

УДК 539.3

О СТРУКТУРЕ СПЕКТРА ЗАДАЧИ  
МАГНИТОУПРУГОСТИ ТОНКИХ ПЛАСТИН

РАДОВИНСКИЙ А. Л.

В публикуемой работе на основе асимптотического анализа исследуются приближенные методы решения задачи свободных колебаний магнитоупругих пластин [1, 2] конечных размеров. Формулируются асимптотические свойства спектра собственных значений задачи в зависимости от напряженности магнитного поля.

1. Будем исходить из следующих уравнений, считая, что колебания происходят по закону  $\exp(i\omega\tau)$  ( $\tau$  — время):

$$j_1 L_{kj} u_j + j_2 \lambda^2 u_k = -j_3 \beta B_{03} \partial(F - j_4 2hf) / \partial x_k \quad (1.1)$$

$$j_5 h^2 a_0 \Delta_s^2 u_s - j_6 \lambda^2 u_s = -j_7 \beta B_{03} \partial(F - j_4 2hf) / \partial x_j \quad (1.2)$$

$$j_8 \gamma \Delta_s (F - j_4 2hf) + j_9 i \lambda f = i \lambda \partial(j_{10} B_{03} u_3 - j_{11} B_{03} u_j) / \partial x_j \quad (1.3)$$

$$\Delta \Phi = 0 \quad (1.4)$$

$$F = (\Phi)_s^+ - (\Phi)_s^-, \quad f = (\partial \Phi / \partial x_3)_s^+ = (\partial \Phi / \partial x_3)_s^- \quad (1.5)$$

$$a_0 = [3(1 - \nu^2)]^{-1}, \quad \beta = (2Eh\mu_0)^{-1}, \quad \gamma = (2h\mu_0\sigma)^{-1} \sqrt{\rho/E}$$

$$\lambda^2 = \rho\omega^2/E, \quad i = \sqrt{-1}$$

Здесь  $k, j=1, 2$  — индексы (по повторяющимся индексам производится суммирование; первое равенство эквивалентно двум уравнениям, получаемым при  $k=1$  и  $k=2$ ),  $x_1, x_2, x_3$  — параметры заданной в окружающем пластину пространстве  $V$  триортогональной системы координат, в которой срединная поверхность  $S$  пластины считается совмещенной с координатной поверхностью  $x_3=0$ ,  $\mathbf{B}_0(B_{01}, B_{02}, B_{03})$  — значения вектора магнитной индукции на  $S$  ( $\mathbf{B}_0$  считается известным из решения задачи магнитоэластики, а его компоненты — отличными от тождественного нуля),  $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$  — вектор перемещений срединной поверхности пластины;  $\Phi$  — потенциальная функция (возмущенная составляющая магнитной индукции  $\mathbf{b} = \text{grad } \Phi$ ); индекс  $s$  означает, что берется значение соответствующей величины на поверхности  $S$  (при  $x_3=0$ ), причем  $(\dots)_s^\pm = (\dots)_{x_3 \rightarrow \pm 0}$ ,  $f = (b_3)_s$  — нормальная компонента  $\mathbf{b}$  в пластине (считается, согласно [1, 2], постоянной по толщине),  $\Delta$  и  $\Delta_s$  — трехмерный (в  $V$ ) и двумерный (на  $S$ ) операторы Лапласа соответственно,  $L_{kj}$  — известные операторы теории упругих пластин,  $h$  — полутолщина пластины,  $\mu_0$  — магнитная постоянная,  $\sigma, \rho, E, \nu$  — электрическая проводимость, плотность, модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала пластины,  $\lambda$  — частотный параметр,  $j_1 - j_{11}$  — условные множители, введенные для удобства изложения (пока их надо считать равными единице).

Уравнения (1.1) — (1.5) получены из уравнений [1, 2] исключением тангенциальных компонент индуцированного в пластине электрического поля и отбрасыванием членов, выходящих за пределы точности гипотез Кирхгофа — Лява. Значение коэффициента магнитной проницаемости принято равным единице. При рассмотрении индуцированного магнитного поля в среде не делается различия между лицевыми и срединной поверхностями пластины.

Осредненные по толщине векторы электрического тока  $\mathbf{I}$  и индуцированного в пластине электрического поля  $\mathbf{e}$  могут быть получены из соответствующих формул [1, 2] и записаны в терминах и с точностью, принятых в уравнениях (1.1)–(1.5), в виде

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2h\mu_0} \left[ -\frac{\partial}{\partial x_2} (F-2hf) \mathbf{i}_1 + \frac{\partial}{\partial x_1} (F-2hf) \mathbf{i}_2 \right] \quad (1.6)$$

$$\mathbf{e} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \left\{ -\left[ \gamma \frac{\partial}{\partial x_1} (F-2hf) + i\lambda (u_2 B_{03} - u_3 B_{02}) \right] \mathbf{i}_1 + \right. \\ \left. + \left[ \gamma \frac{\partial}{\partial x_2} (F-2hf) + i\lambda (u_1 B_{03} - u_3 B_{01}) \right] \mathbf{i}_2 - [i\lambda (u_1 B_{02} - u_2 B_{01})] \mathbf{i}_3 \right\}$$

где  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$  – единичные орты принятой системы координат на  $S$ .

При решении конкретных задач к уравнениям (1.1)–(1.5) надо добавить условие ограниченности функции  $\Phi$  на бесконечности и некоторые условия на краю пластины  $\Gamma$ . Они обсуждаются ниже в п. 4.

2. Рассмотрим сначала спектр собственных значений задачи колебаний бесконечной пластины в постоянном наклонном по отношению к  $S$  магнитном поле ( $B_{0l} \neq 0, \partial B_{0l} / \partial x_l = 0, l=1, 2, 3$ ).

Ограниченные при  $|x_3| \rightarrow \infty$  решения уравнений (1.1)–(1.5) будем искать в виде  $(m_{1,2}$  – волновые числа,  $k = (m_1^2 + m_2^2)^{1/2}$ ):

$$u_j = u_j^* \exp [i(m_1 x_1 + m_2 x_2)], \quad F = F^* \exp [i(m_1 x_1 + m_2 x_2)] \quad (2.1) \\ \Phi = (\Phi)_s^+ \exp [i(m_1 x_1 + m_2 x_2) - kx_3] \quad (x_3 \geq 0) \\ \Phi = (\Phi)_s^- \exp [i(m_1 x_1 + m_2 x_2) + kx_3] \quad (x_3 \leq 0)$$

Подставив (2.1) в соотношения (1.5), получим равенства, из которых следует, что

$$(\Phi)_s^+ = -(\Phi)_s^- = 1/2 F^*, \quad f = -1/2 k F^* \exp [i(m_1 x_1 + m_2 x_2)] \quad (2.2)$$

Подстановка  $u_j, F$  и  $f$  в форму (2.1), (2.2) в (1.1)–(1.3) приводит к получению системы четырех однородных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами относительно  $u_j$  и  $F^*$ , имеющих нетривиальное решение при выполнении равенства

$$[a_0 h^2 (m_1^2 + m_2^2)^2 - \lambda^2] [m_1^2 + m_2^2 - 2(1+\nu)\lambda^2] [m_1^2 + m_2^2 - (1-\nu^2)\lambda^2] \times \\ \times [2i\gamma (m_1^2 + m_2^2) - (m_1^2 + m_2^2)^{1/2} \lambda] - 2\beta \lambda (B_{01} m_1 + B_{02} m_2)^2 \times \\ \times [m_1^2 + m_2^2 - 2(1+\nu)\lambda^2] [m_1^2 + m_2^2 - (1-\nu^2)\lambda^2] - 2\beta \lambda B_{03}^2 (1+\nu) \times \\ \times [(m_1^2 + m_2^2)^2 + \nu(m_1^2 - m_2^2)^2 + (m_1^2 + m_2^2) 2(1-\nu^2)\lambda^2] \times \\ \times [a_0 h^2 (m_1^2 + m_2^2)^2 - \lambda^2] = 0 \quad (2.3)$$

Это – частотное уравнение седьмой степени относительно  $\lambda$ , определяющее комплексные собственные значения  $\omega$  задачи (1.1)–(1.5).

Исследование корней уравнения (2.3) показывает, что, вообще говоря, возможны следующие приближенные решения ( $j'$  – число, значение которого будет задано ниже):

$$1. \lambda^2 = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2(1+\nu)}, \quad \lambda^2 = \frac{m_1^2 + m_2^2}{1-\nu^2}; \quad 2. \lambda^2 = a_0 h^2 (m_1^2 + m_2^2)^2 \quad (2.4) \\ 3. \lambda = 2i\gamma (m_1^2 + m_2^2)^{1/2}; \quad 4. \lambda^2 = 2\beta \frac{(B_{01} m_1 + B_{02} m_2)^2 + j' B_{03}^2 (m_1^2 + m_2^2)}{(m_1^2 + m_2^2)^{1/2}} \\ 5. \lambda = \frac{i\beta (B_{01} m_1 + B_{02} m_2)^2 + j' B_{03}^2 (m_1^2 + m_2^2)}{\gamma (m_1^2 + m_2^2)} \\ 6. \lambda = \frac{i\gamma h^2 a_0 (m_1^2 + m_2^2)^3}{\beta (B_{01} m_1 + B_{02} m_2)^2}$$

при получении которых использовалась асимптотика по относительной полутолщине пластины  $\eta = h/R$  ( $R$  — некоторый линейный размер, принятый за единицу). Значения коэффициентов (2.3) выражались через степени  $\eta$ :

$$\gamma = \eta^{a-1} \gamma_0, \quad (2E\mu_0)^{-1/2} B_{0i} = \eta^{-g} B_{0i}^0, \quad R\lambda = \eta^r \lambda_0 \quad (2.5)$$

$$Rm_i = \eta^{-p} m_i^0 \quad (2.6)$$

где  $a, g$  — заданные числа, а  $p$  и  $r$  — произвольные. Считается, что числа  $a, g, p$  и  $r$  таковы, что величины, обозначенные нуликом в правых частях соответствующих равенств, имеют порядок  $O(\eta^0)$ . Тогда число  $g$  задает асимптотику напряженности магнитного поля относительно  $(2E\mu_0)^{1/2}$ , число  $p$  совпадает по смыслу с показателем изменчивости [3], а  $r$  устанавливает асимптотику частотного параметра  $\lambda$ . Числа  $p$  и  $r$  должны удовлетворять неравенствам

$$0 \leq p < 1, \quad \max(-1, a-2) < r < \infty \quad (2.7)$$

определяющим пределы применимости двумерной теории оболочек [4] и гипотез магнитоупругости [1]. Последнее неравенство эквивалентно выполнению условия  $(2h)^2 \mu_0 \sigma \omega \ll 1$  отсутствия скин-эффекта в пластине. Кроме того, каждое из перечисленных в (2.4) шести приближенных решений справедливо с точностью до отброшенных при переходе от (2.3) к (2.4) членов, которые асимптотически малы в сравнении с сохранными в (2.4) только в пределах областей изменения параметров  $r, p, g$ , определяемых выражениями

$$1. \quad r = -p, \quad g < 1/2(p-a) \quad (a < 1), \quad g < 1/2(p-1) \quad (a \geq 1) \quad (2.8)$$

$$2. \quad r = 1-2p, \quad g < p^{-1/2}(1+a) \quad (p < 2-a), \quad g < 3/2(p-1) \quad (p \geq 2-a)$$

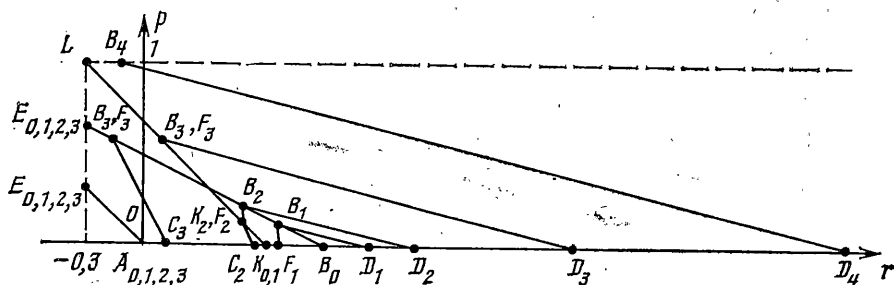
$$3. \quad r = a-1-p, \quad g < 1/2 \max(-3-3p, 1-2a+p)$$

$$4. \quad r = -1/2(1+p) - g, \quad r < \min(a-1-p, 1-2p), \quad r \neq -p$$

$$5. \quad r = -a-2g, \quad a-1-p < r < 1-2p, \quad r \neq -p$$

$$6. \quad r = 2+a+2g-4p, \quad r > \max(1-2p, a-1-p)$$

причем в формулах (2.4) следует считать, что  $j' = 0$  при  $r > -p$  и  $j' = 1$  при  $r < -p$ .



В трехмерном пространстве параметров  $(p, r, g)$  формулы (2.7) и (2.8) определяют плоскости, задаваемые первыми равенствами (2.8) и ограниченные согласно неравенствам (2.7) и соответствующим неравенствам (2.8).

Структура спектра при заданном уровне напряженности стационарно магнитного поля, определяющем, согласно (2.5), значение параметра  $g$ , может быть получена сечением соответствующих плоскостей плоскостью уровня  $g = \text{const}$ .

На фигуре эти сечения представлены для пластины из нержавеющей стали с характерными размерами  $h = 10^{-3}$  м,  $\eta = 10^{-3}$ . В этом случае из (2.5) получим  $a = 1,7$ ,  $B^* = |B_0| = 7 \cdot 10^{2+3g}$  Тл.

Диаграммы  $(p, r)$  при заданных характерных значениях  $g$  могут быть получены, если на фигуре принять в рассмотрение только линии, заклю-

ченны между точками с одинаковыми нижними индексами. Линии  $A_i E_i$  соответствуют первым решениям,  $B_i E_i$  — вторым,  $K_i L$  — третьим,  $C_i F_i$  — четвертым,  $F_i B_i$  — пятым,  $B_i D_i$  — шестым. Значения индекса  $i$  определяются уровнем напряженности магнитного поля. При  $g < -1,333$  ( $B^* < 7 \cdot 10^{-2}$  Тл) надо положить  $i=0$ , при  $-1,333 < g < -1,183$  ( $7 \cdot 10^{-2} < B^*$ , Тл  $< 0,2$ ) —  $i=1$ , при  $-1,183 < g < -0,583$  ( $0,2 < B^*$ , Тл  $< 12,5$ ) —  $i=2$ , при  $-0,583 < g < 0,017$  ( $12,5 < B^*$ , Тл  $< 790$ ) —  $i=3$ , при  $0,017 < g$  ( $790$  Тл  $< B^*$ ) —  $i=4$ . Заметим, что последние два диапазона на практике не достигаются и их рассмотрение представляет лишь чисто теоретический интерес.

3. Решение задачи колебаний пластины конечных размеров в магнитном поле может быть найдено приближенно с использованием асимптотического метода, разработанного для колебаний оболочек в вакууме в [4] и обобщенного в [5] на задачу колебаний оболочек в среде — сжимаемой жидкости.

В соответствии с этим методом в (1.1) — (1.5) производятся замены коэффициентов и переменных, а также растяжение масштаба согласно равенствам (2.5) (где  $B_{0i}^\circ(x_1, x_2) = B_{0i}/\max|B_0|$ ,  $\eta^{-g} = \max|B_0|/(2E\mu_0)^{1/2}$ ) и равенствам

$$u_{1,2} = \eta^\circ u_{1,2}^\circ R, u_3 = \eta^d u_3^\circ R, \Phi = \eta^t \Phi_0 R (2E\mu_0)^{1/2}, \\ F = \eta^f F_0 R (2E\mu_0)^{1/2}, f = \eta^{t-p} f_0 (2E\mu_0)^{1/2}, x_i = R \eta^p \xi_i$$

Здесь  $p, r, g$  имеют тот же смысл, что и в п. 2, а  $c, d, t$  устанавливают взаимную асимптотику искомых функций и будут определены дальше.

Перечисленными заменами уравнения (1.1) — (1.5) приводятся к форме, в которой при фиксированных каким-либо образом значениях параметров  $(\kappa) = (c, d, t, k_m, p, r, g)$  взаимная асимптотика входящих в уравнения членов определяется степенями  $\chi_n$  введенных в (1.1) — (1.5) множителей  $j_n = \eta^{\chi_n}$ , где  $\chi_1 = -2p + c + k_1$ ,  $\chi_2 = 2r + c + k_1$ ,  $\chi_3 = -g - 1 - p + t + k_1$ ,  $\chi_4 = 1 - p$ ,  $\chi_5 = 2 - 4p + d + k_2$ ,  $\chi_6 = 2r + d + k_2$ ,  $\chi_7 = -g - 1 - p + t + k_2$ ,  $\chi_8 = a - 1 + g + t - p - r$ ,  $\chi_9 = g + t$ ,  $\chi_{10} = d$ ,  $\chi_{11} = c$ .

Для чисел  $\kappa$  подбираются формально непротиворечивые сочетания, удовлетворяющие условиям [4], смысл которых сводится к требованию, чтобы был возможен предельный (при  $\eta \rightarrow 0$ ) переход, приводящий к формально непротиворечивой предельной системе уравнений, получаемой из (1.1) — (1.5), если положить

$$j_n = j_{n_1} = 0 \quad (\chi_n > 0), \quad j_n = j_{n_2} = 1 \quad (\chi_n = 0) \\ j_n = j_{n_2} = 0 \quad (\chi_n > 0), \quad j_n = j_{n_2} = 1 \quad (\chi_n = 0) \quad (3.1)$$

Номер варианта будем определять цифрами  $N, n, q$  и обозначать  $B(N, n, q)$ . Первая цифра  $N$  принимает значения от единицы до четырех и определяется выбором формул для непротиворечивых сочетаний  $(c, d, k_1, k_2)$

$$N=1 - c=0, d=l, k_1=2p, k_2=2p-l, r=-p, g \leq g_1 \quad (3.2)$$

$$N=2 - c=l, d=0, k_1=2p-l, k_2=4p-2, r \geq 1-2p, g \leq g_2$$

$$N=3 - c=l - \min(2p, 2r), d=l - \min(2-4p, 2r), k_1=k_2=-l, r=a-1-p, g \leq g_3$$

$$N=4 - c=\max(0, l), d=0, k_1=k_2=2p-l, r=1/2(l-2p), g_2 < g \quad (g \neq g_1)$$

где  $l = -1 - g + t + p$ ,  $g_3 = 1/2 \max(-3+3p, -2a+1+p)$  и считается, что как минимум одно (любое) из двух последних соотношений, отвечающих  $N=2$ , должно содержать знак равенства.

К (3.2) надо добавить формулы для определения  $t, g_1, g_2$ . Их выбор определяется соотношением параметров  $p, r$ , и в зависимости от него задается третья цифра  $q$  в номере варианта. Ей придается значение:

$$q=1 \text{ при } p+r > a-1. \text{ При этом } t=1-a-g+p+r, g_1=1/2(p-a), g_2= \\ = -1/2(a+1)+p \quad (r \leq 1-2p), g_2=1/2(r-2-a)+2p \quad (r > 1-2p).$$

$$q=2 \text{ при } p+r \leq a-1. \text{ При этом } t=-g, g_1=1/2(p-1), g_2=3/2(p-1).$$

Соотношения, ограничивающие значения параметров  $r$  и  $g$  в (3.2) (последние два для каждого  $N$ ), задают части пространства параметров  $(p, r, g)$  (вообще говоря, ограниченные определенным образом плоскости), в которых соответствующие сочетания  $(c, d, k_1, k_2)$  непротиворечивы.

Переход к предельным системам осуществляется согласно правилу (3.1), где  $n_1, n_2, n_3$  при заданном  $N$  равны:

$$N=1 - n_1=4, 5; n_2=3, 8, 9, 10; n_3=1, 2, 6, 7, 11$$

$$N=2 - n_1=2, 4, 11; n_2=6, 7, 8, 9; n_3=1, 3, 5, 10$$

$$N=3 - n_1=4, 10, 11; n_2=1, 2, 5, 6; n_3=3, 7, 8, 9$$

$$N=4 - n_1=4, 5; n_2=1, 2, 8, 9, 11; n_3=3, 6, 7, 10$$

а множителям  $j_{n_2}$  должны быть присвоены значения

$$j_3=j_{10} = \begin{cases} 0, & g < g_1 \\ 1, & g = g_1 \end{cases}, \quad j_7 = \begin{cases} 0, & g < g_2 \\ 1, & g = g_2 \end{cases}, \quad j_{11} = \begin{cases} 0, & g_2 < g < g_1 \\ 1, & g_1 < g \end{cases} \quad (3.3)$$

$$(j_1, j_2) = \begin{cases} (0, 1), & r < -p \\ (1, 1), & r = -p \\ (1, 0), & r > -p \end{cases}, \quad (j_5, j_6) = \begin{cases} (0, 1), & r < 1-2p \\ (1, 1), & r = 1-2p \\ (1, 0), & r > 1-2p \end{cases}$$

$$(j_8, j_9) = \begin{cases} (0, 1), & r > 1-a-p \\ (1, 1), & r = 1-a-p \\ (1, 0), & r < 1-a-p \end{cases}$$

Это означает, что во всех вариантах с  $q=1$  значения  $(j_8, j_9) = (0, 1)$ , а в вариантах с  $q=2 - j_8=1$ . В вариантах, отвечающих  $N=3$ , всегда будем иметь  $(j_8, j_9) = (1, 1)$ , причем цифра  $q$  в этом случае может принимать единственное значение  $q=2$ .

Оставшаяся не определенной в номере варианта цифра  $n$  задается в зависимости от соотношения значений множителей  $j_{n_2}$  при заданном значении  $N$ . Это соответствие зададим следующими выражениями:  $B(1, 1, q) - j_3=j_{10}=0$ ;  $B(1, 2, q) - j_3=j_{10}=1$ ;  $B(2, 1, q) - j_6=1, j_7=0$ ;  $B(2, 2, q) - j_6=j_7=1$ ;  $B(2, 3, q) - j_6=0, j_7=1$ ;  $B(3, 1, 2) - j_2=j_6=1, j_1=j_5=0$ ;  $B(3, 2, 2) - j_1=j_6=1, j_5=0, j_2=0, 1$ ;  $B(3, 3, 2) - j_1=j_5=1, j_2=0, j_6=0, 1$ ;  $B(4, 1, q) - j_1=0, j_2=j_{11}=1$ ;  $B(4, 2, q) - j_1=1, j_2=j_{11}=0$ .

4. Получаемые из (1.1)–(1.5) предельные уравнения имеют вид: в вариантах  $B(N, n, 1)$ :

$$\gamma \Delta_s F = A \quad (4.1)$$

$$\Delta \Phi = 0, \quad (\Phi)_{s^+} - (\Phi)_{s^-} = F, \quad (\partial \Phi / \partial x_s)_{s^+} = (\partial \Phi / \partial x_s)_{s^-} \quad (4.2)$$

$$f = (\partial \Phi / \partial x_s) \quad (4.3)$$

в вариантах  $B(N, n, 2)$ :

$$j_8 \gamma \Delta_s F + i \lambda f = A \quad (4.4)$$

$$\Delta \Phi = 0, \quad (\Phi)_{s^+} - (\Phi)_{s^-} = F, \quad f = (\partial \Phi / \partial x_s) \quad (4.5)$$

где  $A$  означает соответствующую предельную форму правой части уравнения (1.3). К выписанным здесь уравнениям надо добавить соответствующие предельные формы уравнений (1.1)–(1.2), которые, а также  $A$ , могут быть записаны так:

для вариантов  $B(1, n, q)$ :

$$L_{n3} u_j + \lambda^2 u_k = -j_3 \beta B_{03} \partial F / \partial x_k \quad (4.5)$$

$$\lambda^2 u_3 = \beta B_{0j} \partial F / \partial x_j \quad (4.6)$$

$$A = i \lambda \frac{\partial}{\partial x_j} \left( j_{10} \frac{\beta}{\lambda^2} B_{0j} B_{0k} \frac{\partial F}{\partial x_k} - B_{03} u_j \right)$$

для вариантов  $B(2, n, q)$ :

$$h^2 a_0 \Delta_s^2 u_3 - j_6 \lambda^2 u_3 = -j_7 \beta B_{0j} \partial F / \partial x_j \quad (4.7)$$

$$L_{kj}u_j = -\beta B_{03} \partial F / \partial x_k \quad (4.8)$$

$$A = i\lambda \partial (B_{0j}u_j) / \partial x_j$$

для вариантов  $B(3, n, 2)$ :

$$j_1 L_{kj}u_j + j_2 \lambda^2 u_k = -\beta B_{03} \partial F / \partial x_k \quad (4.9)$$

$$j_3 h^2 a_0 \Delta_s^2 u_3 - j_6 \lambda^2 u_3 = -\beta B_{0j} \partial F / \partial x_j \quad (4.10)$$

$$A = 0$$

для вариантов  $B(4, n, q)$ :

$$j_1 L_{kj}u_j + j_2 \lambda^2 u_k = -\beta B_{03} \partial F / \partial x_k \quad (4.11)$$

$$\lambda^2 u_3 = \beta B_{0j} \partial F / \partial x_j \quad (4.12)$$

$$A = i \frac{\beta}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( B_{0j} B_{0k} \frac{\partial F}{\partial x_k} + j_{11} B_{03}^2 \frac{\partial F}{\partial x_j} \right)$$

(В (4.5)–(4.12) суммирование проводится по обоим индексам  $j, k=1, 2$ . Для вариантов  $B(3, n, 2)$  в (4.4) надо положить  $j_8=1$ .)

Здесь и ниже при сопоставлении формул (4.1)–(4.4) с (4.5)–(4.12) следует считать, что сохраненные в номерах вариантов буквенные обозначения  $N, n, q$  могут принимать любые оговоренные выше значения.

Каждая из приведенных предельных систем уравнений состоит, вообще говоря, из ряда подсистем, которые надо решать в определенной последовательности, зависящей от номера варианта. Определим эту последовательность следующими выражениями:

$$B(1, 1, 1) - [(4.5)]_s \rightarrow u_k, [(4.1)]_s \rightarrow F, (4.6) \rightarrow u_3 \quad (4.13)$$

$$B(1, 2, 1) - [(4.1), (4.5), (4.6)]_s \rightarrow u_m, F$$

$$B(2, 1, 1) - [(4.7)]_s \rightarrow u_3, [(4.1)]_s \rightarrow F, [(4.8)]_s \rightarrow u_k$$

$$B(2, 2, 1), B(2, 3, 1) - [(4.1), (4.7)]_s \rightarrow u_3, F; [(4.8)]_s \rightarrow u_k$$

$$B(4, 1, 1) - [(4.1)]_s \rightarrow F, (4.12) \rightarrow u_3, [(4.11)]_s \rightarrow u_k$$

$$B(4, 2, 1) - [(4.1)]_s \rightarrow F; (4.11), (4.12) \rightarrow u_m$$

$$B(1, 1, 2) - [(4.5)]_s \rightarrow u_k, [(4.4)]_v \rightarrow \Phi, F, f; (4.6) \rightarrow u_3 \quad (4.14)$$

$$B(1, 2, 2) - [(4.4), (4.5)]_v \rightarrow u_k, \Phi, F, f; (4.6) \rightarrow u_3$$

$$B(2, 1, 2) - [(4.7)]_s \rightarrow u_3, [(4.4)]_v \rightarrow \Phi, F, f; [(4.8)]_s \rightarrow u_k$$

$$B(2, 2, 2), B(2, 3, 2) - [(4.4), (4.7)]_v \rightarrow u_k, \Phi, F, f; [(4.8)]_s \rightarrow u_3$$

$$B(4, 1, 2) - [(4.4)]_v \rightarrow \Phi, F, f; (4.12) \rightarrow u_3, [(4.11)]_s \rightarrow u_k$$

$$B(4, 2, 2) - [(4.4)]_v \rightarrow \Phi, F, f; (4.11), (4.12) \rightarrow u_m$$

$$B(3, 1, 2) - [(4.4)]_v \rightarrow \Phi, F, f; (4.9), (4.11) \rightarrow u_m \quad (4.15)$$

$$B(3, 2, 2) - [(4.4)]_v \rightarrow \Phi, F, f; (4.10) \rightarrow u_3, [(4.9)]_s \rightarrow u_k$$

$$B(3, 3, 2) - [(4.4)]_v \rightarrow \Phi, F, f; [(4.9)]_s \rightarrow u_k, [(4.10)]_s \rightarrow u_3$$

К соотношениям (4.13) необходимо присоединить выражения  $[(4.2)]_s \rightarrow \Phi, (4.3) \rightarrow f; k, m$  пробегает значения  $k(1, 2), m(1, 2, 3)$ ; выражение  $[(a), (b)] \rightarrow c, d$  означает, что величины  $c, d$  могут быть определены совместным интегрированием уравнений (a) и (b), а выражение  $(a) \rightarrow b$  означает, что величина  $b$  определяется прямыми действиями из формулы (a); индекс  $s$  или  $v$  при [...] означает область ( $S$  или  $V$ ), в которой надо вести интегрирование соответствующих уравнений. Последовательность рассмотрения уравнений, указанная в (4.13)–(4.15), должна соблюдаться.

При интегрировании на  $S$  уравнений, полученных предельным переходом из (1.1)–(1.3), к ним надо присоединить в каждой точке края  $\Gamma$  пластины соответственно по два тангенциальных (для (1.1)), два нормальных (для (1.2)) краевых условия теории оболочек и пластин [3] и по одному электромагнитному условию, выбор которого обсуждается дальше.

При интегрировании уравнения Лапласа (1.4) в  $V$  должно быть также выполнено условие ограниченности на бесконечности.

Электромагнитное условие на  $\Gamma$  выбирается так, чтобы ликвидировать главную особенность решаемой в последующем или в рамках той же предельной подсистемы задачи интегрирования уравнения Лапласа в  $V$ . Выбор этого условия в произвольном случае требует дополнительного исследования. В двух случаях оно может быть сформулировано в исходном приближении точности, исходя из условий [2]:  $\partial F/\partial \tau|_{\Gamma}=0$  (или, что то же самое,  $F|_{\Gamma}=0$ ) для пластины, закрепленной или имеющей свободный край, контактирующий с непроводящей средой, и  $\partial F/\partial n|_{\Gamma}=0$  для пластины, заделанной в идеально проводящем материале. (Здесь  $\tau$  и  $n$  — касательная и нормаль к  $\Gamma$ .) При этом, как следует из (1.6), с точностью  $O(\eta^{1-p})$  будут выполняться равенства  $(\mathbf{I} \cdot \mathbf{n})_{\Gamma}=0$  и  $(\mathbf{e} \times \mathbf{n})_{\Gamma}=0$ , означающие соответственно отсутствие нормальной компоненты тока и касательной компоненты электрического поля на краю пластины.

5. Как и в [4, 5], для решения задачи на собственные значения уравнений (1.4) — (1.5) могут быть построены итерационные процессы, заключающиеся в последовательном решении предельных уравнений, отвечающих тем или иным из сформулированных в п. 4 вариантов. В рамках каждого итерационного процесса можно выделить головную задачу, которая решается первой, состоит в интегрировании некоторых (головных) уравнений и должна допускать нетривиальные решения при однородных граничных условиях. Возникающие при ее решении невязки в граничных условиях могут быть сняты решением определенных дополнительных задач.

Приведенные в п. 4 варианты предельных уравнений позволяют построить ряд итерационных процессов. Ограничимся рассмотрением только соответствующих головных задач, условившись считать, что они могут иметь нетривиальные решения, если в соответствующих уравнениях среди коэффициентов содержится частотный параметр  $\lambda$  (это условие выполняется для всех вариантов, кроме  $B(2, 3, 2)$ ). Соответствующие головные задачи определяются выражениями, стоящими первыми после тире в (4.13) — (4.15). Выпишем их для следующих шести вариантов:

$$1. L_{kj}u_j + \lambda^2 u_k = 0 \quad B(1, 1, q) \quad (5.1)$$

$$2. h^2 a_0 \Delta_s^2 u_3 - \lambda^2 u_3 = 0 \quad B(2, 1, q)$$

$$3. \gamma \Delta_s F + i \lambda f = 0, \quad \Delta \Phi = 0, \quad (\Phi)_s^+ - (\Phi)_s^- = F, \quad f = (\partial \Phi / \partial x_s)_s \quad B(3, n, 2)$$

$$4. \lambda^2 f - \beta \frac{\partial}{\partial x_j} \left( B_{0j} B_{0k} \frac{\partial F}{\partial x_k} + j_{11} B_{03}^2 \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) = 0, \quad \Delta \Phi = 0,$$

$$(\Phi)_s^+ - (\Phi)_s^- = F, \quad f = (\partial \Phi / \partial x_s)_s \quad B(4, n, 2)$$

$$5. \gamma \Delta_s F - i \frac{\beta}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( B_{0j} B_{0k} \frac{\partial F}{\partial x_k} + j_{11} B_{03}^2 \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) = 0 \quad B(4, n, 1)$$

$$6. h^2 a_0 \Delta_s^2 u_3 = -\beta B_{0j} \partial F / \partial x_j, \quad \gamma \Delta_s F = i \lambda \partial (B_{0j} u_3) / \partial x_j \quad B(2, 3, 1)$$

Сравнение полученного результата с результатами п. 2 показывает, что области определения вариантов (5.1) совпадают с приведенными под соответствующими номерами областями определения (2.8) приближенных решений (2.4) частотного уравнения (2.3), множитель  $j_{11}$  имеет тот же смысл, что и  $j'$  в (2.4), а сами формулы (2.4) могут быть получены непосредственной подстановкой (2.1), (2.2) в соответствующие уравнения (5.1). Это, в частности, означает, что при равных значениях относительной толщины  $\eta$  асимптотики собственных значений задач колебаний пластины конечных размеров и бесконечной пластины, приведенные в (5.1) и (2.4) под одинаковыми номерами, совпадут. Также можно утверждать, что для пластины конечных размеров свойства собственных значений будут такими же, что и в формулах (2.4). Именно, для колебаний 1, 2 и 4-го вариантов будет иметь место асимптотическое неравенство  $\text{Re } \lambda \gg \text{Im } \lambda$ , что означает преимущественную осцилляцию соответствующих собственных решений во времени, а для 3, 5 и 6-го вариантов —  $\text{Im } \lambda \gg \text{Re } \lambda$ , что означает преобладание затухания колебаний во времени над осцилляцией (здесь имеется в виду, что все точные значения корней уравнения (2.3) комплексны, а (2.4) представляют собой их исходные асимптотические приближения). Асимптотики собственных значений задач (5.1) определяются последней формулой (2.5), где  $r$  задается первой из соответствующих формул (2.8).

Возвращаясь еще раз к рассмотренному в п. 2 примеру, отметим, что колебания для первых двух вариантов могут иметь место и при более высоких частотах, отвечающих значениям  $-1 < r \leq -0,3$ , где теория оболочек [4] продолжает оставаться справедливой. Однако решение задачи магнитоупругости здесь уже надо строить основываясь на уравнениях, отличных от (1.1) — (1.5), которые при таких частотах становятся неприменимыми, так как гипотезы магнитоупругости [1], положенные в их основу, при  $r < a - 2$  нарушаются.

Не выписанные здесь головные уравнения, отвечающие вариантам  $B(1, 2, q)$  и  $B(2, 2, q)$ , включаются в рассмотрение весьма редко (на фигуре им соответствуют точки  $A_3$  и  $B_{1, 2, 3}$ ), так как областью их определения в пространстве  $(p, r, q)$  являются линии пересечения плоскостей, задающих области определения других вариантов. Для них приближенное решение задачи на собственные значения оказывается, вообще говоря, более сложным. Головная задача варианта  $B(2, 3, 2)$  собственных значений не имеет, а сам вариант входит в итерационные процессы только при решении дополнительных краевых задач.

Как видно, во всех вариантах множитель  $j_4=0$ . Это значит, что в исходных уравнениях (1.1)–(1.5) всегда можно отбросить слагаемое  $2hf$  в сравнении с  $F$ . Совершаемая при этом погрешность равна  $\eta^{1-p}$ . То же относится и к формулам (1.6).

В пределах любой последовательности (4.13), отвечающей вариантам  $B(N, n, 1)$ , все величины  $u_m, F$  всегда определяются вначале путем решения некоторых уравнений на поверхности  $S$  и только потом ставится задача (4.2) определения  $\Phi$ , заключающаяся в интегрировании трехмерного уравнения Лапласа при заданном перепаде значений функции и при непрерывной нормальной производной на  $S$ . Это значит, что решение любой задачи определения  $u_m, F$  и выражаемых через них величин, обладающее свойством  $p+r>a-1$ , может быть найдено в двумерной постановке без рассмотрения поля в окружающей среде (это свойство практически всегда присуще первым частотам поперечных колебаний тонких пластин конечной проводимости; для этого достаточно, чтобы удовлетворялось неравенство  $(\rho/E)^{1/2}R/\sqrt{(2\mu_0\sigma h^2)}>1$ ). Решения, отвечающие вариантам  $B(N, n, 2)$ , для определения всех величин  $u_m, F$  требуют неизбежного рассмотрения трехмерных задач.

Представленные результаты получены в предположении о том, что стационарное магнитное поле  $\mathbf{B}$  наклонно по отношению к поверхности  $S$ . Если какая-либо из компонент  $\mathbf{B}$  тождественно равна нулю, то классификация собственных решений меняется. Так, из (2.3) следует, что нормальное ( $B_{01}=B_{02}=0$ ) и тангенциальное ( $B_{03}=0$ ) магнитные поля не оказывают влияния на частоты поперечных и тангенциальных колебаний соответственно. Дополнительное исследование, выходящее за рамки данной работы, показывает, что это влияние проявляется в членах порядка  $O(\eta^{2-2p})$ , отброшенных при переходе от уравнений [1, 2] к уравнениям (1.1)–(1.5), и сказывается при магнитных полях, значительно больших (вообще говоря, в  $\eta^{-1}$  раз), чем в случае наклонных магнитных полей.

Автор благодарит А. Л. Гольденвейзера за внимание к работе над статьей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.
2. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 2, с. 216–228.
3. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
4. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 384 с.
5. Радовинский А. Л. Классификация свободных колебаний оболочек, содержащих жидкость.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 6, с. 124–135.

Москва

Поступила в редакцию  
25.IV.1985