

УДК 539.3:534.1

ВЫПУЧИВАНИЕ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ
ОБОЛОЧЕК
ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ ПО ТЕОРИИ УПРОЧНЕНИЯ¹

ПОШИВАЛОВ В. П.

В [1, 2] дана постановка задачи устойчивости и выпучивания при ползучести стержней, пластин и оболочек, основанная на использовании теории упрочнения. При этом предполагалось, что в процессе ползучести напряженное состояние во времени состоит из основного и некоторого возмущенного. Это допущение позволило линеаризовать физические соотношения и привести задачу об определении прогибов и напряжений пологой оболочки в условиях ползучести к системе двух нелинейных уравнений относительно прогиба и функции напряжений, зависящих от координат на срединной поверхности и времени [3]. В публикуемой работе данная постановка распространена на задачу выпучивания подкрепленных оболочек, когда учитывается двухосное напряженное состояние обшивки и одноосное — подкрепляющих элементов. Оболочка приводится к некоторой эквивалентной конструктивно ортотропной, при этом учитываются деформации ползучести как в обшивке, так и в перекрестном наборе подкреплений. Исследуется процесс выпучивания вафельной цилиндрической оболочки при комбинированном нагружении в условиях ползучести. Рассмотрено два варианта решения, когда в качестве связи между напряжениями и деформациями принята теория упрочнения в деформационной форме и в форме теории течения.

1. Теория деформаций. Пусть уравнение состояния при ползучести обшивки имеет вид

$$\dot{p}_i = g(p_i, \sigma_i) \sigma_i \quad (1.1)$$

Между составляющими тензора деформаций ε_{ij} и дивергента напряжений σ_{ij}^* обшивки имеют место соотношения теории деформаций

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= {}^3/2 \varepsilon_{ij} / \sigma_i \sigma_{ij}^*, & p_i &= \varepsilon_i - \sigma_i / E \\ \varepsilon_i^2 &= {}^2/3 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}, & \sigma_i^2 &= {}^3/2 \sigma_{ij}^* \sigma_{ij}^* \end{aligned} \quad (1.2)$$

Для подкрепляющих элементов в направлении $x = \text{const}$ (стрингеров) аналогично принимается

$$\dot{p}_{i1} = g_1(p_{i1}, \sigma_{i1}) \sigma_{i1} \quad (1.3)$$

$$\varepsilon_{i1} = \varepsilon_{i1} / \sigma_{i1} \sigma_{i1}, \quad p_{i1} = \varepsilon_{i1} - \sigma_{i1} / E, \quad \varepsilon_{i1}^2 = \varepsilon_{i1}^2, \quad \sigma_{i1}^2 = \sigma_{i1}^2 \quad (1.4)$$

где $\varepsilon_i, p_i, \sigma_i, \varepsilon_{i1}, p_{i1}, \sigma_{i1}$ — интенсивности деформаций, скоростей деформаций ползучести и напряжений соответственно обшивки и стрингеров, σ_i — напряжения в стрингерах, E — модуль упругости; материал обшивки и подкреплений считается несжимаемым.

Для подкреплений в направлении $y = \text{const}$ (шпангоутов) в формулах (1.3) и (1.4) индексы 1 заменяются на 2.

Для зависимостей вида (1.1) — (1.4) в [4] получена система нелинейных интегродифференциальных уравнений для прогиба w и функций перемещений u и v при обычных предположениях относительно деформирования подкрепленных оболочек

$${}^2/3 B (2\delta e_{11,x} + \delta e_{22,x} + \delta e_{12,y}) / (1 + \xi) + BL_3 (\alpha_{11} Q_{,x} + \alpha_{12} Q_{,y}) +$$

¹ Результаты работы были доложены на II Всесоюзной конференции «Ползучесть в конструкциях». Новосибирск, ноябрь 1984 г.

$$\begin{aligned}
& +L_1[(EF_1/l_1)\delta e_{11,x}-(ES_1/l_1)(w-w_0)_{,xxx}] = 0 \quad (1.5) \\
& {}^2/3B(2\delta e_{22,y}+\delta e_{11,y}+\delta e_{12,x})/(1+\xi)+BL_3(\alpha_{12}Q_{,x}+\alpha_{22}Q_{,y})+ \\
& +L_2[(EF_2/l_2)\delta e_{22,y}-(ES_2/l_2)(w-w_0)_{,yyy}] = 0 \\
& -D\{(1+\xi)^{-1}\Delta\Delta(w-w_0)+{}^3/4L_3[\Lambda\Lambda(w-w_0)]\}+ \\
& +L_1[(ES_1/l_1)\delta e_{11,xxx}-(EI_1/l_1)(w-w_0)_{,xxxx}] + \\
& +L_2[(ES_2/l_2)\delta e_{22,yyy}-(EI_2/l_2)(w-w_0)_{,yyyy}] + \\
& +B(\Lambda w-\alpha_{11}/R_1-\alpha_{22}/R_2)L_3(Q)+(w_{,xxx}-1/R_1)L_1[(EF_1/l_1)\delta e_{11}- \\
& -(ES_1/l_1)(w-w_0)_{,xxx}] + (w_{,yyy}-1/R_2)L_2[(EF_2/l_2)\delta e_{22}- \\
& -(ES_2/l_2)(w-w_0)_{,yyy}] + {}^2/3B\{[2(w_{,xxx}-1/R_1)+(w_{,yyy}-1/R_2)]\delta e_{11}+ \\
& +[2(w_{,yyy}-1/R_2)+(w_{,xxx}-1/R_1)]\delta e_{22}+2w_{,xy}\delta e_{12}\}/(1+\xi)+ \\
& +2h\sigma_i\Lambda w+(\sigma_1F_1/l_1)w_{,xxx}+(\sigma_2F_2/l_2)w_{,yyy}=0 \\
& \delta e_{11}=u_{,x}+(w-w_0)/R_1+{}^1/2(w_{,x}^2-w_{0,x}^2) \\
& \delta e_{22}=v_{,y}+(w-w_0)/R_2+{}^1/2(w_{,y}^2-w_{0,y}^2) \\
& \delta e_{12}={}^1/2(u_{,y}+v_{,x}+w_{,xy}-w_{0,x}w_{0,y}) \\
& Q=\alpha_{11}\delta e_{11}+\alpha_{22}\delta e_{22}+2\alpha_{12}\delta e_{12} \\
& \alpha_{ij}=\sigma_{ij}/\sigma_i, \quad B=2Eh, \quad D={}^8/9Eh^3
\end{aligned}$$

Здесь $2h$ толщина обшивки, R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны, w_0 — начальный прогиб оболочек, F_i , S_i , I_i — соответственно площадь поперечного сечения, статический момент и момент инерции стрингера ($i=1$) и шпангоута ($i=2$), l_1 и l_2 — шаг расстановки стрингеров и шпангоутов, индексы x , y — дифференцирование по соответствующей переменной. Операторы Δ , Λ , L_h определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\Delta & = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 \\
\Lambda & = \alpha_{11}\partial^2/\partial x^2 + 2\alpha_{12}\partial^2/\partial x\partial y + \alpha_{22}\partial^2/\partial y^2 \\
L_h(f) & = f - g_k e^{-\varphi_k(\xi)} \int_0^\xi e^{\varphi_k(\xi)} \frac{1+b_k}{g} f(\xi) d\xi \quad (k=1, 2) \\
L_3(f) & = f \frac{\xi}{1+\xi} - g e^{-\varphi(\xi)} \int_0^\xi e^{\varphi(\xi)} \frac{1+b}{g} f(\xi) d\xi \\
\xi & = \frac{Ep_i}{\sigma_i}, \quad \varphi(\xi) = \int_0^\xi (1+b) d\xi, \quad \varphi_k(\xi) = \int_0^\xi g_k \left(\frac{1+b_k}{g} \right) d\xi \\
b & = \frac{\sigma_i}{g} \frac{\partial g}{\partial \sigma_i}, \quad b_k = \frac{\sigma_{ik}}{g_k} \frac{\partial g_k}{\partial \sigma_{ik}}
\end{aligned}$$

Рассмотрим свободно опертую вафельную цилиндрическую оболочку ($R_1=\infty$, $R_2=R$) из алюминиевого сплава АМг6 со следующими геометрическими параметрами: $L/R=3$, $R/(2h)=200$, $h_1/\delta_1=h_2/\delta_2=1,4$, $h/l_1=h/l_2=0,03$ при температуре 523 К, где L — длина оболочки, h_1 , h_2 и δ_1 , δ_2 — соответственно высота и ширина ребер. Пусть оболочка нагружена постоянным сжимающим усилием вдоль образующей ($\alpha_{11}=-1$, $\alpha_{12}=\alpha_{22}=0$) и находится в условиях ползучести.

Полагаем, что уравнения состояния обшивки и подкреплений имеют вид $p_i \cdot p_i^\alpha = A\sigma_i^n$, $p_{i1} \cdot p_{i1}^\alpha = A\sigma_{i1}^n$, $p_{i2} \cdot p_{i2}^\alpha = A\sigma_{i2}^n$.

Постоянные A , n , α определяются после обработки соответствующих

кривых ползучести [5]: $A=1,03 \cdot 10^{-16} \exp(-1,36 \cdot 10^4/T) \text{ м}^6\text{Н}^{-3}\text{с}^{-1}$, $n=3$, $\alpha=1$, где T — абсолютная температура.

Пусть начальный прогиб оболочки задается в виде

$$w_0 = f_{10} \sin(m_1 \pi x/L) \sin(m_2 y/R) + f_{20} \sin^2(m_1 \pi x/L) \sin^2(m_2 y/R)$$

Здесь m_1 — число полуволи по образующей, m_2 — число полных волн вдоль окружности, которые определяются из условия, что истинные значения m_1 и m_2 соответствуют минимальной величине ξ , т. е. форма потери устойчивости определяется по минимальному времени, необходимому для наступления возможности выпучивания. Это условие получено в [6, 7] при исследовании выпучивания пластин в условиях ползучести и распространено на цилиндрические оболочки в [8].

Задачу о выпучивании подкрепленной цилиндрической оболочки в условиях ползучести рассмотрим как задачу о развитии заданных начальных неправильностей [3].

Система (1.5) линеаризуется методом последовательных нагружений [9]. Весь процесс нагружения и деформирования в условиях ползучести разбивается на ряд этапов, на каждом из которых приращение разрешающих функций удовлетворяют линейной системе уравнений, коэффициентами которой являются значения самих функций, накопленные за все предыдущие этапы нагружения и шаги по времени. При этом решение упругой задачи является начальным условием для задачи о деформировании подкрепленной оболочки в условиях ползучести, причем в качестве ведущего параметра первоначально фигурирует параметр нагрузки, а затем — параметр времени [10, 11].

Решение линеаризованной системы разыскиваем в виде

$$\delta w = \delta f_1 \sin(m_1 \pi x/L) \sin(m_2 y/R) + \delta f_2 \sin^2(m_1 \pi x/L) \sin^2(m_2 y/R)$$

где δw — приращение функции прогиба на каждом этапе нагружения и шаге по времени.

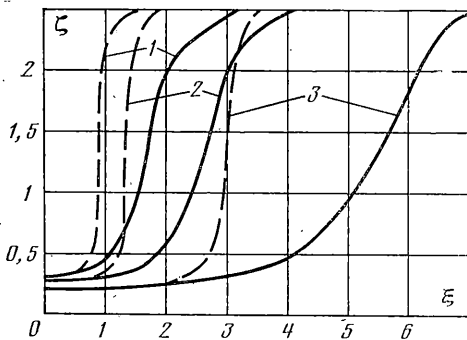
Из первых двух линеаризованных уравнений равновесия определяем приращение функций перемещений δu и δv :

$$\begin{aligned} \delta u &= \sum_{k=1}^2 \sum_{l=0}^2 \delta a_{kl} \sin(2km_1 \pi x/L) \cos(2lm_2 y/R) + \\ &+ \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \delta b_{kl} \cos[(2k-1)m_1 \pi x/L] \sin[(2l-1)m_2 y/R] \\ \delta v &= \sum_{k=1}^2 \sum_{l=0}^2 \delta c_{kl} \cos(2lm_1 \pi x/L) \sin(2km_2 y/R) + \\ &+ \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \delta d_{kl} \sin[(2k-1)m_1 \pi x/L] \cos[(2l-1)m_2 y/R] \end{aligned}$$

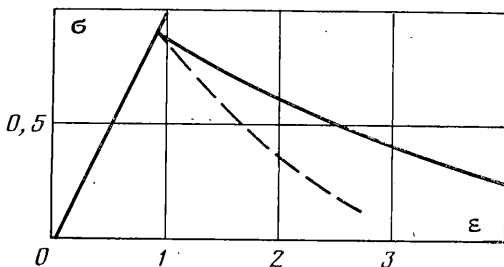
Интегрируя третье линеаризованное уравнение равновесия методом Бубнова — Галеркина, получаем систему двух линейных алгебраических уравнений относительно приращений функций прогиба δf_1 и δf_2 .

Интегральные члены вычисляются численно на каждом шаге по времени $\Delta \xi$ путем разложения в ряд Тейлора, ограничиваясь тремя членами ряда.

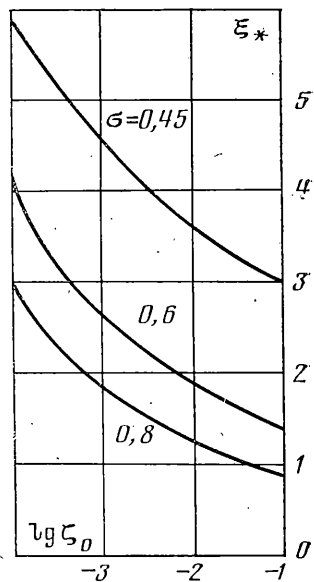
В расчетах было принято $\Delta \xi = 0,01$. Величину начальных неправильностей $\xi_0 = (f_{10} + f_{20})/(2h)$ в общем случае необходимо получать из непосредственного замера их на оболочках или задавать серию ξ_0 и сравнивать полученные теоретические результаты с результатами экспериментов



Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

[12]. Замеры величины начальных неправильностей на ряде оболочек показали, что они составляют 0,05–0,1 толщины обшивки [13]. Характер решения $\zeta = \zeta(\xi)$ ($\zeta = (f_1 + f_2)/(2h)$) при $\zeta_0 = 0,1$ для различных параметров осевой нагрузки $\sigma = p/p_*$ показан на фиг. 1 штриховыми линиями (кривая 1 соответствует $\sigma = 0,8$, кривая 2 — $\sigma = 0,6$, кривая 3 — $\sigma = 0,45$), где p_* — критическая нагрузка для упругой подкрепленной цилиндрической оболочки. Как видно из графиков, существует конечное значение времени ξ_* , при котором скорость роста прогиба становится сколь угодно большой ($d\zeta/d\xi \rightarrow \infty$); это значение принимается за критическое.

На фиг. 2 в полулогарифмических координатах представлены кривые, иллюстрирующие зависимость величины начального прогиба оболочки ζ_0 от времени выпучивания. Проведенные расчеты показывают, что изменение величины ζ_0 на порядок приводит к изменению соответствующего времени выпучивания ξ_* в 1,2–1,8 раза, что также говорит о стабильности полученных результатов.

Результаты вычисления критической деформации в этом случае показаны фиг. 3 (штриховая линия). По оси ординат отложены значения σ , а по оси абсцисс — критические значения деформации $\varepsilon = \sigma(1 + \xi_*)$.

При расчетах исследовалась сходимость метода в зависимости от шага по времени. При $\Delta\xi = 0,01$ и 0,001 соответствующие значения ξ_* различались менее чем на 5%.

2. Теория течения. Пусть ползучесть обшивки описывается уравнением (1.1), а подкрепляющих элементов — (1.3).

Между составляющими тензора скоростей деформаций ползучести p_{ij}^* и составляющими дивергента напряжений обшивки σ_{ij}^* имеют место соотношения теории течения

$$p_{ij}^* = \frac{2}{3} g(p_i, \sigma_i) \sigma_{ij}^*, \quad p_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{2}{3} \sigma_{ij}^* / E$$

$$\sigma_i^2 = \frac{2}{3} \sigma_{ij}^* \sigma_{ij}^*, \quad p_i^2 = \frac{2}{3} p_{ij}^* p_{ij}^* \quad (2.1)$$

Аналогично запишем для стрингеров (для шпангоутов заменяем индексы 1 на 2):

$$p_{11}^* = g_1(p_{11}, \sigma_{11}) \sigma_{11}, \quad p_{11} = \varepsilon_{11} - \sigma_{11} / E, \quad \sigma_{11}^2 = \sigma_{11}^2, \quad p_{11}^2 = p_{11}^2 \quad (2.2)$$

Для зависимостей вида (1.1), (1.3), (2.1) и (2.2) в [14] получена система нелинейных интегродифференциальных уравнений для проги-

ба w и функций перемещений u и v при обычных предположениях относительно деформирования подкрепленных оболочек

$$\begin{aligned}
 & {}^2/3BL_4(2\delta e_{11,x} + \delta e_{22,x} + \delta e_{12,y}) + BL_5(\alpha_{11}Q_x + \\
 & + \alpha_{12}Q_y) + L_1[(EF_1/l_1)\delta e_{11,x} - (ES_1/l_1)(w-w_0)_{,xxx}] = 0 \\
 & {}^2/3BL_4(2\delta e_{22,y} + \delta e_{11,y} + \delta e_{12,x}) + BL_5(\alpha_{12}Q_x + \alpha_{22}Q_y) + \\
 & + L_2[(EF_2/l_2)\delta e_{22,y} - (ES_2/l_2)(w-w_0)_{,yyy}] = 0 \\
 & -D\{L_4[\Delta\Delta(w-w_0)] + {}^3/4L_5[\Lambda\Lambda(w-w_0)]\} + \\
 & + L_1[(ES_1/l_1)\delta e_{11,xx} - (EI_1/l_1)(w-w_0)_{,xxxx}] + L_2[(ES_2/l_2)\delta e_{22,yy} - \\
 & - (EI_2/l_2)(w-w_0)_{,yyyy}] + (w_{,xxx} - 1/R_1)\{^2/3BL_4(2\delta e_{11} + \delta e_{22}) + \\
 & + L_1[(EF_1/l_1)\delta e_{11} - (ES_1/l_1)(w-w_0)_{,xx}]\} + \\
 & + (w_{,yy} - 1/R_2)\{^2/3BL_4(2\delta e_{22} + \delta e_{11}) + L_2[(EF_2/l_2)\delta e_{22} - \\
 & - (ES_2/l_2)(w-w_0)_{,yy}]\} + {}^4/3Bw_{,xy}L_4(\delta e_{12}) + \\
 & + B(\Lambda w - \alpha_{11}/R_1 - \alpha_{22}/R_2)L_5(Q) + \\
 & + 2h\sigma_i\Lambda w + (\sigma_1F_1/l_1)w_{,xxx} + (\sigma_2F_2/l_2)w_{,yy} = 0
 \end{aligned}$$

Здесь операторы Δ , Λ , L_h определяются как ранее, а

$$\begin{aligned}
 L_h(f) &= f - e^{-\xi} \int_0^{\xi} e^{\xi} f(\xi) d\xi \\
 L_5(f) &= e^{-\xi} \int_0^{\xi} e^{\xi} f(\xi) d\xi - g e^{-\varphi(\xi)} \int_0^{\xi} e^{\varphi(\xi)} \frac{1+b}{g} f(\xi) d\xi
 \end{aligned}$$

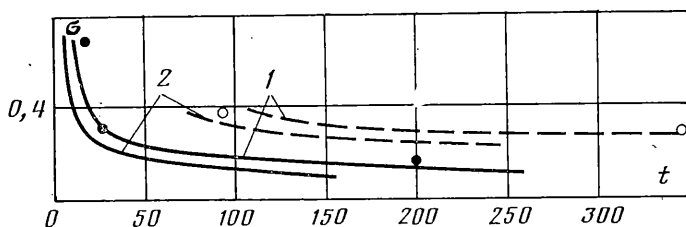
Расчеты проводились по методике, описанной выше для того же примера. Зависимости $\xi = \xi(\xi)$ при $\xi_0 = 0,1$ приведены на фиг. 1 сплошными линиями. В этом случае производная от ξ нигде не обращается в бесконечность, но, как видно из графиков, прогибы оболочки сначала увеличиваются ускоренно, затем скорость возрастания прогибов постепенно падает, т. е. существует некоторое значение ξ_* , при котором скорость роста прогибов достигает максимума. В момент времени $\xi = \xi_*$ ускорение роста прогибов $d^2\xi/d\xi^2 = 0$. Это условие соответствует критерию [15] и может быть принято за критическое.

Необходимо отметить, что, как и в рамках линейной постановки [6, 7], для подкрепленных оболочек по деформационной теории обнаружен эффект бесконечного возрастания прогибов за конечное время. Для подкрепленных оболочек по теории течения подобный результат не имеет места.

На фиг. 3 (сплошная линия) показана зависимость полной критической деформации ε от безразмерного напряжения σ . Расчеты показывают, что значения критической деформации, полученные с использованием теории течения, существенно выше, чем соответствующие значения, полученные с использованием соотношений теории деформаций.

3. Проведено сравнение теоретических расчетов с результатами экспериментов по выпучиванию в условиях кратковременной ползучести вафельных цилиндрических оболочек из сплава АМгб, нагруженных осевой сжимающей силой и внутренним давлением [13]. Параметры испытуемых оболочек $2h = 2-2,5$ мм, $L = 1200$ мм,

№	T	q *	σ	t *	t *1	%	t *2	%
16	578	0,3	0,31	24	14	-42	24	0
18	573	0,185	0,7	15	6	-60	11	-27
20	523	0,4	0,38	90	72	-20	121	+34
21	523	0,39	0,24	346	237	-32	336	-3
22	573	0,21	0,12	193	150	-22	255	+32



Фиг. 4

$R=400$ мм, $h_1=h_2=8,5$ мм, $\delta_1=\delta_2=6$ мм, $l_1=l_2=70$ мм. Величина начального прогиба принималась равной $\xi_0=0,1$.

В таблице приведены экспериментальные (пятый столбец) и расчетные значения критического времени, определяемого согласно принятому критерию по уравнениям, полученным с использованием соотношений теории упрочнения в деформационной форме (шестой столбец) и в форме теории течения (восьмой столбец), и процентное расхождение критических времен. При этом величины t_* , t_{*1} , t_{*2} даны в секундах, а T — в градусах Кельвина. Номера оболочек в таблице соответствуют номерам, приведенным в [13].

На основании этих данных можно заключить, что результаты, полученные с использованием соотношений теории течения, приводят к лучшему согласованию с экспериментом — результаты, полученные с использованием соотношений теории деформаций, дают заниженные значения критического времени.

На фиг. 4 кривые 1 соответствуют расчету, проведенному с использованием соотношений теории течения, а кривые 2 — с использованием соотношений теории деформаций. Сплошные линии соответствуют $T=573$ К и $q^*=0,35-0,4$, а штриховые — $T=523$ К и $q^*=0,21-0,3$, где $q^*=qR/(2hP_*)$ — параметр внутреннего давления. Темными точками показаны результаты испытаний вафельных оболочек при $T=573$ К, светлыми — при $T=523$ К.

Автор благодарит С. А. Шестерикова за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н., Шестериков С. А. Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести. — ПММ, 1957, т. 21, вып. 3, с. 406–412.
2. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
3. Куршин Л. М. К постановке задачи о выпучивании оболочки при ползучести. — Докл. АН СССР, 1965, т. 163, № 1, с. 46–49.
4. Пошивалов В. П. Об устойчивости конструктивно-ортотропных оболочек в условиях ползучести. — В кн.: Прочность и надежность технических устройств. Киев: Наук. думка, 1981, с. 46–53.
5. Ермаков В. П., Кузнецов А. П. Кратковременная ползучесть сплава АМгб при одноосном растяжении. — ПМТФ, 1972, № 1, с. 141–143.
6. Шестериков С. А. Устойчивость прямоугольных пластинок при ползучести. — ПМТФ, 1961, № 3, с. 93–100.
7. Шестериков С. А. Устойчивость пластинок при ползучести по теории течения. — ПМТФ, 1961, № 5, с. 100–108.
8. Барташевичус А. Ю., Шестериков С. А. Устойчивость цилиндрических оболочек при ползучести с упрочнением. — Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 2, с. 116–120.
9. Петров В. В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1975. 119 с.
10. Гудрамович В. С., Пошивалов В. П. К исследованию выпучивания оболочек в условиях ползучести. — Докл. АН СССР, 1979, т. 245, № 6, с. 1329–1332.
11. Гудрамович В. С., Герасимов В. П., Коноваленков В. С., Пошивалов В. П. Предельные состояния оболочек при сложном нагружении и ползучести материала. Киев: Наук. думка, 1984. 252 с.
12. Кашелкин В. В., Локощенко А. М., Мякотин Е. А., Шестериков С. А. Сплюсчивание цилиндрических оболочек. Методика расчета и экспериментальная проверка. — Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 1, с. 155–158.
13. Куршин Л. М., Белов В. К., Гусев В. В., Ермаков В. П., Ларионов И. Ф. Влияние кратковременной ползучести на устойчивость гладких и вафельных цилиндрических оболочек. — Проблемы прочности, 1975, № 3, с. 95–97.
14. Пошивалов В. П. К постановке задачи о выпучивании подкрепленной оболочки при ползучести по теории упрочнения в форме течения. — Гидроаэромеханика и теория упругости. Днепропетровск: Изд-е ДГУ, 1984, вып. 32, с. 106–112.
15. Шестериков С. А. О критерии устойчивости при ползучести. — ПММ, 1959, т. 23, вып. 6, с. 1101–1106.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
14.II.1985