

УДК 531.39

О ФОРМАХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ С СУХИМ ТРЕНИЕМ

НИКОЛЬСКИЙ В. В., СМИРНОВ Ю. П.

В [1, 2] приведена одна из возможных форм уравнений движения, записываемых для произвольного варианта опирания тел системы с сухим трением. В публикуемой работе предлагаются еще три вариантных формы записи уравнений.

1. Постановка задачи. Рассматривается движение системы совершенно твердых тел с исчезающе малыми зазорами в удерживающих связях. Предполагается, что: контакт между телами системы приводится к точечному; зазоры и лишние связи отсутствуют; число и расположение точек контакта могут быть заданы так, чтобы имела место статическая определенность реакций при произвольных нагрузках; положение опорных точек не зависит от интенсивности нагрузки; контактирующие поверхности не могут прилипать, но только давят, нажимают друг на друга, если они нагружены; поверхности, реализующие удерживающие связи, различаются с помощью вариантных индексов, которые входят в обозначения единичных нормальных и касательных ортов на поверхностях связей, коэффициентов трения и координат точек опирания.

Удерживающие связи с малыми зазорами дают возможность телам системы различным образом опираться друг на друга в зависимости от нагрузки и состояния системы. Такого рода связи представляют собой комбинации односторонних связей невырождающейся размерности, их можно назвать вариантными связями. Совокупность нагруженных опорных точек определяет собой некоторый вариант опирания тел и соответствующий ему вариант расчетной схемы. В реальных конструкциях вариантов опирания может быть очень много, и они сменяют друг друга в процессе движения. Вообще говоря, априорно неизвестно, какие опорные поверхности тел или их участки нагружены, а какие разгружены. С другой стороны, невозможно верно определить реакции и ускорения, если неизвестно, какие именно опорные площадки окажутся нагруженными в действительном движении. Таким образом, возникает проблема выбора реализуемого варианта опирания и соответствующей ему расчетной схемы из множества возможных расчетных схем. Эта проблема, однако, не нашла отражения в литературе по теоретической механике, так как распространено мнение, что реализуемую расчетную схему можно найти вычислив реакции, предварительно предельно упростив модель (отбросив трение и отождествив противоположные опорные поверхности, т. е. отказавшись от рассмотрения вариантов опирания). Считается, что при малом трении истинный вариант опирания окажется таким, каким его показала простейшая модель. Вообще говоря, это неверно, поэтому при анализе конкретных систем стремятся уменьшить число вариантов опирания, подлежащих рассмотрению, накладывая ограничения на действия сил или упрощая модель. В ряде случаев это оказывается оправданным. Встречаются, однако, системы в которых указать расчетную схему заранее, полагаясь на интуицию, невозможно по причине сложности силового взаимодействия тел. В подобных случаях следует применять предложенный в работах [1, 2] и в публикуемой работе вариантный метод записи и численного анализа уравнений движения.

2. Три линейных вариантных формы записи уравнений движения. Рассмотрим системы с двусторонними вариантными связями. В таких системах у каждой точки опирания имеется точка-антипод на противоположной опорной поверхности. Поскольку число реакций равно m , имеем $2m$ точек опирания, из них в каждый момент времени нагружены не более m точек. Каждая пара опорных точек может находиться в трех состояниях: нагружена одна опорная точка, нагружена другая, обе точки разгружены. Каждой паре опорных точек ставится в соответствие свой вариантный индекс, принимающий значение, равное единице для одной точки и равное двум для другой. Пусть первой паре точек соответствует индекс i , второй — j и т. д., паре с номером m отвечает индекс q . Вариантный индекс и индекс, обозначающий номер пары точек r ($r=1, \dots, \dots m$), введем в обозначения величин, связанных с реакциями, причем вариантный индекс будем располагать вверху соответствующего символа, а номер пары точек — внизу. Например, f_r^p — коэффициенты трения, \mathbf{v}_r^p — орты внутренних нормалей к поверхностям связей в точках контакта, $\boldsymbol{\tau}_r^p$ — орты приведенных сил трения, \mathbf{r}_r^p — радиусы-векторы точек контакта. Вариантный индекс p введен для сокращения записи и обобщенно представляет конкретные вариантные индексы: $p=i$ при $r=1$, $p=j$ при $r=2, \dots$, $p=q$ при $r=m$.

Искомые величины (обобщенные ускорения, реакции и силы трения) зависят от набора значений всех вариантных индексов, поэтому в их обозначения должен входить полный набор вариантных индексов. Запишем выражения обобщенных сил трения и обобщенных реакций для произвольного варианта опирания тел системы с двусторонними вариантными связями

$$Q_{\tau, i}(i, \dots, q) = \sum_{k=1}^m \tau_k^p f_k^p N_k(i, \dots, q) \frac{\partial \mathbf{r}_k^p}{\partial q_i}, \quad (2.1)$$

$$Q_{\tau, n+r}(i, \dots, q) = \sum_{k=1}^m \tau_k^p f_k^p N_k(i, \dots, q) \frac{\partial \mathbf{r}_k^p}{\partial q_{n+r}},$$

$$\lambda_{n+r}(i, \dots, q) = \sum_{k=1}^m \mathbf{v}_k^p N_k(i, \dots, q) \frac{\partial \mathbf{r}_k^p}{\partial q_{n+r}}, \quad (i=1, \dots, n; r=1, \dots, m)$$

Касательный орт τ_k^p определяется относительной скоростью точки контакта звеньев \mathbf{V}_k^p и ее модулем $\tau_k^p = -\mathbf{v}_k^p / V_k^p$.

Соотношения (2.1) подставим в уравнения движения системы

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right)^{(i, \dots, q)} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + Q_{\tau, i}(i, \dots, q)$$

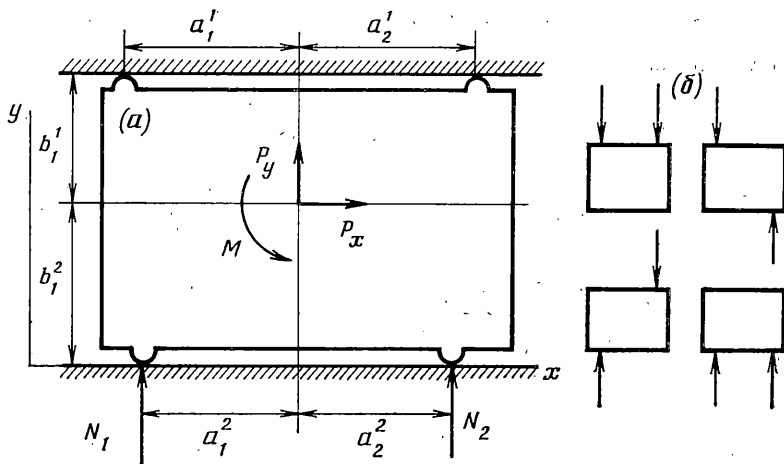
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+r}} \right)^{(i, \dots, q)} - \frac{\partial T}{\partial q_{n+r}} = Q_{n+r} + Q_{\tau, n+r}(i, \dots, q) + \lambda_{n+r}(i, \dots, q) \quad (2.2)$$

$$(i=1, \dots, n; r=1, \dots, m)$$

Система уравнений (2.2) разделена на две группы, вторая группа уравнений соответствует избыточным координатам q_{n+r} , на которые наложены условия связи простейшего вида [3].

Формулы (2.1) можно записать в трех формах — в зависимости от представления модулей нормальных реакций, сил трения и выбора направления отсчета углов между нормальными \mathbf{v}_k^p и координатными направлениями.

Форма 1. В добавление к принятым предположениям введем еще три: а) если нормальная реакция направлена «в тело», то она считается положительной и в выражения сил трения входит ее модуль; б) направления нормальных реакций на различных опорных поверхностях задаются угла-



Фиг. 1

ми γ_k^p , отсчитываемыми от единого направления; в) в реализуемом варианте опирания все нормальные реакции должны быть неотрицательными.

Из пункта б) следует, что в уравнения движения должны входить нормальные реакции с вариантными множителями вида $\cos \gamma_k^p$, $\sin \gamma_k^p$.

Форма 2. Эта форма отличается от формы 1 пунктом б) — направление нормальных реакций для точек-антиподов задается углами β_k^p , отсчитываемыми от двух противоположных направлений, откуда следует, что в уравнения будут входить вариантные множители вида $(-1)^p \cos \beta_k^p$, $\beta_k^p < \pi/2$. В [1, 2] использовалась именно эта форма вариантной записи уравнений.

Форма 3. Эту форму получим, если к первоначально принятым предположениям добавим следующие: а) вариантные множители $(-1)^p$ входят в выражения сил трения; б) если нормальная реакция направлена «в тело», то выражение $(-1)^p f_s^p N_s \sim(i, \dots, q)$ является модулем силы трения; в) в реализованном варианте опирания выражения модулей всех сил трения должны быть неотрицательными. Вариантные формы записи 1, 2 и 3 тождественны.

Из п. в) следует условие отбора реализуемого варианта опирания для форм 1 и 2:

$$N_1(i, \dots, q) \geq 0 \wedge N_2(i, \dots, q) \geq 0 \wedge \dots \wedge N_m(i, \dots, q) \geq 0 \quad (2.3)$$

и условие для формы 3:

$$(-1)^i N_1 \sim(i, \dots, q) \geq 0 \wedge (-1)^j N_2 \sim(i, \dots, q) \geq 0 \wedge \dots \wedge (-1)^q \times \\ \times N_m \sim(i, \dots, q) \geq 0 \quad (2.4)$$

Таким образом, для отыскания n обобщенных ускорений, m нормальных реакций и m целочисленных переменных (вариантных индексов) имеется $n+m$ уравнений движения (2.2). Задача становится определенной после введения в рассмотрение m соотношений для реакций из условий (2.3) или (2.4).

Методику составления уравнений движения в различных вариантных формах продемонстрируем на примере плоского прямолинейного движения призмы (фиг. 1). Призма, нагруженная силами P_x , P_y , M (фиг. 1, а), приведенными к центру масс, в каждый момент времени может опираться не более чем на две точки (фиг. 1, б). Нижней направляющей соответствуют вариантные индексы i, j , равные двум, верхней — индексы, равные единице. Координаты опорных точек a_r^p , b_r^p отмеряются от центра масс призмы в направлении осей x, y ; m_1 — масса призмы.

Уравнения движения призмы в форме 1 имеют вид

$$m_1 \ddot{x}^*(i, j) + [f_1^i N_1(i, j) + f_2^j N_2(i, j)] \operatorname{sgn} \dot{x}^* = P_x \quad (2.5)$$

$$N_1(i, j) \cos \gamma_1^i + N_2(i, j) \cos \gamma_2^j + P_y = 0$$

$$(a_1^i \cos \gamma_1^i + f_1^i b_1^i \operatorname{sgn} \dot{x}^*) N_1(i, j) + (a_2^j \cos \gamma_2^j + f_2^j b_2^j \operatorname{sgn} \dot{x}^*) N_2(i, j) + M = 0$$

если варианты углы γ_{r^p} отсчитывать от положительного направления оси y , при этом $\gamma_1^1 = \gamma_2^1 = \pi$, $\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = 0$.

Уравнения движения в форме 2 имеют вид

$$\begin{aligned} m_1 x^{**}(i, j) + [f_1^i N_1(i, j) + f_2^j N_2(i, j)] \operatorname{sgn} x^* = P_x \\ (-1)^i N_1(i, j) + (-1)^j N_2(i, j) + P_y = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$[(-1)^i a_1^i + f_1^i b_1^i \operatorname{sgn} x^*] N_1(i, j) + [(-1)^j a_2^j + f_2^j b_2^j \operatorname{sgn} x^*] N_2(i, j) + M = 0$$

Легко видеть, что уравнения (2.5) и (2.6) тождественны. Запишем уравнения движения призмы в форме 3:

$$\begin{aligned} m_1 x^{**}(i, j) + [(-1)^i f_1^i N_1^\vee(i, j) + (-1)^j f_2^j N_2^\vee(i, j)] \operatorname{sgn} x^* = P_x \\ N_1^\vee(i, j) + N_2^\vee(i, j) + P_y = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$[a_1^i + (-1)^i f_1^i b_1^i \operatorname{sgn} x^*] N_1^\vee(i, j) + [a_2^j + (-1)^j f_2^j b_2^j \operatorname{sgn} x^*] N_2^\vee(i, j) + M = 0$$

Уравнения (2.6) и (2.7) преобразуются друг в друга в силу соотношений $N_r^\vee(i, j) = (-1)^p N_r(i, j)$, $N_r(i, j) = (-1)^p N_r^\vee(i, j)$, $(-1)^{2p} = 1$.

Форма 1 удобнее других для сложных пространственных тел, так как отсчет углов от единого направления унифицирует слагаемые и облегчает расстановку знаков перед ними. Формы 2 и 3 удобны для анализа уравнений. Вид уравнений в форме 3 ближе к обычному, невариантному. Представление модулей сил трения в форме 3 близко к тому, которое использовано в [4, 5] при анализе примеров, однако в указанных работах вариантный множитель объединяется со знаком скорости, что усложняет условие отбора реализуемого варианта опирания. Во все рассмотренные варианты формы реакции входят линейно.

3. Нелинейная вариантная форма записи уравнений движения. Если в соотношения (2.1) ввести варианты множители $\delta_k^1 = 1/2(1 - \operatorname{sgn} N_k)$, $\delta_k^2 = 1/2(1 + \operatorname{sgn} N_k)$, с помощью которых будет автоматически производиться выбор варианта в каждой паре точек опирания, то обобщенные силы трения и обобщенные реакции определяются выражениями

$$Q_{\tau, t} = \sum_{k=1}^m \left(f_k^1 \tau_k^1 \frac{\partial \mathbf{r}_k^1}{\partial q_t} \delta_k^1 + f_k^2 \tau_k^2 \frac{\partial \mathbf{r}_k^2}{\partial q_t} \delta_k^2 \right) |N_k| \quad (3.1)$$

$$Q_{\tau, n+r} = \sum_{k=1}^m \left(f_k^1 \tau_k^1 \frac{\partial \mathbf{r}_k^1}{\partial q_{n+r}} \delta_k^1 + f_k^2 \tau_k^2 \frac{\partial \mathbf{r}_k^2}{\partial q_{n+r}} \delta_k^2 \right) |N_k|$$

$$\lambda_{n+r} = \sum_{k=1}^m \left(\mathbf{v}_k^1 \frac{\partial \mathbf{r}_k^1}{\partial q_{n+r}} \delta_k^1 + \mathbf{v}_k^2 \frac{\partial \mathbf{r}_k^2}{\partial q_{n+r}} \delta_k^2 \right) N_k \quad (t=1, \dots, n; r=1, \dots, m)$$

Учитывая выражения вариантных коэффициентов δ_k^i , соотношения (3.1) можно переписать в другом виде:

$$Q_{\tau, t} = \sum_{k=1}^m \left(f_k^1 \tau_k^1 \frac{\partial \mathbf{r}_k^1}{\partial q_t} \frac{(|N_k| - N_k)}{2} + f_k^2 \tau_k^2 \frac{\partial \mathbf{r}_k^2}{\partial q_t} \frac{(|N_k| + N_k)}{2} \right) \quad (3.2)$$

$$Q_{\tau, n+r} = \sum_{k=1}^m \left(f_k^1 \tau_k^1 \frac{\partial \mathbf{r}_k^1}{\partial q_{n+r}} \frac{(|N_k| - N_k)}{2} + f_k^2 \tau_k^2 \frac{\partial \mathbf{r}_k^2}{\partial q_{n+r}} \frac{(|N_k| + N_k)}{2} \right)$$

$$\lambda_{n+r} = \sum_{k=1}^m \left(\mathbf{v}_k^1 \frac{\partial \mathbf{r}_k^1}{\partial q_{n+r}} \frac{(N_k - |N_k|)}{2} + \mathbf{v}_k^2 \frac{\partial \mathbf{r}_k^2}{\partial q_{n+r}} \frac{(N_k + |N_k|)}{2} \right)$$

Подставив соотношения (3.1) или (3.2) в уравнения движения (2.2), получим разрешающую систему уравнений

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + Q_{\tau, i} + \sum_{r=1}^m \lambda_{n+r} \frac{\partial q_{n+r}}{\partial q_i} \quad (i=1, \dots, n+m) \quad (3.3)$$

которая определяет истинный вариант сразу, без перебора пробных вариантов, так как искомые целочисленные переменные исключены посредством вариантных коэффициентов δ_k^i . Поэтому варианты индексы изъяты из обозначений искомых ускорений и реакций и отпадает необходимость в применении условий отбора (2.3) или (2.4). Тем не менее возможности различного опирания тел учитываются коэффициентами при нормальных реакциях.

Уравнения (3.3) нелинейны относительно реакций. Для отыскания истинного движения системы можно использовать обобщенную функцию Гаусса

$$2Z = \sum_{i=1}^{n+m} \mu_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i - Q_{\tau,i} - \sum_{r=1}^m \lambda_{n+r} \frac{\partial q_{n+r}}{\partial q_i} \right\}^2$$

где μ_i — вектор единичных размерных коэффициентов, введенный для согласования размерностей.

Искомые ускорения q_s^{**} ($s=1, \dots, n$) и реакции N_k ($k=1, \dots, m$) определяются численно из условия $\{q_1^{**}, \dots, q_n^{**}, N_1, \dots, N_m\} = \operatorname{argmin} Z$, $\{q_1^{**}, \dots, N_m\} \in R^{n+m}$ с помощью методов, изложенных, например, в [6, 7].

Проиллюстрируем предложенный способ записи на уже рассмотренном примере прямолинейного плоского движения призмы (фиг. 1). Уравнения движения призмы после очевидных преобразований примут вид

$$\begin{aligned} m_1 x^{**} + \left(f_1^1 \frac{|N_1| - N_1}{2} + f_1^2 \frac{|N_1| + N_1}{2} + f_2^1 \frac{|N_2| - N_2}{2} + f_2^2 \frac{|N_2| + N_2}{2} \right) \operatorname{sgn} x^* = P_x \\ N_1 + N_2 + P_y = 0 \\ \left(a_1^1 \frac{N_1 - |N_1|}{2} + a_1^2 \frac{N_1 + |N_1|}{2} + a_2^1 \frac{N_2 - |N_2|}{2} + a_2^2 \frac{N_2 + |N_2|}{2} \right) + M + \\ + \left(f_1^1 b_1^1 \frac{|N_1| - N_1}{2} + f_1^2 b_1^2 \frac{|N_1| + N_1}{2} + f_2^1 b_2^1 \frac{|N_2| - N_2}{2} + \right. \\ \left. + f_2^2 b_2^2 \frac{|N_2| + N_2}{2} \right) \operatorname{sgn} x^* = 0 \end{aligned}$$

Все приведенные формы уравнений движения эквивалентны.

В оптимальной точке значение функции качества Z должно быть равно нулю. Ненулевое значение критерия в точке, где процесс оптимизации прекратился, свидетельствует об отсутствии решения (самогорможении). Численные эксперименты показывают, что в случае парадоксов многозначности предлагаемый алгоритм сходится необязательно к истинному движению. Поэтому в общем случае необходимо анализировать поведение якобиана исходной системы уравнений (3.3) в точке минимума при стремлении коэффициентов трения к нулю [1, 2], а исследование поверхности функции качества проводить некоторым глобальным методом [8].

Используя известный прием [9], можно заменить негладкую задачу безусловной минимизации критерия Z эквивалентной ей гладкой задачей с ограничениями. Представим величины нормальных реакций в виде разности двух положительных величин $N_k = t_k^2 - t_k^1$, $t_k^1 \geq 0$, $t_k^2 \geq 0$ ($k=1, \dots, m$); тогда для модулей нормальных реакций получим соотношения $|N_k| \leq t_k^2 + t_k^1$ ($k=1, \dots, m$).

Искомый вариант можно отыскать решая задачу вида $\sum_k (t_k^2 + t_k^1) \rightarrow \min$ (суммирование по k) при условиях

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{k=1}^m \left(f_k^1 \tau_k^1 \frac{\partial r_k^1}{\partial q_i} t_k^1 + f_k^2 \tau_k^2 \frac{\partial r_k^2}{\partial q_i} t_k^2 \right) - \\ - \sum_{k=1}^m \left(v_k^1 \frac{\partial r_k^1}{\partial q_i} t_k^1 + v_k^2 \frac{\partial r_k^2}{\partial q_i} t_k^2 \right) \quad (i=1, \dots, n+m) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Если реакции входят в уравнения (3.4) линейно, то имеем задачу линейного программирования, решение которой может быть найдено, например, при помощи численной процедуры симплекс-метода.

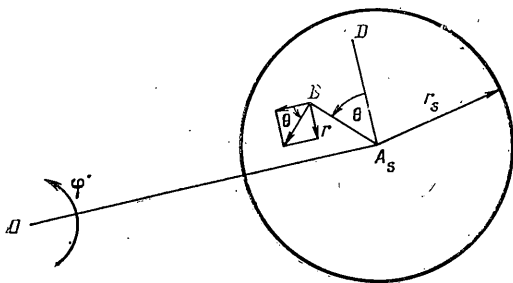
4. Плоскопараллельное движение тела. Твердое тело, имеющее три степени свободы, движется между параллельными плоскостями и может опи-

ратся на каждую плоскость тремя выступами, положение и размеры которых известны.

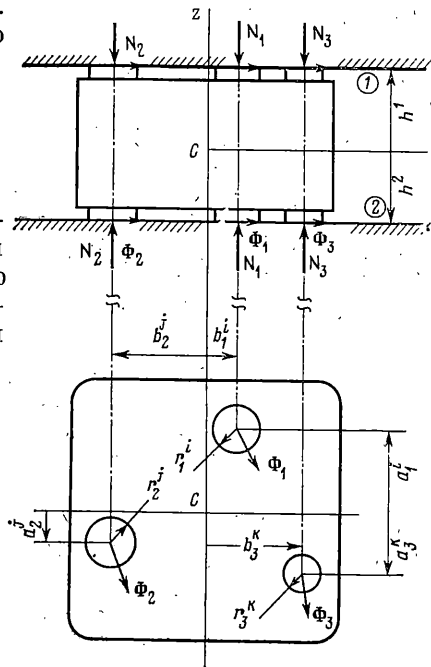
1. *Определение приведенных коэффициентов трения.* На поверхностях нагруженных опорных выступов развиваются силы трения. Для простоты считаем, что выступы имеют форму круговых цилиндров с радиусами r_s ($s=1, 2, 3$). Распределение нормального давления по опорным выступам полагаем осесимметричным: $p=p_0 \cos^n(\pi r/2r_s)$, где r — текущий радиус точки опорной площадки, отмеряемый от ее центра. Показатель n существенно влияет на распределение давления: при $n=0$ давление равномерное, при $n \gg 1$ давление приближается к сосредоточенному, при $n=-0,5$ давление распределяется приблизительно как в модели жесткого штампа, вдавливаемого в упругое полупространство. Заданное распределение нормального давления определяет выражение нормальных реакций

$$N_s = 2\pi p_0 \int_0^{r_s} \cos^n(\pi r/2r_s) r dr$$

Существившим приведем распределенных сил трения к центру опоры (фиг. 2). Точка O есть мгновенный центр скоростей тела, точка A_s — центр опоры s . Угол θ отмеряется от направления



Фиг. 2



Фиг. 3

$A_s D \perp O A_s$, $O A_s = \rho_s$. Фиг. 2 показывает разложение относительной скорости произвольной точки B опоры s . На основании теоремы сложения скоростей строится вектор абсолютной скорости точки B . Этот вектор составляет с направлением $A_s D$ угол, косинус которого равен

$$(\rho_s - r \sin \theta) [(\rho_s - r \sin \theta)^2 + (r \cos \theta)^2]^{-1/2}$$

Отсюда нетрудно получить выражение модуля главного вектора сил трения, приложенных к опоре

$$\Phi_s = f_s p_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{r_s} \frac{\cos^n(\pi r/2r_s) (\rho_s - r \sin \theta) r dr d\theta}{\sqrt{(\rho_s - r \sin \theta)^2 + (r \cos \theta)^2}}$$

и выражения моментов сил трения, приведенных к точкам A_s , т. е. выражения моментов трения вращения (f_s — коэффициенты трения материалов опор):

$$M_{B_s} = f_s p_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{r_s} \frac{\cos^n(\pi r/2r_s) [(r \cos \theta)^2 - (\rho_s - r \sin \theta) r \sin \theta] r dr d\theta}{\sqrt{(\rho_s - r \sin \theta)^2 + (r \cos \theta)^2}}$$

Введя обозначение $h = \int_0^{r_s} \cos^n(\pi r/2r_s) r dr$ ($0 \leq r \leq r_s$) запишем выражения приведенных коэффициентов трения скольжения и приведенных коэффициентов трения вращения

$$f_s' = \frac{\Phi_s}{N_s} = \frac{f_s}{2\pi h} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_s} \frac{\cos^n(\pi r/2r_s) (\rho_s - r \sin \theta) r dr d\theta}{\sqrt{(\rho_s - r \sin \theta)^2 + (r \cos \theta)^2}}$$

$$r_s f_s'' = \frac{M_{Bs}}{N_s} = \frac{f_s}{2\pi h} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_s} \frac{\cos^n(\pi r/2r_s) [(r \cos \theta)^2 - (\rho_s - r \sin \theta)r \sin \theta] r dr d\theta}{V(\rho_s - r \sin \theta)^2 + (r \cos \theta)^2}$$

Приведенные коэффициенты можно представить упрощенными выражениями. Например, при $n \approx 1$ имеем $f_s' = f_s [1 - \exp(-|\rho_s|/K)]$, $r_s f_s'' = f_s K_1 \exp(-|\rho_s|/K_2)$, где коэффициенты K , K_1 и K_2 имеют размерность длины. Отсюда следует, что при вращении тела вокруг одной из опор ($\rho_s = 0$) имеем $\Phi_s = 0$. Последнее означает, что вращение вокруг центра опоры в течение конечного отрезка времени невозможно, если центр масс тела не находится на оси опоры. Тяжелое тело, движущееся по горизонтальным направляющим и предоставленное самому себе, должно останавливаться всеми опорами одновременно. Этот вывод согласуется с результатами анализа фазовых траекторий для кольца и диска в [10].

4.2. *Вывод уравнений движения тела.* Считается, что между направляющими плоскостями и поверхностями опорных выступов могут появляться исчезающе малые зазоры, поэтому в каждый момент времени нагруженным оказываются не более трех выступов (фиг. 3). Оси каждой пары выступов с разных сторон тела могут не совпадать. На тело действует система сил \mathbf{P} и \mathbf{M} , приведенных к центру масс C . Пронумеруем опорные пары ($s=1, 2, 3$) и присвоим каждой паре вариантный индекс $p=i, p=j, p=k$ соответственно номерам пар. Считаем, что вариантный индекс равен двойке на нижних опорах и единице — на верхних. Оба выступа в опорных парах не могут быть нагружены одновременно. Координаты центра масс тела в неподвижных осях обозначим символами x, y, z . Величины a_s^p, b_s^p, h^p задают координаты центров опорных выступов в осях, жестко связанных с телом.

Для определения реакций и сил трения освободим тело от связей и включим полные реакции в число активных сил. Скорости, ускорения и силы отнесем к неподвижным осям. Проекция главного вектора сил трения скольжения в неподвижных осях имеют вид

$$\Phi_{sx}(i, j, k) = -f_s'^p N_s(i, j, k) x_s^{*p} / V_s^p$$

$$\Phi_{sy}(i, j, k) = -f_s'^p N_s(i, j, k) y_s^{*p} / V_s^p$$

Обозначения реакций и сил трения на фиг. 3 в целях сокращения записи не имеют вариантных индексов.

Координаты и проекции скоростей центров опор в инерциальных осях легко выразить через координаты x, y и проекции скорости x^*, y^* центра масс тела и угловые величины φ и $\dot{\varphi}$:

$$x_s^p = x + a_s^p \cos \varphi - b_s^p \sin \varphi, \quad y_s^p = y + a_s^p \sin \varphi + b_s^p \cos \varphi$$

$$\dot{x}_s^{*p} = \dot{x} - \dot{\varphi} (a_s^p \sin \varphi + b_s^p \cos \varphi), \quad \dot{y}_s^{*p} = \dot{y} + \dot{\varphi} (a_s^p \cos \varphi - b_s^p \sin \varphi)$$

$$V_s^p = [(\dot{x}_s^{*p})^2 + (\dot{y}_s^{*p})^2]^{1/2}$$

Отсюда следует выражение мгновенного радиуса вращения для центра каждой опоры с учетом варианта опирания $\rho_s^p = V_s^p / \dot{\varphi}$.

Момент сил трения каждой опоры относительно оси z , проходящей через центр масс, складывается из момента вектора Φ_s и момента трения вращения

$$M_z(i, j, k) = N_s(i, j, k) [f_s'^p (x_s^{*p} b_s^p - y_s^{*p} a_s^p) / V_s^p - r_s^p f_s''^p \operatorname{sgn} \dot{\varphi}]$$

Из теоремы о движении центра масс и теоремы об изменении кинетического момента тела относительно центра масс следуют уравнения движения, которые запишем в вариантной форме 2 (суммирование производится по s от 1 до 3):

$$m_1 \ddot{x} = P_x - \sum f_s'^p N_s x_s^{*p} / V_s^p \quad (4.1)$$

$$m_1 \ddot{y} = P_y - \sum f_s'^p N_s y_s^{*p} / V_s^p$$

$$0 = P_z + (-1)^i N_1 + (-1)^j N_2 + (-1)^k N_3$$

$$\begin{aligned}
-J_{xz}\ddot{\varphi} + J_{yz}\dot{\varphi}^2 &= M_x + \sum N_s [(-1)^p B_s^p + h^p f_s'^p y_s^*{}^p / V_s^p] \\
-J_{yz}\ddot{\varphi} - J_{xz}\dot{\varphi}^2 &= M_y + \sum N_s [(-1)^p A_s^p + h^p f_s'^p x_s^*{}^p / V_s^p] \\
J_{zz}\ddot{\varphi} &= M_z + \sum N_s [f_s'^p (x_s^*{}^p b_s^p - y_s^*{}^p a_s^p) / V_s^p - r_s^p f_s''^p \operatorname{sgn} \dot{\varphi}] \\
A_s^p &= a_s^p \cos \varphi - b_s^p \sin \varphi, \quad B_s^p = a_s^p \sin \varphi + b_s^p \cos \varphi \\
J_{xz} &= J_{xz0} \cos \varphi + J_{yz0} \sin \varphi, \quad J_{yz} = -J_{xz0} \sin \varphi + J_{yz0} \cos \varphi
\end{aligned}$$

где J_{xz0} , J_{yz0} — центробежные моменты инерции в осях, жестко связанных с телом. Ускорения и реакции являются функциями вариантных индексов i, j, k . Другие вариантные формы записи здесь приводить не будем ввиду громоздкости уравнений (4.1).

Если движение начинается из состояния покоя, то распределение скоростей заменяется распределением ускорений. Поскольку распределение ускорений зависит от неизвестных сил трения, задачу отыскания ускорений следует решать последовательными приближениями, причем начальное распределение ускорений вычисляется при отсутствии трения. Задача страгивания решается, конечно, с определением вариантов опорания, и ей предшествует проверка на застой. В случае застоя имеет место условие $R_1(i, j, k) \leq f_1^i N_1(i, j, k) \wedge R_2(i, j, k) \leq f_2^j N_2(i, j, k) \wedge R_3(i, j, k) \leq f_3^k N_3(i, j, k)$, где $R_s(i, j, k)$ — касательные реакции, вычисляемые из уравнений (4.1), в которых ускорения считаются равными нулю, а линии действия сил R_s задаются распределением ускорений в системе без трения.

Вопросы застоя в системах с трением обсуждаются в [11, 12], однако связи с трением в этих работах предполагаются освобождающими.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов Ю. П. Уравнения движения систем с неидеальными удерживающими связями. — Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 2, с. 63–71.
2. Смирнов Ю. П. Уравнения удара систем с трением. — Изв. АН СССР. МТТ, 1985, № 3, с. 36–44.
3. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
4. Пэнлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.
5. Аппель П. Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
6. Михалевич В. С., Шор Н. З., Гаустова Л. А., и др. Вычислительные методы выбора оптимальных проектных решений. Киев: Наук. думка, 1977. 178 с.
7. Шор Н. З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. Киев: Наук. думка, 1979. 200 с.
8. Потапов М. А. Пакет методов глобального поиска для диалоговой системы оптимизации ДИСО. — В кн.: Пакеты прикладных программ. Методы оптимизации. М.: Наука, 1984. с. 81–92.
9. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985. 509 с.
10. Ишлинский А. Ю., Соколов Б. Н., Черноусько Ф. Л. О движении плоских тел при наличии сухого трения. — Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 4, с. 17–28.
11. Пожарицкий Г. К. Распространение принципа Гаусса на системы с сухим трением. — ПММ, 1964, т. 25, вып. 3, с. 391–406.
12. Пожарицкий Г. К. Исчезающие скольжения механических систем с сухим трением. — ПММ, 1965, т. 29, вып. 3, с. 558–563.

Тула

Поступила в редакцию
30.X.1985