

УДК 539.4:621.81

**ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ,  
ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ УДАРЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫМ БРУСОМ  
ПО НИТИ**

**ЭРГАШОВ М.**

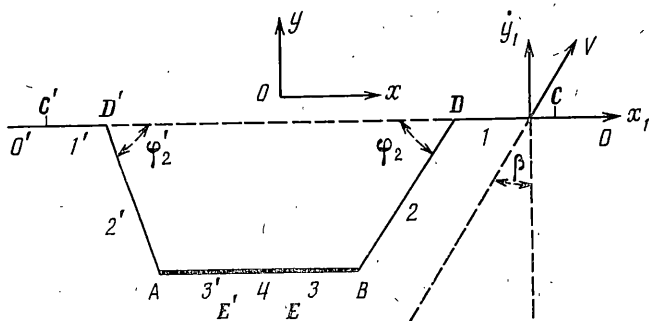
Теория абсолютно гибкой нити используется в различных теоретических исследованиях и находит широкое применение на практике [1]. В публикуемой работе дается постановка и решение задачи о поперечном ударе прямоугольным бруском по гибкой линейно-упругой нити. Рассматриваются случаи взаимодействия продольных и поперечных волн на различных участках нити. Приводятся приближенные формулы для определения деформации и угла излома.

1. Пусть бесконечно длинная натянутая первоначально линейно-упругая нить налетает на абсолютно гладкую поверхность прямоугольного бруса со скоростью  $V$  как показано на фиг. 1. Скорость  $V$  образует угол  $\beta$  с нормалью к брусу. Рассматривается схема взаимодействия при условии контакта нити с брусом по всей его длине  $l$  и скольжения нити вдоль бруса без трения. В результате удара в нити возникают четыре продольные волны  $C, C', E, E'$  (фиг. 1), две поперечные  $D, D'$  и два стационарных разрыва  $A$  и  $B$  [1–3]. Относительно стационарных разрывов  $A$  и  $B$  происходит движение нити, как через неподвижные блоки [3]. Указанными волнами и стационарными разрывами нить разбивается на девять областей — постоянных параметров. Эти области на фиг. 1 обозначены следующим образом. Области  $0'$  и  $0$  — участки нити, расположенные соответственно слева и справа от фронтов  $C'$  и  $C$ ,  $1$  и  $1'$  — участки между фронтами  $C, D$  и  $C', D'$ ,  $2-2'$  — участки между фронтами  $D, B$  и  $D', A$ ,  $3-3'$  — участки между фронтами  $E, B$  и  $E', A$ , область  $4$  — участок нити движущимся между фронтами  $E$  и  $E'$ . Области  $0$  и  $0'$  соответствуют начальному движению нити со скоростью  $V$  без деформации. В областях  $0$  и  $0'$  нормальная к нити составляющая скорости такая же, как и в областях  $C$  и  $C'$ , при переходе через продольные волны  $C$  и  $C'$  меняются только касательные к нити составляющие скорости и деформации. Области  $2-2'$  являются областями чисто продольного движения нити, т. е. скорости нити направлены вдоль отрезков  $BD$  и  $D'A$  соответственно. Области  $3-3'$  также являются областями чисто продольного движения, и скорости движения нити в этих областях направлены вдоль отрезков  $EB$  и  $AE$ . В области  $4$  нить не деформирована и имеет относительную скорость  $V \sin \beta$  вдоль бруса.

На поперечных волнах  $D$  и  $D'$  деформация не терпит разрывов, так же как и на стационарных разрывах  $A$  и  $B$ , в силу отсутствия трения. Следовательно, в областях  $1-3$  и  $1'-3'$  одинаковая деформация:  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_1'$  соответственно. Описанная схема движения нити осуществляется до момента взаимодействия волн  $E, E'$ . Динамические и кинематические условия [1–4], имеющие место на фронтах продольных волн  $C, E$ , поперечной волн  $D$  и стационарного разрыва  $B$ , образуют замкнутую систему для определения всех неизвестных параметров в областях  $1-3$ . На фронтах  $C, D$  и  $E$  соответственно имеем

$$x_1 \dot{-} - V \sin \beta = -a\varepsilon_1, \quad y_1 \dot{-} - V \cos \beta = 0 \quad (1.1)$$

$$x_2 \dot{-} - x_1 \dot{-} = a\sqrt{1+\varepsilon_1} \varepsilon_1 (1 - \cos \varphi_2) \quad (1.2)$$



Фиг. 1

$$\begin{aligned} y_2^* - y_1^* &= a\sqrt{(1+\varepsilon_1)\varepsilon_1} \sin \varphi_2 \\ x_3^* - V \sin \beta &= a\varepsilon_1 \end{aligned} \quad (1.3)$$

В точке  $B$  равны касательные к нити составляющие скорости в областях 2 и 3, а нормальные составляющие равны нулю.

Следовательно, в точке  $B$

$$x_2^* = x_3^* \cos \varphi_2, \quad y_2^* = x_3^* \sin \varphi_2 \quad (1.4)$$

В уравнениях (1.1) и (1.4) (и дальше)  $x^*$ ,  $y^*$  — касательное и нормальное к нити составляющие скорости частиц,  $\varphi$  — угол излома нити,  $\varepsilon$  — деформация. Параметры движения в рассматриваемых областях нити снабжены соответствующими индексами. Исключая скорости из (1.1) — (1.4), получаем систему двух уравнений для определения неизвестных  $\varepsilon_1$  и  $\varphi_2$ :

$$\cos \varphi_2 = A_- / A_+, \quad \sin \varphi_2 = V^* \cos \beta / A_+ \quad (1.5)$$

$$A_{\pm} = V^* \sin \beta + \sqrt{(1+\varepsilon_1)\varepsilon_1} \pm \varepsilon_1$$

где  $V^* = V/a$ . В дальнейшем звездочку над  $V$  будем опускать.

Возведя в квадрат оба уравнения системы (1.5) и складывая, получим уравнение для определения деформации  $\varepsilon_1$ , которое необходимо решать численно. С другой стороны, можно выразить  $\varepsilon_1$  и  $V$  через угол  $\varphi_2$ , что удобно для численного расчета. Действительно, из (1.5) получим

$$\sqrt{(1+\varepsilon_1)\varepsilon_1} + \varepsilon_1 = V(\cos \beta - \sin \varphi_2 \sin \beta) \sin^{-1} \varphi_2 \quad (1.6)$$

Из (1.5), используя (1.6), найдем

$$\sqrt{(1+\varepsilon_1)\varepsilon_1} - \varepsilon_1 = V \cos(\varphi_2 + \beta) \sin^{-1} \varphi_2 \quad (1.7)$$

Перемножая (1.6) и (1.7), найдем

$$\varepsilon_1 = V^2 (\cos \beta - \sin \varphi_2 \sin \beta) \cos(\varphi_2 + \beta) / \sin^2 \varphi_2 \quad (1.8)$$

Из (1.7) — (1.8) получим

$$2\varepsilon_1 = V \cos \beta (1 - \cos \varphi_2) \sin^{-1} \varphi_2 \quad (1.9)$$

Из (1.8) и (1.9) имеем окончательно

$$V = \frac{\cos \beta (1 - \cos \varphi_2) \sin \varphi_2}{2 \cos(\varphi_2 + \beta) (\cos \beta - \sin \varphi_2 \sin \beta)} \quad (1.10)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\cos^2 \beta (1 - \cos \varphi_2)^2}{4 \cos(\varphi_2 + \beta) (\cos \beta - \sin \varphi_2 \sin \beta)} \quad (1.11)$$

Расчеты удобно вести обратным методом, задавая  $\varphi_2$  и определяя  $\varepsilon_1$  и соответствующую скорость удара  $V$ . Решение задачи в областях  $I' - 3'$  ( $V'$ ,  $\varepsilon_1'$ ) получается заменой угла  $\beta$  на  $-\beta$ .

Проведенные числовые расчеты и исследования решений (1.10)–(1.11) и аналогичных формул для  $V'$  и  $\varepsilon_1'$  позволили установить, что с ростом угла  $\beta$  при фиксированной  $V$  угол  $\varphi_2$  убывает, деформация  $\varepsilon_1$  растёт, угол  $\varphi_2'$  растёт, а деформация  $\varepsilon_1'$  убывает.

В случае нормального поперечного удара брусом ( $\beta=0$ ,  $\varepsilon_1=\varepsilon_1'$ ,  $\varphi_2=\varphi_2'$ ) решение принимает вид

$$V = \frac{(1-\cos \varphi_2) \sin \varphi_2}{2 \cos \varphi_2}, \quad \varepsilon_1 = \frac{(1-\cos \varphi_2)^2}{4 \cos \varphi_2} \quad (1.12)$$

В случае косоугольного удара точкой по нити без трения [1] области 3, 4 и 3' (фиг. 1) исчезают, а условие в точке удара — равенство касательных к нити составляющих скорости, причем деформация левой и правой частей нити от точки удара одинакова. Напишем решение задачи о косом ударе точкой по нити, обозначая индексом  $t$  параметры движения нити при точечном ударе

$$\operatorname{ctg} \varphi_t' = \operatorname{ctg} \varphi_t - 2 \operatorname{ctg} \beta \quad (1.13)$$

$$V_t = \frac{2(1+\eta_0)}{\cos \beta [1 - (1+\eta_0)^2] \eta_1}, \quad \varepsilon_t = \frac{(1+\eta_0)^2}{1 - (1+\eta_0)^2}$$

$$\eta_0 = \frac{2(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{ctg} \varphi_t) \sin \varphi_t \sin \varphi_t'}{\sin \varphi_t + \sin \varphi_t'}$$

$$\eta_1 = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi_t} + \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi_t'}$$

В случае нормального точечного удара ( $\beta=0$ ,  $\varphi_t=\varphi_t'$ ) решение (1.13) принимает вид

$$V_t = \frac{(1-\cos \varphi_t) \sin \varphi_t}{1 - (1-\cos \varphi_t)^2}, \quad \varepsilon_t = \frac{(1-\cos \varphi_t)^2}{1 - (1-\cos \varphi_t)^2} \quad (1.14)$$

Сравнивая решения (1.12)–(1.14), приходим к выводу: деформация нити при нормальном ударе брусом меньше, чем при точечном, а угол излома больше. Пусть  $\varphi_2=\varphi_t$ . При этом из (1.12)–(1.14) будем иметь  $2 \cos \varphi_2 - 1 + (1-\cos \varphi_t)^2 > 0$ . Это неравенство безусловно выполняется для любого  $\varphi_t=\varphi_2 \neq 0$ .

Следовательно, при  $\varphi_2=\varphi_t$  выполняются условия  $V < V_t$  и  $\varepsilon_1 < \varepsilon_t$ . Для величин  $\varepsilon_t$ ,  $\varphi_t$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varphi_2$  можно получить приближенные оценки. В случае нормального точечного удара и малых деформаций [1]:  $\varepsilon_t \approx 4^{-1/3} (V)^{4/3}$ ,  $\operatorname{tg} \varphi_t \approx 1,25 (V)^{1/3}$ .

В случае нормального удара брусом  $\varepsilon_1 \approx (16)^{-1/3} (V)^{4/3}$ ,  $\operatorname{tg} \varphi_2 \approx 1,25 (2V)^{1/3}$ .

Следовательно, деформация при нормальном поперечном ударе брусом в этом приближении меньше, чем при точечном ударе в  $4^{1/3}$  раза, а угол излома больше в  $2^{1/3}$  раза.

**2. Взаимодействие продольных волн  $E$  и  $E'$ .** В результате взаимодействия продольных волн  $E$  и  $E'$  возникают две отраженные продольные волны  $F$  и  $F'$  (фиг. 2). Область 4 исчезает и образуется область 5. На фронтах  $F$  и  $F'$  имеют место следующие условия:

$$x_5^* - x_3^* = a(\varepsilon_1 - \varepsilon_5) \quad (2.1)$$

$$x_5^{**} - x_3^{**} = a(\varepsilon_5 - \varepsilon_1') \quad (2.2)$$

Уравнения (2.1)–(2.2) напомним в виде

$$x_5^* = V \sin \beta + a\varepsilon_1 - a\varepsilon_5 + a\varepsilon_1 \quad (2.3)$$

$$x_5^{**} = V \sin \beta - a\varepsilon_1' + a\varepsilon_5' - a\varepsilon_1' \quad (2.4)$$

Учитывая, что  $\varepsilon_5 = \varepsilon_5'$ ,  $x_5^* = x_5^{**}$  из (2.3), (2.4), получим  $\varepsilon_5 = \varepsilon_1 + \varepsilon_1'$ .

В случае нормального поперечного удара имеем  $x_5^* = x_5^{**}$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1'$ ,  $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$ . Взаимодействие продольных волн только в этом случае происходит в середине  $(l/2)$  отрезка  $AB$ .

**3. Взаимодействие волн  $F$  и  $F'$  со стационарными разрывами  $A$  и  $B$ .** Отраженные продольные волны  $F$  и  $F'$  проходят через стационарные

A
3'
F'
5
F
3
B

Фиг. 2

разрывы  $B$  и  $A$ , как через неподвижные блоки. Ввиду отсутствия трения на фронтах  $B$  и  $A$  деформация в областях  $6$  и  $6'$  (фиг. 3) останется постоянной и равной  $\varepsilon_5$ . Скорости движения нити в этих областях по-прежнему направлены вдоль отрезков  $BD$  и  $AD'$ . Для определения скоростей  $x_6, y_6, x_6', y_6'$  имеем уравнения

$$\begin{aligned} x_6 &= x_5 \cos \varphi_2 = [V \sin \beta - a(\varepsilon_5 - 2\varepsilon_1)] \cos \varphi_2 \\ y_6 &= x_5 \sin \varphi_2 = [V \sin \beta - a(\varepsilon_5 - 2\varepsilon_1)] \sin \varphi_2 \\ x_6' &= x_5' \cos \varphi_2' = [V \sin \beta + a(\varepsilon_5' - 2\varepsilon_1')] \cos \varphi_2' \\ y_6' &= x_5' \sin \varphi_2' = [V \sin \beta + a(\varepsilon_5' - 2\varepsilon_1')] \sin \varphi_2' \end{aligned}$$

**4. Взаимодействие продольных волн  $F$  и  $F'$  с поперечными волнами  $D$  и  $D'$ .** Так как скорость продольных волн в линейно-упругой нити больше, чем поперечных, продольные волны  $F$  и  $F'$  догонят соответственно поперечные волны  $D$  и  $D'$ . В результате взаимодействия продольной волны  $F$  с поперечной волной  $D$  (будем рассматривать только правую часть) возникают две продольные  $M$  и  $N$  (фиг. 4) и две поперечные  $G, H$  волны, разделяющие нить на участки постоянных параметров  $7, 8$  и  $9$ . Деформация в областях  $7, 8, 9$  одинакова; обозначим ее  $\varepsilon_8$ . Скорость  $x_7$  не равна  $x_1$  и подлежит определению, а нормальные к нити составляющие скорости  $y_7$  и  $y_1$  одинаковы, т. е.  $y_7 = y_1 = V \cos \beta$ . Области  $6$  и  $9$  являются областями чисто продольного движения, а область  $8$  — областью продольно-поперечного движения. Угол излома  $\varphi_8$  (фиг. 4) также подлежит определению. Динамические и кинематические условия на фронтах продольных и поперечных волн  $M, N, G, H$  имеют вид соответственно

$$x_7 - x_1 = a(\varepsilon_1 - \varepsilon_8), \quad y_7 = y_1 = V \cos \beta \quad (4.1)$$

$$x_9 - x_6 = a(\varepsilon_8 - \varepsilon_5) \cos \varphi_2 \quad (4.2)$$

$$y_9 - y_6 = a(\varepsilon_8 - \varepsilon_5) \sin \varphi_2$$

$$x_8 - x_7 = a\sqrt{(1+\varepsilon_8)\varepsilon_8}(1 - \cos \varphi_8) \quad (4.3)$$

$$y_8 - y_7 = a\sqrt{(1+\varepsilon_8)\varepsilon_8} \sin \varphi_8$$

$$x_8 - x_9 = a\sqrt{(1+\varepsilon_8)\varepsilon_8}(\cos \varphi_8 - \cos \varphi_2) \quad (4.4)$$

$$y_8 - y_9 = a\sqrt{(1+\varepsilon_8)\varepsilon_8}(\sin \varphi_8 - \sin \varphi_2)$$

Исключая неизвестные скорости из системы (4.1)–(4.4), получим два уравнения относительно  $\varepsilon_8, \varphi_8$ :

$$\begin{aligned} V \sin \beta - \varepsilon_8 - \sqrt{(1+\varepsilon_8)\varepsilon_8}(\cos \varphi_8 - 1) = \\ = [\varepsilon_1 - \varepsilon_1' + V \sin \beta] \cos \varphi_2 + (\varepsilon_8 - \varepsilon_5) \cos \varphi_2 + \\ + \sqrt{(1+\varepsilon_8)\varepsilon_8}(\cos \varphi_8 - \cos \varphi_2) \end{aligned} \quad (4.5)$$

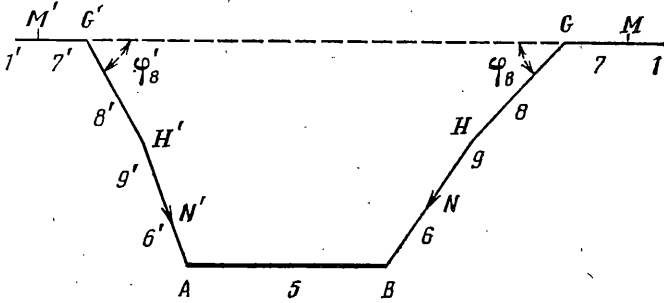
$$\begin{aligned} V \cos \beta - \sqrt{(1+\varepsilon_8)\varepsilon_8} \sin \varphi_2 - (\varepsilon_8 - \varepsilon_5) \sin \varphi_2 = \\ = [\varepsilon_1 - \varepsilon_1' + V \sin \beta] \sin \varphi_2 + \sqrt{(1+\varepsilon_8)\varepsilon_8}(\sin \varphi_8 - \sin \varphi_2) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Исключая из уравнений (4.5), (4.6) деформацию  $\varepsilon_8$ , как в п. 1, получим уравнение относительно  $\varphi_8$ :

$$\begin{aligned} & [\cos \varphi_8 \sin \varphi_2 - (1 + \cos \varphi_2) \sin(\varphi_2 - \varphi_8)] \eta_0' = \\ & = 2[\eta_1' \sin(\varphi_2 - \varphi_8) + V \cos(\varphi_2 + \beta) \cos \varphi_8] \eta_2' \eta_3 \\ \eta_0' &= V \cos(\varphi_2 + \beta) (1 + \cos \varphi_2 - \cos \varphi_8) + \eta_1' [\sin \varphi_2 - \sin(\varphi_2 - \varphi_8)] \\ & \eta_1' = V \sin \beta (1 - \cos \varphi_2) + 2\varepsilon_1' \cos \varphi_2 \\ & \eta_2' = \eta_1' [\sin \varphi_2 - 2 \sin(\varphi_2 - \varphi_8)] + V \cos(\varphi_2 + \beta) \\ & \eta_3 = 1 + \cos \varphi_2 - \cos \varphi_8 \end{aligned}$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Аналогичным путем можно получить уравнение относительно  $\varphi_8$  (фиг. 4).

Сравнивая решения рассмотренных в пп. 1–4 задач, легко установить справедливость следующих утверждений:  $\varepsilon_1 + \varepsilon_1' > \varepsilon_8 > \varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_1 + \varepsilon_1' > \varepsilon_8' > \varepsilon_1'$ . Здесь  $\varepsilon_8'$  — деформация нити в областях 7', 8', 9' (фиг. 4). В случае нормального удара ( $\beta=0$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1'$ ,  $\varepsilon_8 = \varepsilon_8'$ ) получим  $2\varepsilon_1 > \varepsilon_8 > \varepsilon_1$ .

Автор выражает глубокую благодарность Х. А. Рахматулину и В. Ф. Максимова за постановку задачи и обсуждения результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: Физматгиз, 1961. 399 с.
2. Рахматулин Х. А., Максимов В. Ф., Эргашов М. Удар по нити прямоугольным бруском. — В кн.: Взаимодействие волн в деформируемых средах. М.: Изд-во МГУ, 1984, с. 5–11.
3. Максимов В. Ф. Взаимодействие поперечной волны с геометрическим изломом линейно-упругой нити. — В кн.: Труды кафедры газовой и волновой динамики МГУ. М.: Изд-во МГУ, 1975, вып. 1, с. 116–120.
4. Новацкий В. К. Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1978. 307 с.

Андижан

Поступила в редакцию  
26.XII.1985