  $\varepsilon$  — эксцентриситет эллиптического калибра. Величина  $\varepsilon^2$  достаточно мала ( $\varepsilon^2 < 0,1$ ) и принимается за малый параметр. Вводя обозначения  $\lambda = (R_0 - b)/l$ ,  $a = (b - r)/\lambda$ , представим текущую толщину слоя в виде ряда по  $\varepsilon^2$ :

$$h(x, \varphi) = \lambda(x + a) + \frac{\varepsilon^2 b(l - x)}{2l} \sin^2 \varphi + \frac{\varepsilon^4 b(l - x)}{8l} \sin^4 \varphi + \dots \quad (1.1)$$

Со стороны гладкой оправки на слой действует лишь сила нормального давления  $p(x, \varphi)$ . Со стороны вала кроме нормального давления на слой действует также касательное напряжение трения  $\tau(p)$ . Учитываются две области: область кулонова трения, где сила трения меньше предела текучести на сдвиг и определяется законом Кулона  $\tau(p) = \mu p$  ( $\mu$  — коэффициент трения скольжения), и область сухого трения, где сила трения равна пределу текучести пластического вещества на сдвиг:  $\tau(p) = \tau_s = \sigma_s / \sqrt{3}$  ( $\sigma_s$  — предел текучести материала на растяжение). Сила контактного трения  $\tau(p)$  направлена в сторону, противоположную направлению относительной скорости скольжения частиц слоя по поверхности вала.

На контуре  $\Gamma$  нормальное контактное давление  $p(x, \varphi)$  удовлетворяет граничным условиям:  $p = q_0^{(j)}(x, \varphi) + \sigma_s$  ( $j = 1, 2, 3$ ), где  $q_0^{(1)}(\varphi)$ ,  $q_0^{(2)}(\varphi)$  — натяжение (или подпор) со стороны переднего и заднего жестких концов трубы, соответственно, на передней ( $x = 0$ ) и задней ( $x = l$ ) границах зоны обжатия,  $q_0^{(3)}(x)$  — нагрузка на слой на боковой границе  $\varphi = \varphi_0$  со стороны пластического вещества, находящегося в зоне выпусков. В угловых точках контура  $\Gamma$  должны выполняться условия сопряжения

$$q_0^{(3)}(0) = q_0^{(4)}(\varphi_0), \quad q_0^{(3)}(l) = q_0^{(2)}(\varphi_0) \quad (1.2)$$



Фиг. 1

Введем обобщенное давление  $Z(x, \varphi)$ , связанное с нормальным контактным давлением  $p(x, \varphi)$  формулой

$$Z = \int_{q_0 + \sigma_s}^p \frac{dp}{\tau(p)}$$

Вследствие математической идеализации процесса прокатки поверхность контактного давления  $p(x, \varphi)$  будет иметь резко выраженные ребра, следы которых на основной поверхности разделяют зону обжатия на три области гладкости, примыкающие соответственно к передней, задней и боковой границам контура  $\Gamma$ . Введем вспомогательную функцию внешнего напряжения  $\delta^{(j)} = 1 + q_0^{(j)}/\sigma_s$  и выразим контактные давления  $p_-^{(j)}$  в зоне кулонова трения и контактные давления  $p_+^{(j)}$  в зоне сухого трения через обобщенное давление  $Z(x, \varphi)$  в каждой из областей гладкости ( $j=1, 2, 3$ ) следующими формулами:

$$p_-^{(j)}(x, \varphi) = \delta^{(j)} \sigma_s \exp(\mu Z), \quad p \leq \tau_s/\mu \quad (1.3)$$

$$p_+^{(j)}(x, \varphi) = \tau_s [1 + \ln(\delta^{(j)} \sqrt{3} \mu) + \mu Z]/\mu, \quad p > \tau_s/\mu \quad (1.4)$$

Считая, что характерный размер  $L_0$  области течения значительно превосходит начальную толщину трубы  $h_0$ , и принимая остальные гипотезы теории течения тонкого слоя пластического вещества по поверхностям [1, 2], для определения обобщенного давления  $Z(x, \varphi)$  и компонент  $u(x, \varphi)$ ,  $v(x, \varphi)$  средней по толщине скорости течения по координатным линиям  $x, \varphi$  при прокатке тонкостенной трубы на гладкой оправке в эллиптических калибрах с точностью до величин  $h_0/L_0$  в сравнении с единицей получим следующие уравнения:

$$(\partial Z/\partial x)^2 + (\partial Z/\partial \varphi)^2/r^2 = h^{-2}(x, \varphi) \quad (1.5)$$

$$\partial(uh)/\partial x + \partial(vh)/r\partial\varphi = 0 \quad (1.6)$$

$$v\partial Z/\partial x = \{u + \omega[R_* + b(1 - (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} \cos \varphi)]\} (\partial Z/\partial \varphi)/r \quad (1.7)$$

Скорости течения металла определяются из уравнений (1.6), (1.7) после нахождения значений обобщенного давления из (1.5). Неизвестные функции  $Z, u, v$  будем искать в виде разложения в ряд по степеням малого параметра  $\varepsilon^2$ .

**2. Распределение обобщенного и контактных давлений.** Обобщенное давление  $Z(x, \varphi)$  удовлетворяет уравнению (1.5) и нулевым граничным условиям. Решение будем искать в виде разложения в ряд по степеням малого параметра  $\varepsilon^2$ :

$$Z(x, \varphi) = Z_1 + \varepsilon^2 Z_2 + \varepsilon^4 Z_3 + \dots \quad (2.1)$$

Подставляя (2.1) и (1.4) в уравнение (1.5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , для определения последовательных приближений  $Z_1, Z_2, \dots$  получим следующие уравнения (приведены только первые два уравнения):

$$(\partial Z_1/\partial x)^2 + (\partial Z_1/\partial \varphi)^2/r^2 = [\lambda(x+a)]^{-2} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial Z_1}{\partial x} \frac{\partial Z_2}{\partial x} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial Z_1}{\partial \varphi} \frac{\partial Z_2}{\partial \varphi} = - \frac{b(1-x) \sin^2 \varphi}{2\lambda(x+a)} \left[ \left( \frac{\partial Z_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z_1}{r \partial \varphi} \right)^2 \right] \quad (2.3)$$

Все последовательные приближения  $Z_i$  удовлетворяют нулевым граничным условиям.

Решая уравнение (2.2) одним из методов [3-5], для первого приближения  $Z_1(x, \varphi)$  в областях гладкости 1, 2, 3 получим

$$Z_1^{(1)} = \ln(1+x/a)/\lambda, \quad Z_1^{(2)} = \ln[(l+a)/(x+a)]/\lambda \quad (2.4)$$

$$Z_1^{(3)} = \ln\{[r(\varphi_0-\varphi) + [(x+a)^2 + r^2(\varphi_0-\varphi)^2]^{1/2}]/(x+a)\}/\lambda \quad (2.5)$$

Подставляя найденные значения обобщенного давления из (2.4) в (2.3), видим, что в областях 1 и 2 получающиеся уравнения для  $Z_2^{(1)}$  и  $Z_2^{(2)}$  непосредственно интегрируются и после удовлетворения нулевых граничных условий имеем

$$Z_2^{(1)} = b \sin^2 \varphi \{ \ln(1+x/a) - x(l+a)/[a(x+a)] \} / (2\lambda^2 l) \quad (2.6)$$

$$Z_2^{(2)} = b \sin^2 \varphi \{ \ln[(l+a)/(x+a) - (l-x)/(x+a)] \} / (2\lambda^2 l)$$

Учитывая известное соотношение  $\ln(1+y) < y$ , заключаем, что  $Z_2^{(1)} \leq 0$ ,  $Z_2^{(2)} \leq 0$ .

Для области 3 после подстановки (2.5) в (2.3) для определения  $Z_2^{(3)}$  получаем линейное неоднородное уравнение в частных производных первого порядка

$$r(\varphi_0-\varphi) \partial Z_2^{(3)} / \partial x + (x+a) (\partial Z_2^{(3)} / \partial \varphi) / r = \\ = b(l-x) \sin^2 \varphi [(x+a)^2 + r^2(\varphi_0-\varphi)^2]^{1/2} / [2\lambda^2 l(x+a)]$$

которому соответствует система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{r(\varphi_0-\varphi)} = \frac{r d\varphi}{x+a} = \frac{2\lambda^2 l(x+a) dZ_2^{(3)}}{b(l-x) \sin^2 \varphi [(x+a)^2 + r^2(\varphi_0-\varphi)^2]^{1/2}} \quad (2.7)$$

Один первый интеграл находится непосредственно

$$\Psi_1 = (x+a)^2 + r^2(\varphi_0-\varphi)^2 = C^2 \quad (2.8)$$

Выразив  $x$  из (2.8) и подставив в (2.7), убеждаемся, что система (2.7) сводится к одному обыкновенному дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными, из которого  $Z_2^{(3)}$  находится в квадратурах

$$Z_2^{(3)} = C_1 + bC / (2\lambda^2 l) \int \{ (l-a) - [C^2 - r^2(\varphi_0-\varphi)^2]^{1/2} \} [C^2 - r^2(\varphi_0-\varphi)^2]^{-1/2} (\sin \varphi)^2 r d\varphi$$

Погрешность вычислений не превысит величины  $h_0/L_0$ , если в подынтегральном выражении сделать замену  $\sin^2 \varphi = \varphi^2$ . Производя необходимые вычисления, заменяя постоянную  $C$  ее значением из (2.8) и определив затем постоянную  $C_1$  из граничного условия  $Z_2^{(3)} = 0$  при  $\varphi = 0$ , можно получить значение  $Z_2^{(3)}(x, \varphi)$ . Поскольку в дальнейшем выражение для  $Z_2^{(3)}$  не будет использоваться, его здесь не выписываем.

Ограничиваясь двумя приближениями, выражения для нормальных контактных давлений  $p^{(j)}(x, \varphi)$  в каждой из областей гладкости можно получить подставляя в формулы (1.3), (1.4) соотношение (2.4), в котором отброшены третьи и более высокие приближения, а  $Z_1^{(j)}$  и  $Z_2^{(j)}$  заменены полученными значениями.

Границы между зонами кулонова и сухого трения в каждой области гладкости находятся из условия  $p = \tau_s/\mu$ . Следы ребер поверхности контактного давления  $p(x, \varphi)$  (т. е. границы областей гладкости) определяются из уравнений

$$p^{(1)} = p^{(2)}, \quad p^{(1)} = p^{(3)}, \quad p^{(2)} = p^{(3)} \quad (2.9)$$

Введем коэффициент максимального обжатия стенки трубы в вершине калибра  $k = (R_0 - b)/(b - r) = l/a$  и используем обозначения

$$\alpha = (l+a)/(\delta^{(2)}/\delta^{(3)})^{\lambda/\mu}, \quad \beta = a(\delta^{(1)}/\delta^{(3)})^{-\lambda/\mu} \quad (2.10)$$

Анализ уравнений (2.9) показывает, что при выполнении условия

$$2r\varphi_0 \geq \alpha - \beta = l[(1+k)(\delta^{(2)}/\delta^{(3)})^{\lambda/\mu} - (\delta^{(1)}/\delta^{(3)})^{-\lambda/\mu}]/k \quad (2.11)$$

все три области гладкости соприкасаются на линии  $\varphi = 0$  в одной точке  $x = x_*$ , определяемой соотношением  $x = x_* = \sqrt{\alpha\beta} - l/k = l[(1+k)^{1/2}(\delta^{(2)}/\delta^{(1)})^{\lambda/2\mu} - 1]/k$ . Если  $2r\varphi_0 < \alpha - \beta$ , то области 1, 2 не соприкасаются между собой, следы ребер пересекают линию  $\varphi = 0$  в двух точках, так что имеется участок сцепления в вершине калибра. При прокатке труб появление зон прилипания нежелательно и его следует избегать. Используя введенное выше выражение для длины зоны обжатия, из (2.11) получаем следующее соотношение между основными параметрами прокатки, при выполнении которого в очаге деформации не появляется участков прилипания:  $R_* \leq$

$\leq 2(kr\varphi_0)^2 [(1+k)(\delta^{(2)}/\delta^{(3)})^{\lambda/\mu} - (\delta^{(1)}/\delta^{(3)})^{-\lambda/\mu}]^{-2}/(R_0-b)$ . Считая, что это условие выполнено, в дальнейшем будем рассматривать только случай  $2r\varphi_0 \geq \alpha - \beta$ , при котором на линии  $\varphi=0$  имеется лишь одна точка сцепления  $x=x_*$ , в которой продольная компонента  $u$  скорости течения пластического вещества равна окружной скорости точек поверхности вала в вершине калибра.

**3. Определение скоростей течения.** Компоненты  $u, v$  скорости течения пластического вещества в зоне обжатия стенки трубы удовлетворяют уравнениям (1.6), (1.7) и граничным условиям

$$\begin{aligned} u|_{x=l} = -u_+, \quad u|_{x=0} = -u_-, \quad u(x_*, 0) = -\omega R_* \\ v|_{x=0} = v|_{x=l} = v|_{\varphi=0} = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Неизвестные функции  $u^{(j)}(x, \varphi)$ ,  $v^{(j)}(x, \varphi)$  будем искать в виде разложения в ряд по степеням малого параметра  $\varepsilon^2$ :

$$u^{(j)} = u_1^{(j)} + \varepsilon^2 u_2^{(j)} + \dots, \quad v^{(j)} = v_1^{(j)} + \varepsilon^2 v_2^{(j)} + \dots \quad (3.2)$$

Для каждого последовательного приближения уравнения границ между областями гладкости имеют различные выражения. При этом оказывается, что функции внешнего напряжения имеют самостоятельные значения для каждого приближения. В первом приближении границами областей 1-3 и 2-3 в плоскости переменных  $(x, r\varphi)$ , представляющей собой развертку основной цилиндрической поверхности, будут кривые

$$r\varphi = r\varphi_0 + 1/2\beta^{-1/2}(x+a)^2/\beta, \quad r\varphi = r\varphi_0 - 1/2\alpha + 1/2(x+a)^2/\alpha \quad (3.3)$$

которые пересекаются в точке  $(x_*, r\varphi_0 - 1/2(\alpha - \beta))$ . Области 1, 2 соприкасаются вдоль отрезка  $[0, r\varphi_0 - 1/2(\alpha - \beta)]$  прямой  $x = \sqrt{\alpha\beta} - l/k$ .

Во втором приближении все три области соприкасаются в точке  $(x_*, 0)$ , а уравнения границ между областями 1-3 и 2-3, согласно (2.9), могут быть записаны только в неявном виде.

Учитывая, что наибольший интерес при прокатке труб представляет исследование скоростей прокатываемой трубы на входе в калибры и на выходе из калибров, в областях 1 и 2 вычислим значение продольной компоненты  $u$  с учетом двух приближений, а в области 3 ограничимся вычислением только первого приближения поперечной компоненты  $v$ .

Для определения первого приближения  $u_1^{(j)}$ ,  $v_1^{(j)}$  имеем следующую систему уравнений и граничных условий:

$$\begin{aligned} \partial u_1^{(j)} / \partial x + \partial v_1^{(j)} / r \partial \varphi = -u_1^{(j)} / (x+a) \\ v_1^{(j)} \partial Z_1^{(j)} / \partial x = \{u_1^{(j)} + \omega[R_* + b(1 - \cos \varphi)]\} \partial Z_1^{(j)} / r \partial \varphi \\ u_1^{(1,2)}(x_*, 0) = -\omega R_*, \quad v_1^{(1)}|_{x=0} = v_1^{(2)}|_{x=l} = v_1^{(1,2)}|_{\varphi=0} = 0 \\ v_1^{(3)} = v_1^{(1)}, \quad r\varphi = r\varphi_0 + 1/2\beta^{-1/2}(x+a)^2/\beta, \quad 0 \leq x \leq x_* \\ v_1^{(3)} = v_1^{(2)}, \quad r\varphi = r\varphi_0 - 1/2\alpha + 1/2(x+a)^2/\alpha, \quad x_* \leq x \leq l \end{aligned} \quad (3.5)$$

Решая уравнения (3.4) с учетом (3.5) и (2.4), (2.5), получим в первом приближении следующие значения  $u, v$  в областях 1 и 2:

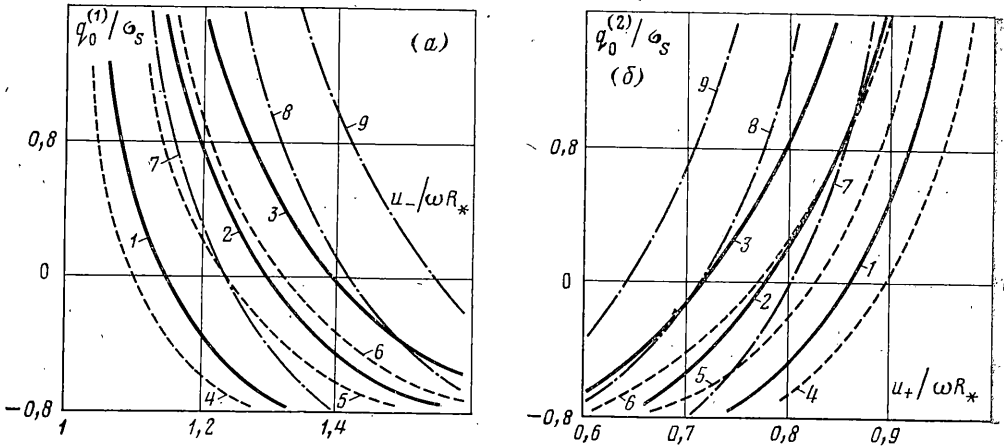
$$u_1^{(1,2)} = -\omega R_* \sqrt{\alpha\beta} / (x+a), \quad v_1^{(1,2)} = 0 \quad (3.6)$$

Для области 3 с погрешностью, не превышающей величины  $h_0/L_0$ , выпишем значение  $v_+$  скорости перетекания металла из зоны обжатия в зону выпусков через боковую границу  $\varphi = \varphi_0$ :

$$\begin{aligned} v_+ = \omega b(x+a) [\beta^2 - (x+a)^2] / 8r^2\beta + \omega \{R_* + 1/4br^{-2}[2(r\varphi_0)^2 + 1/4\beta^{-2}((x+a)^2 + \beta^2)]\} \times \\ \times \arcsin [((x+a)^2 - \beta^2) / ((x+a)^2 + \beta^2)] \quad (0 \leq x \leq x_*) \\ v_+ = \omega b(x+a) [(x+a)^2 - \alpha^2] / 8r^2\alpha + \omega \{R_* + 1/4br^{-2}[2(r\varphi_0)^2 + 1/4\alpha^{-2}((x+a)^2 + \alpha^2)]\} \times \\ \times \arcsin [(\alpha^2 - (x+a)^2) / (\alpha^2 + (x+a)^2)] \quad (x_* \leq x \leq l) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Граничные условия (3.5) при этом выполняются, поскольку из (2.10) и условий сопряжения (1.2) следует, что в угловых точках  $(0, \varphi_0)$ ,  $(l, \varphi_0)$  соответственно  $\beta = a$ ,  $\alpha = l + a$ .

Для определения значений  $u_2^{(1)}$ ,  $u_2^{(2)}$ , используя (2.6), (3.1), (3.6), из уравнений



Фиг. 2

(1.6), (1.7) получаем следующие уравнения и граничные условия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x + u_2^{(1)}} / (x+a) = -\omega A \sqrt{\alpha\beta} \sin^2 \varphi / (x+a)^3 - \\ -\omega B \{ (x+a) \ln [ (x+a)/a ] - x(l+a)/a \} [ D(\varphi) - 2R_* \sqrt{\alpha\beta} \cos 2\varphi / (x+a) ] \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x + u_2^{(2)}} / (x+a) = -\omega A \sqrt{\alpha\beta} \sin^2 \varphi / (x+a)^3 - \\ -\omega B \{ (x+a) \ln [ (l+a)/(x+a) + x-l \} [ D(\varphi) - 2R_* \sqrt{\alpha\beta} \cos 2\varphi / (x+a) ] \end{aligned}$$

$$u_2^{(1)}(x_*, 0) = 0, \quad u_2^{(2)}(x_*, 0) = 0$$

$$A = bR_*(l+a)/(2\lambda l), \quad B = b/(2r^2\lambda l)$$

$$D(\varphi) = b \sin \varphi \sin 2\varphi + 2[R_* + b(1 - \cos \varphi)] \cos 2\varphi$$

Принтегрировав уравнения (3.8), можно получить значения  $u_2^{(1)}(x, \varphi)$ ,  $u_2^{(2)}(x, \varphi)$ . Не выписывая здесь получающиеся довольно громоздкие выражения, отметим, что, подставив в (3.2) полученные значения при  $x=0$  и  $x=l$ , вместе с соот-

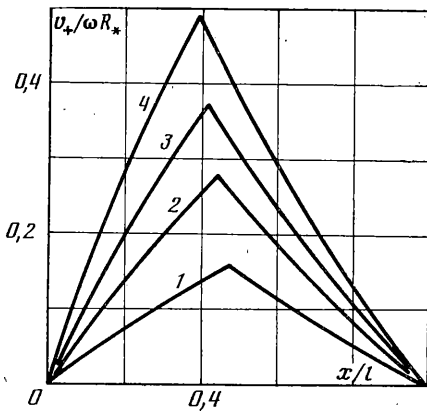
ветствующими значениями  $u$  (из (3.6) можно получить с учетом двух приближений значения скоростей прокатываемой трубы на входе в калибры  $u_+$  и на выходе из калибров  $u_-$ . Из механического смысла процесса прокатки и граничных условий (3.1) следует, что скорости прокатываемой трубы на передней ( $x=0$ ) и задней ( $x=l$ ) границах зоны обжатия должны быть постоянны по всему периметру трубы.

Анализ полученных результатов показывает, что для удовлетворения указанного требования в первом приближении внешние напряжения не зависят от  $\varphi$ , но с учетом двух приближений оказываются сложными функциями координаты  $\varphi$ :  $q_0^{(j)} = q_0^{(j)}(\varphi)$  ( $j=1, 2$ ).

Численный анализ, однако, показывает, что погрешность не превысит величины  $h_0/L_0$ , если с учетом двух приближений внешние

напряжения  $q_0^{(1)}$ ,  $q_0^{(2)}$  считать постоянными при  $-\varphi_0 < \varphi < \varphi_0$  и равными их значению в вершине калибра:  $q_0^{(1)}(\varphi) = q_0^{(1)}(0) = q_0^{(1)}$ ,

$q_0^{(2)}(\varphi) = q_0^{(2)}(0) = q_0^{(2)}$ . С учетом принятой



Фиг. 3

гипотезы получаем следующие зависимости между скоростями прокатки  $u_-$ ,  $u_+$  и величиной  $\xi = \delta^{(1)}/\delta^{(2)} = (q_0^{(1)} + \sigma_S)/(q_0^{(2)} + \sigma_S)$ :

$$\begin{aligned} u_-/(\omega R_*) &= (1+k)^{1/2} \xi^{-\lambda/2\mu} - \varepsilon^2 bl \{1/18(1+k)^{3/2} [3\lambda(\ln \xi)/\mu - 3 \ln(1+k) + \\ &+ 6k + 11] \xi^{-3\lambda/2\mu} - (1+k)^2 \xi^{-\lambda/\mu} + (1/2+k)^{1/2} \xi^{-\lambda/2\mu} - 1/9(1+3k)\} / (2r^2 k^2 \lambda) \\ u_+/(\omega R_*) &= (1+k)^{-1/2} \xi^{-\lambda/2\mu} - \varepsilon^2 bl \{1/18(1+k)^{3/2} [11+3 \ln(1+k) + \\ &+ 3\lambda(\ln \xi)/\mu] \xi^{-3\lambda/2\mu} - (1-k) \xi^{-\lambda/\mu} + 1/2(1+k)^{3/2} \xi^{-\lambda/2\mu} + 1/9(1+k)^2\} / (2r^2 k^2 \lambda) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Формулы (3.9) позволяют по доступным измерениям величин  $u_+$ ,  $u_-$  определять напряжения  $q_0^{(1)}$ ,  $q_0^{(2)}$ , возникающие в реальных процессах прокатки труб на передней и задней границах зоны обжатия. Поскольку из (3.9) величина  $\xi$  в явном виде не выражается, следует использовать графическое представление решения. Для примера на фиг. 2, а показаны графики зависимости  $q_0^{(1)}/\sigma_S$  от величины  $u_-/\omega R_*$  для  $q_0^{(2)}=0$  (кривые 1-3), для  $q_0^{(2)}=0,5 \sigma_S$  (кривые 4-6) и для  $q_0^{(2)}=-0,5 \sigma_S$  (кривые 7-9), а на фиг. 2, б приведены зависимости  $q_0^{(2)}/\sigma_S$  от величины  $u_+/\omega R_*$  для  $q_0^{(1)}=0$  (кривые 1-3), для  $q_0^{(1)}=0,5 \sigma_S$  (кривые 4-6) и для  $q_0^{(1)}=-0,5 \sigma_S$  (кривые 7-9), численно рассчитанные для диапазонов  $2\sigma_S > q_0^{(j)} > -\sigma_S$  ( $j=1, 2$ ) при следующих значениях параметров прокатки:  $r=0,050$  м;  $b=0,056$  м;  $R_*=0,289$  м;  $\mu=0,3$ ;  $\Phi_0=1$  рад.

Кривые 1, 4, 7 соответствуют значению  $R_0=0,058$  м,  $k=1/3$ , для кривых 2, 5, 8:  $k=2/3$ ,  $R_0=0,060$  м, а кривым 3, 6, 9 соответствуют значения  $k=1$ ,  $R_0=0,062$  м.

Согласно формулам (3.7), в рамках поставленной первой основной задачи теории течения скорость  $v_+$  перетекания частиц металла через линию  $\varphi=\Phi_0$  в зону выпусков определяется не только угловой скоростью вращения валков  $\omega$  и величинами

внешних напряжений  $q_0^{(1)}$ ,  $q_0^{(2)}$ , которые по доступным измерениям величин  $u_+$ ,  $u_-$  можно найти из соотношений (3.9), но зависит, кроме того, еще и от неизвестного распределения бокового давления  $q_0^{(3)}(x)$  вдоль линии  $\varphi=\Phi_0$ .

На фиг. 3 для приведенных значений параметров прокатки показаны зависимости величины  $v_+/\omega R_*$  от безразмерной координаты  $\bar{x}=x/l$  для частного случая  $q_0^{(3)}=0$ , при  $q_0^{(1)}=q_0^{(2)}=0$ . Кривые 1-4 рассчитаны для значений  $k=1/3$ ;  $2/3$ ;  $1$ ;  $3/2$  и соответствуют, согласно кривым 1 на фиг. 2, а, б, значениям  $u_-/\omega R_*=1,15$  и  $u_+/\omega R_*=0,86$ .

Построение общего решения для поперечной компоненты скорости течения металла и зависящих от нее образования разностенности и отхода металла от оправки в зоне выпусков потребует постановки всех трех основных задач теории течения [1] и их совместного исследования для всего очага деформации, включая зону выпусков, в которой металл в виде тонкой пластической оболочки течет в пространстве под действием растягивающих усилий со стороны переднего и заднего жестких концов трубы и сжимающих усилий со стороны металла, вытекающего из зоны обжатия.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Вопросы теории течения пластического вещества по поверхностям. — ПММ, 1954, т. 18, вып. 3, с. 265—288.
2. Ильюшин А. А. Полная пластичность в процессах течения между жесткими поверхностями, аналогия с песчаной насыпью и некоторые приложения. — ПММ, 1955, т. 19, вып. 6, с. 693—713.
3. Арутюнов Ю. С. Прокатка тонкого листа. — Вестн. МГУ. Сер. математики, механики, астрономии, физики, химии, 1957, № 4, с. 17—28.
4. Арутюнов Ю. С., Гонор А. Л. Осаживание тонких поковок произвольной формы в плане. — Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1963, № 1, с. 166—171.
5. Кийко И. А. Теория пластического течения. М.: Изд-во МГУ, 1978. 76 с.
6. Ишлинский А. Ю. Прокатка и волочение при больших скоростях деформирования. — ПММ, 1943, т. 7, вып. 3, с. 226—230.

Москва

Поступила в редакцию  
5.XI.1985

УДК 539.3

#### ТРЕХЭТАПНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

СЕРНИК И. Н.

Применение многосеточных итерационных методов является одним из перспективных путей повышения эффективности решения задач математической физики методом конечных элементов и методом конечных разностей. В [1, 2] строится алгоритм, в котором на мелкой сетке главным образом производится итерационное подавление составляющих погрешности, имеющих относительно малую длину волны,