

УДК 624.07:534.1

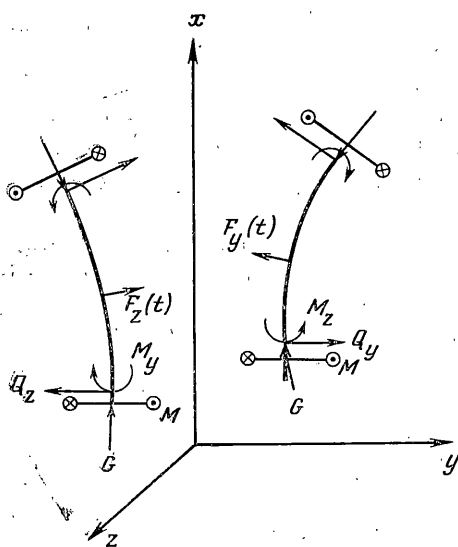
УСТОЙЧИВОСТЬ ТЯЖЕЛОГО УПРУГОГО СТЕРЖНЯ,
ВРАЩАЮЩЕГОСЯ В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ
ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ НЕОДНОРОДНЫХ
СКРУЧИВАЮЩИХ МОМЕНТОВ И ОСЕВЫХ СИЛ

ГРИГУЛЕЦКИЙ В. Г.

Рассматривается устойчивость форм равновесия тяжелого упругого стержня большой длины, вращающегося в вязкой среде и испытывающего совместное действие неоднородных по длине осевых сил и скручивающих моментов. В монографии [1] изучены некоторые неоднородные задачи форм равновесия для круговой цилиндрической оболочки. Полученные ниже результаты представляют интерес для различных областей технических приложений, например для анализа работы крупных космических сооружений [2] и при проектировании строительства глубоких нефтяных и газовых скважин [3].

1. Рассмотрим вертикальный упругий стержень длины L , который вращается в вязкой среде и испытывает совместное действие сил собственного веса, скручивающих моментов и центробежных сил инерции. При вращении стержня в вязкой среде на стержень действуют силы сопротивления, которые пропорциональны частоте вращения. Принимаем, что действующие на стержень нагрузки являются консервативными, а приложенные к стержню связи являются идеальными. Материал стержня линейно-упругий и изотропный. Напряженное состояние стержня при изгибе описывается уравнениями линейной теории упругости, т. е. прогибы произвольных точек оси удовлетворяют условиям «малости» деформаций [4], а внутренний изгибающий момент определяется зависимостью, основанной на гипотезе «плоских сечений» [5].

Расчетная схема и положение равновесия элемента стержня при действии указанных сил, показаны на фигуре.



Рассматривая равновесие элемента стержня и приравняв нулю сумму проекций сил на две взаимно перпендикулярные плоскости, запишем уравнения малых колебаний изогнутой оси стержня около положения равновесия

Рассматривая равновесие элемента стержня и приравняв нулю сумму проекций сил на две взаимно перпендикулярные плоскости, запишем уравнения малых колебаний изогнутой оси стержня около положения равновесия

$$EJ \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} - M \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 + \bar{\alpha} \frac{x}{L} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[(F - px) \frac{\partial z}{\partial x} \right] + c \left(\frac{\partial z}{\partial t} - \omega y \right) + m \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - 2\omega \frac{\partial y}{\partial t} - \omega^2 z \right) = 0$$

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + M \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 + \bar{\alpha} \frac{x}{L} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[(F - px) \frac{\partial y}{\partial x} \right] +$$

$$+c \left(\frac{\partial y}{\partial t} + \omega z \right) + m \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\omega \frac{\partial z}{\partial t} - \omega^2 y \right) = 0 \quad (1.1)$$

Здесь m , p — погонная масса и вес единицы длины стержня, ω — частота вращения стержня, M — амплитуда скручивающего момента, $\bar{\alpha}$ — коэффициент, определяющий характер изменения момента (при $\bar{\alpha} = 0$ скручивание стержня осуществляется равными моментами, приложенными к концам, т. е. имеем «однородное» распределение), c — коэффициент трения при вращении стержня в вязкой среде. E — модуль Юнга материала стержня, J — полярный момент инерции поперечного сечения стержня, F — осевая сжимающая сила, приложенная к нижнему концу стержня¹⁾.

Введем безразмерные переменные и функцию комплексного прогиба

$$z = \mu u, \quad y = \mu v, \quad \mu^3 p = EJ \quad (1.2)$$

$$\beta EJ = F\mu^2, \quad \gamma EJ = M\mu, \quad \bar{\alpha}L = \alpha, \quad x = \mu x$$

$$w(x, t) = u(x, t) + iv(x, t) \quad (1.3)$$

Теперь вместо двух уравнений (1.1) можно записать одно комплексное (g — ускорение свободного падения):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - i\gamma \frac{\partial}{\partial x} \left[(1 + \alpha x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[(\beta - x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \\ & + \frac{c\mu}{p} \left(\frac{\partial w}{\partial t} - i\omega w \right) + \frac{\mu}{g} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - i2\omega \frac{\partial w}{\partial t} - \omega^2 w \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Для решения (1.4) запишем начальные и граничные условия:

$$w(x, 0) = \varphi(x), \quad w_t(x, 0) = \psi(x) \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} & a_{11}w(0, t) + a_{12}w_x'(0, t) + a_{13}w_{xx}''(0, t) + a_{14}w_{xxx}'''(0, t) = 0 \\ & a_{21}w(0, t) + a_{22}w_x'(0, t) + a_{23}w_{xx}''(0, t) + a_{24}w_{xxx}'''(0, t) = 0 \\ & a_{31}w(0, t) + a_{32}w_x'(l, t) + a_{33}w_{xx}''(l, t) + a_{34}w_{xxx}'''(l, t) = 0 \\ & a_{41}w(l, t) + a_{42}w_x'(l, t) + a_{43}w_{xx}''(l, t) + a_{44}w_{xxx}'''(l, t) = 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — вполне определенные функции x , l — общая длина стержня в безразмерных единицах (штрихи означают соответствующие производные по x , t).

2. Будем искать решение уравнения (1.4) в виде

$$w(x, t) = w(x)T(t) \quad (2.1)$$

Здесь $w(x)$, $T(t)$ — функции аргументов x и t . Подставим (2.1) в уравнение (1.4). Запишем два уравнения (a , b — действительные постоянные):

$$\frac{\mu}{g} \left(\frac{d^2 T}{dt^2} - i2\omega \frac{dT}{dt} - \omega^2 T \right) + \frac{c\mu}{p} \left(\frac{dT}{dt} - i\omega T \right) + (a + ib)T = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - i\gamma \frac{d}{dx} \left[(1 + \alpha x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right] + \frac{d}{dx} \left[(\beta - x) \frac{dw}{dx} \right] - (a + ib)w = 0 \quad (2.3)$$

Заметим, что на основе решения уравнения (2.2) можно исследовать вопрос об устойчивости решения задачи (1.4) — (1.6) в смысле А. М. Ляпунова [9], т. е. находить условия ограниченности (или неограниченного возрастания) функции $T(t)$. На основе решения уравнения (2.3) можно исследовать вопрос об устойчивости статических форм равновесия упругого стержня в смысле Л. Эйлера [5—7], т. е. находить условия существования ненулевых решений задачи (1.4) — (1.6) и значения ее собственных чисел. Важно, отметить, что обе «локальные» задачи устойчивости взаимо-

¹⁾ Вывод более частных уравнений, чем (1.1), имеется в работах [5—8] и др.

связаны, поскольку параметры a и b входят одновременно в уравнения (2.2) и (2.3).

3. Общее решение уравнения (2.2) можно записать в виде

$$T(t) = A_1 \exp(\lambda_1 t) + A_2 \exp(\lambda_2 t) \quad (3.1)$$

где A_1, A_2 — комплексные постоянные интегрирования, λ_1, λ_2 — корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - 2 \left(i\omega - \frac{c}{2m} \right) \lambda - \left[\left(\omega^2 - a \frac{g}{\mu} \right) + i \left(\omega \frac{c}{m} + b \frac{g}{\mu} \right) \right] = 0 \quad (3.2)$$

Для решений (3.2) можно записать

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} = & -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left[B + \left(\frac{c}{2m} \right)^2 - a \frac{g}{\mu} \right]^{1/2}} - \\ & - i \left\{ \omega \mp \sqrt{\frac{1}{2} \left[B - \left(\frac{c}{2m} \right)^2 + a \frac{g}{\mu} \right]^{1/2}} \right\} \quad (3.3) \\ B = & \left\{ \left(\frac{c}{2m} \right)^2 \left[\left(\frac{c}{2m} \right)^2 - 2a \frac{g}{\mu} \right] + \left(\frac{g}{\mu} \right)^2 (a^2 + b^2) \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

Из (3.3) видно, что действительные части λ_1 и λ_2 определяют степень затухания или нарастания амплитуды колебаний функции $T(t)$. Действительная часть λ_2 всегда отрицательна и при возрастании t второе слагаемое решения (3.1) стремится к нулю. Действительная часть λ_1 может быть положительной и отрицательной. Условия ограниченности колебаний оси стержня, следовательно, определяются неравенством

$$\operatorname{Re} \lambda_1 \leq 0 \quad (3.4)$$

Для критических условий находим значение коэффициента трения:

$$c_* = ba^{-1/2} \quad (3.5)$$

При $c < c_*$ и $c > c_*$ амплитуда колебаний оси стержня при изгибе будет нарастать или убывать соответственно.

Мнимые части параметров λ_1 и λ_2 определяют частоту гармонических колебаний оси стержня при изгибе. Для критической частоты колебаний находим

$$\omega_* = 1/2 [B - 1/2 c/m]^2 + ag/\mu]^{1/2} \quad (3.6)$$

Из (3.6) следует, что критическая частота определяется не только упругими свойствами стержня, но и параметрами вязкой среды (c).

4. Общее решение уравнения (2.3) представим в виде суммы степенных рядов:

$$w(x) = \left(c_0 \sum_{n=0}^{\infty} F_n + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} S_n + c_2 \sum_{n=0}^{\infty} T_n + c_3 \sum_{n=0}^{\infty} K_n \right) x^n \quad (4.1)$$

Здесь c_0, \dots, c_3 — комплексные постоянные, определяемые по крайевым условиям, F_n, \dots, K_n — комплексные коэффициенты при соответствующих степенях x .

Подставляя (4.1) (и производные) в (2.3) и приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях x , получим рекуррентные формулы для нахождения значений F_n, \dots, K_n для $n \geq 4, 5, 6 \dots$:

$$\begin{bmatrix} F_n \\ S_n \\ T_n \\ K_n \end{bmatrix} = i \frac{\gamma}{n} \begin{bmatrix} F_{n-1} \\ S_{n-1} \\ T_{n-1} \\ K_{n-1} \end{bmatrix} - \frac{\beta}{n(n-1)} \begin{bmatrix} F_{n-2} \\ S_{n-2} \\ T_{n-2} \\ K_{n-2} \end{bmatrix} + i \frac{\gamma(n-3)\alpha}{n(n-1)} \begin{bmatrix} F_{n-2} \\ S_{n-2} \\ T_{n-2} \\ K_{n-2} \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{n-3}{n(n-1)(n-2)} \begin{bmatrix} F_{n-3} \\ S_{n-3} \\ T_{n-3} \\ K_{n-3} \end{bmatrix} + \frac{a+ib}{n(n+1)(n-2)(n-3)} \begin{bmatrix} F_{n-4} \\ S_{n-4} \\ T_{n-4} \\ K_{n-4} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Значения коэффициентов F_n, \dots, K_n при $n=0, 1, 2, 3$ равны: $K_0=0, K_1=0, K_2=0, K_3=1, F_0=1, F_1=0, F_2=0, F_3=0, S_0=0, S_1=1, S_2=0, S_3=0, T_0=0, T_1=0, T_2=1, T_3=0$. Форма решения в виде (4.1) позволяет не связывать нахождение членов степенного ряда с заданными граничными условиями задачи; учёт краевых (граничных) условий осуществляется с помощью коэффициентов c_0, \dots, c_3 . Такой алгоритм решения удобен для получения численных результатов. С помощью ряда (4.1) можно найти аналитическое решение любой краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с необходимой точностью. Для оценки точности при этом можно использовать значение функции:

$$D(x) = \frac{d^4 w}{dx^4} - i \frac{d}{dx} \Gamma (1-\alpha x) \frac{d^2 w}{dx^2} \Big] + \frac{d}{dx} \left[(\beta-x) \frac{dw}{dx} \right] - (a+ib)w \quad (4.3)$$

Доказательство сходимости степенных рядов, входящих в (4.1), можно установить на основании признака Даламбера для функциональных рядов.

5. Для определенности рассмотрим случай шарнирного закрепления обоих концов стержня. Для решения уравнения (2.3) можно принять краевые условия:

$$w(0) = w(l) = 0, \quad w_{xx}''(0) = w_{xx}''(l) = 0 \quad (5.1)$$

Подставляя ряд (4.1) (и производные) в (5.1), находим $c_0=0, c_2=0$, а значения c_1 и c_3 удовлетворяют системе:

$$\begin{aligned} c_1 \sum_{n=0}^{\infty} S_n l^n + c_3 \sum_{n=0}^{\infty} K_n l^n &= 0 \\ c_1 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) S_n l^{n-2} + c_3 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) K_n l^{n-2} &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

При статическом подходе к определению значений критических параметров (длины, силы, момента, частоты вращения и т. д.) используется условие существования ненулевых решений однородной системы уравнений (5.2), т. е. необходимо, чтобы определитель системы (Δ) был равен нулю:

$$\Delta = \left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n l^n \right) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) K_n l^{n-2} - \left(\sum_{n=0}^{\infty} K_n l^n \right) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) S_n l^{n-2} = 0 \quad (5.3)$$

Преобразуем (5.3) следующим образом. Положим (Π_n, \dots, Q_n — действительные коэффициенты):

$$\begin{aligned} S_n &= \Pi_n + iH_n \\ K_n &= V_n + iQ_n \end{aligned} \quad (5.4)$$

Подставим (5.4) в (5.3) и отделим действительную и мнимую части:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_n l^n \sum_{n=2}^{\infty} V_n n(n-1) l^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} H_n l^n \sum_{n=2}^{\infty} Q_n n(n-1) l^{n-2} - \\ - \sum_{n=0}^{\infty} V_n l^n \sum_{n=2}^{\infty} \Pi_n n(n-1) l^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} Q_n l^n \sum_{n=2}^{\infty} H_n n(n-1) l^{n-2} &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_n l^n \sum_{n=2}^{\infty} Q_n n(n-1) l^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} H_n l^n \sum_{n=2}^{\infty} V_n n(n-1) l^{n-2} - \\ - \sum_{n=0}^{\infty} V_n l^n \sum_{n=2}^{\infty} H_n n(n-1) l^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} Q_n l^n \sum_{n=2}^{\infty} \Pi_n n(n-1) l^{n-2} &= 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Таблица 1

l	β	a	b	β	a	b	β	a	b	β	a	b
2	3,5623	0	0,25	3,0254	0,25	0,25	2,7684	0,50	0,25	2,6043	0,75	0,25
4	1,7512	0	0,25	1,7288	0,25	0,25	1,7083	0,50	0,25	1,6894	0,75	0,25
6	1,3551	0	0,25	1,3490	0,25	0,25	1,3431	0,50	0,25	1,3374	0,75	0,25
8	1,1501	0	0,25	1,1475	0,25	0,25	1,1449	0,50	0,25	1,1423	0,75	0,25
2	3,0254	0	0,50	2,7684	0,25	0,50	2,6043	0,50	0,50	2,4854	0,75	0,50
4	1,7288	0	0,50	1,7083	0,25	0,50	1,6894	0,50	0,50	1,6718	0,75	0,50
6	1,3490	0	0,50	1,3431	0,25	0,50	1,3374	0,50	0,50	1,3318	0,75	0,50
8	1,1475	0	0,50	1,1449	0,25	0,50	1,1423	0,50	0,50	1,1398	0,75	0,50
2	2,7684	0	0,75	2,6043	0,25	0,75	2,4854	0,50	0,75	2,3929	0,75	0,75
4	1,7083	0	0,75	1,6894	0,25	0,75	1,6718	0,50	0,75	1,6555	0,75	0,75
6	1,3431	0	0,75	1,3374	0,25	0,75	1,3318	0,50	0,75	1,3264	0,75	0,75
8	1,1449	0	0,75	1,1423	0,25	0,75	1,1398	0,50	0,75	1,1373	0,75	0,75

Таблица 2

l	β	a	b	β	a	b	β	a	b
2	2,9923	0,25	0,25	2,7492	0,50	0,25	2,5911	0,75	0,25
4	1,7269	0,25	0,25	1,7066	0,50	0,25	1,6878	0,75	0,25
6	1,3486	0,25	0,25	1,3427	0,50	0,25	1,3372	0,75	0,25
8	1,1473	0,25	0,75	1,1447	0,50	0,25	1,1422	0,75	0,25
2	2,7492	0,25	0,50	2,5911	0,50	0,50	2,4756	0,75	0,50
4	1,7066	0,25	0,50	1,6878	0,50	0,50	1,6704	0,75	0,50
6	1,3427	0,25	0,50	1,3370	0,50	0,50	1,3515	0,75	0,50
8	1,1447	0,25	0,50	1,1422	0,50	0,50	1,1396	0,75	0,50

Таблица 3

l	β	a	b	β	a	b	β	a	b
2	2,9677	0,25	0,25	2,7352	0,50	0,25	2,5819	0,75	0,25
4	1,7264	0,25	0,25	1,7061	0,50	0,25	1,6874	0,75	0,25
6	1,3488	0,25	0,25	1,3429	0,50	0,25	1,3370	0,75	0,25
8	1,1476	0,25	0,25	1,1449	0,50	0,25	1,1424	0,75	0,25
2	2,7352	0,25	0,50	2,5819	0,50	0,50	2,4689	0,75	0,50
4	1,7051	0,25	0,50	1,6874	0,50	0,50	1,6701	0,75	0,50
6	1,3429	0,25	0,50	1,3372	0,50	0,50	1,3317	0,75	0,50
8	1,1449	0,25	0,50	1,1424	0,50	0,50	1,1399	0,75	0,50

Таблица 4

l	β	a	b	β	a	b	β	a	b
2	3,4804	0	0,25	2,9956	0,25	0,25	2,7521	0,50	0,25
4	1,7505	0	0,25	1,7282	0,25	0,25	1,7079	0,50	0,25
6	1,3553	0	0,25	1,3492	0,25	0,25	1,3433	0,50	0,25
8	1,1504	0	0,25	1,1477	0,25	0,25	1,1451	0,50	0,25
2	2,9956	0	0,50	2,7521	0,25	0,50	2,5937	0,50	0,50
4	1,7282	0	0,50	1,7078	0,25	0,50	1,6889	0,50	0,50
6	1,3492	0	0,50	1,3433	0,25	0,50	1,3376	0,50	0,50
8	1,1477	0	0,50	1,1451	0,25	0,50	1,1426	0,50	0,50

Система двух алгебраических уравнений (5.5) позволяет при заданных параметрах α , β , γ и l численно найти значения a и b . Для определения значений действительных коэффициентов Π_n, \dots, Q_n сравним выражения (4.2) и (5.4). В результате получим следующие рекуррентные формулы для $n \geq 4, 5, 6, \dots$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\Pi_n}{V_n} \right] = & -\frac{\gamma}{n} \left[\frac{H_{n-1}}{Q_{n-1}} \right] - \frac{\beta}{n(n-1)} \left[\frac{\Pi_{n-2}}{V_{n-2}} \right] - \frac{\gamma(n-3)\alpha}{n(n-1)} \left[\frac{H_{n-2}}{Q_{n-2}} \right] + \\ & + \frac{n-3}{n(n-1)(n-2)} \left[\frac{\Pi_{n-3}}{V_{n-3}} \right] + \frac{\alpha}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \left[\frac{\Pi_{n-4}}{V_{n-4}} \right] - \end{aligned}$$

l	β	a	b	β	a	b	β	a	b
2	3,4330	0	0,25	2,9844	0,25	0,25	2,7493	0,50	0,25
4	1,7546	0	0,25	1,7322	0,25	0,25	1,7116	0,50	0,25
6	1,3577	0	0,25	1,3516	0,25	0,25	1,3456	0,50	0,25
8	1,1519	0	0,25	1,1493	0,25	0,25	1,1467	0,50	0,25
2	2,9844	0	0,50	2,7493	0,25	0,50	2,5941	0,50	0,50
4	1,7322	0	0,50	1,7116	0,25	0,50	1,6926	0,50	0,50
6	1,3516	0	0,50	1,3456	0,25	0,50	1,3399	0,50	0,50
8	1,1493	0	0,50	1,1467	0,25	0,50	1,1441	0,50	0,50

$$-\frac{b}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \begin{bmatrix} H_{n-4} \\ Q_{n-4} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} H_n \\ Q_n \end{bmatrix} &= \frac{\gamma}{n} \begin{bmatrix} \Pi_{n-1} \\ V_{n-1} \end{bmatrix} - \frac{\beta}{n(n-1)} \begin{bmatrix} H_{n-2} \\ Q_{n-2} \end{bmatrix} + \frac{\gamma(n-3)\alpha}{n(n-1)} \begin{bmatrix} \Pi_{n-2} \\ V_{n-2} \end{bmatrix} + \\ &+ \frac{n-3}{n(n-1)(n-2)} \begin{bmatrix} H_{n-3} \\ Q_{n-3} \end{bmatrix} + \frac{a}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \begin{bmatrix} H_{n-4} \\ Q_{n-4} \end{bmatrix} + \\ &+ \frac{b}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \begin{bmatrix} \Pi_{n-4} \\ V_{n-4} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Значения коэффициентов Π_n, \dots, Q_n при $n=0, 1, 2, 3$ равны: $\Pi_0=0, \Pi_1=1, \Pi_2=0, \Pi_3=0, H_0=0, H_1=0, H_2=0, H_3=0, V_0=0, V_1=0, V_2=0, V_3=1, Q_0=0, Q_1=0, Q_2=0, Q_3=0$.

6. Система нелинейных алгебраических уравнений (5.5) решалась итерационным методом; задавались некоторые значения a и b ; а затем с точностью 0,001 определялось такое сочетание параметров α, β, γ и l , при которых левые части уравнений одновременно изменяли знаки. При больших значениях l в расчетах приходилось удерживать большое количество десятичных знаков. По этой причине ниже представлены результаты расчетов для $l=2; 4; 6; 8$ (безразмерных единиц).

Результаты выполненных расчетов представлены в табл. 1–5. В табл. 1 приведены критические параметры для $\alpha=0$ и $\gamma=0,1$; в табл. 2 — $\alpha=0, \gamma=0,2$; в табл. 3 — $\alpha=0, \gamma=0,2$; в табл. 4 — $\alpha=0,1, \gamma=0,1$; в табл. 5 — $\alpha=0,2, \gamma=0,2$.

Анализ этих данных показывает, что с увеличением общей длины стержня (l), значение «критической длины» (β) уменьшается при любых сочетаниях параметров α, γ, a, b . Например, при $\alpha=0, \gamma=0, a=0, b=0,25$; для $l=2, \beta=3,5623$; для $l=4, \beta=1,7512$; для $l=6, \beta=1,3551$; для $l=8, \beta=1,1501$.

Вращение стержня и сопротивление вращению со стороны вязкой среды приводят к уменьшению значений критической длины при одинаковой общей длине стержня. Например, при общей длине стержня $l=2$ ($b=+0,25$), для $a=0, \beta=3,5623$; для $a=0,25, \beta=3,0254$; для $a=0,50, \beta=2,7684$; для $a=0,75, \beta=2,6043$. Увеличение общей длины стержня приводит к тому, что влияние вращения и сил сопротивления уменьшается. Так, при общей длине стержня $l=8$ ($b=0,25$), для $a=0, \beta=1,1501$; для $a=0,25, \beta=1,1475$; для $a=0,50, \beta=1,1449$; для $a=0,75, \beta=1,1423$.

Все сказанное относится и к другим сочетаниям собственных значений исследуемой краевой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолок Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 360 с.
2. Ломаченко А. Н., Мамалыга В. М. Деформация протяженных упругих тел на орбите. — Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 4, с. 27–35.
3. Лубинский А. Изучение продольного изгиба буровой колонны при роторном бурении. — В сб.: Искривление скважин при бурении. М.: Гостехиздат, 1960, с. 3–52.
4. Ильюшин А. А., Ленский В. С. Сопротивление материалов. М.: Физматгиз, 1959. 371 с.
5. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 880 с.
6. Феодосьев А. С. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1973. 400 с.
7. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 340 с.
8. Диментберг Ф. М. Изгибные колебания вращающихся валов. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 247 с.
9. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950.

Грозный

Поступила в редакцию
7.1.1985.