

УДК 539.3:534.1

ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

БЕЛЕНЬКАЯ Л. Х.

Исследуется устойчивость ортотропной, вязкоупругой, армированной цилиндрической оболочки под действием продольной периодической нагрузки. Торцы оболочки шарнирно закреплены. Исследование задачи сводится к системе обыкновенных интегродифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Данной задаче посвящены работы [1, 2]. В [1] используется экспоненциальное ядро релаксации и исходная система сводится к одному интегродифференциальному уравнению второго порядка с периодическим коэффициентом. Система, аналогичная рассмотренной в [1] также в предположении, что коэффициент вязкости и амплитуда модуляции малы, исследуется в [3] методом замораживания и усреднения. При этом устойчивость системы рассматривается вблизи главного резонанса.

Задача о динамической устойчивости вязкоупругого стержня под действием периодической нагрузки при аналогичных допущениях изучена методом усреднения в [4]. В [5] рассматривается интегродифференциальное уравнение второго порядка с периодическим коэффициентом. В [6] исследуются границы областей неустойчивости вязкоупругих систем с конечным числом степеней свободы при параметрическом возбуждении методом определителей Хилла и методом аппроксимации наследственных ядер суммой экспонент с последующим построением матриц монодромии дифференциальных уравнений. Построены частотно-амплитудные характеристики.

В публикуемой работе исследование устойчивости рассматриваемой цилиндрической оболочки проведено в широком диапазоне параметров системы. Применяется метод цепных дробей, позволяющий определять границы областей устойчивости для произвольных ядер релаксации и для любых параметров системы.

1. Постановка задачи. Рассмотрим замкнутую ортотропную, вязкоупругую, армированную цилиндрическую оболочку. Пусть L — ее длина. Оболочка нагружена продольной, изменяющейся по гармоническому закону нагрузкой $\varphi(t) = P_0(2\pi R)^{-1}(1 + \mu \cos \omega t)$, где R — радиус кривизны срединной поверхности, P_0 — среднее значение приведенной нагрузки $\varphi(t)$, μ , ω — амплитуда и частота модуляции.

Следуя [1], считаем, что ползучесть не проявляется в направлении армирования. Считаем также деформации малыми и предполагаем, что $\varepsilon_z = 0$. Тогда уравнения состояния можно записать так:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= A_{11}\varepsilon_x + A_{12}\varepsilon_y, \quad \sigma_y = A_{12}\varepsilon_x + A_{22}\varepsilon_y \\ \sigma_{xy} &= A_{66}\varepsilon_{xy} - A_{66}^*(V_1\varepsilon_{xy})(t) \\ \sigma_{xz} &= A_{55}\varepsilon_{xz} - A_{55}^*(V_2\varepsilon_{xz})(t) \\ \sigma_{yz} &= A_{44}\varepsilon_{yz} - A_{44}^*(V_3\varepsilon_{yz})(t) \\ (V_i u)(t) &= \int_{t_0}^t K_i(t-\theta)u(\theta)d\theta\end{aligned}\tag{1.1}$$

Здесь A_{ij} — упругие постоянные, A_{ii}^* — коэффициенты вязкости, K_i — ядра релаксации ($A_{ij} > 0$, $A_{ii}^* \geq 0$).

Воспользуемся уравнениями движения элемента срединной поверхности оболочки, полученными в [1, 7], основанными на простейшем варианте уточненной теории типа С. П. Тимошенко, учитывающей поперечные сдвиги.

Пусть оболочка шарнирно закреплена по торцам. Эти условия позволяют искать решение исходной системы уравнений в виде [1, 8]:

$$W=w(\tau)\sin\lambda x\cos ny \quad (1.2)$$

$$\gamma_x=X(\tau)\cos\lambda x\cos ny, \gamma_y=Y(\tau)\sin\lambda x\sin ny$$

$$F=f(\tau)\sin\lambda x\cos ny, \lambda=\pi ld^{-1}, d=LR^{-1}$$

Тогда общее решение разрешающей системы можно представить в виде рядов Фурье функций W, γ_x, γ_y, F (l — число полуволн вдоль образующей, n — азимутальное волновое число).

Подставляя (1.2) в исходную систему, получим систему обыкновенных интегродифференциальных уравнений для w, X, Y, f с периодическим коэффициентом:

$$\begin{aligned} w'' - \lambda^2 \beta (2\pi)^{-1} (1 + \mu \cos \omega \tau) w - \lambda^2 f + 0,5(nY - \lambda X) - \\ - 0,5nQ_{44}^*(V_3 Y)(\tau) + 0,5\lambda Q_{55}^*(V_2 X)(\tau) = 0 \\ a_{11}w + a_{12}\dot{X} + a_{13}Y + a_{14}(V_1 w)(\tau) + a_{15}'(V_1 X)(\tau) + \\ + a_{15}''(V_2 X)(\tau) + a_{16}(V_1 Y)(\tau) = 0 \\ a_{21}w + a_{22}\dot{X} + a_{23}Y + a_{24}(V_1 w)(\tau) + \\ + a_{25}(V_1 X)(\tau) + a_{26}'(V_1 Y)(\tau) + a_{26}''(V_3 Y)(\tau) = 0 \\ a_{32}w + a_{31}f + a_{33}(V_1 w)(\tau) + a_{34}(V_1 f)(\tau) = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$(V_i u)(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} K_i(\tau - \theta) u(\theta) d\theta$$

где $a_{ij}, Q_{44}^*, Q_{55}^*$ — безразмерные коэффициенты, зависящие от материальных постоянных системы¹, τ — безразмерное время.

Для исследования устойчивости прямолинейной формы оболочки ищем ненулевые решения системы (1.3) при $\tau_0 = -\infty$ вида $(w, X, Y, f) = \exp(\sigma \tau)(\tilde{w}, \tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{f})$, где $\tilde{w}, \tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{f}$ — P -периодические по времени функции ($P = 2\pi\omega^{-1}$), σ — комплексный параметр.

Как и в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, решения такого вида назовем решениями Флоке. Спектром устойчивости задачи (1.3) при $\tau_0 = -\infty$ назовем множество тех значений σ , при которых система (1.3) имеет решения Флоке. По аналогии с первым методом Ляпунова для обыкновенных дифференциальных уравнений будем предполагать, что оболочка асимптотически устойчива, если спектр устойчивости системы (1.3) лежит в левой полуплоскости ($\operatorname{Re} \sigma < 0$), и неустойчива, если хотя бы одно значение σ_0 таково, что $\operatorname{Re} \sigma_0 > 0$. По аналогии с теорией Флоке потеря устойчивости может быть связана с возникновением P -периодических, $2P$ -периодических режимов (простой параметрический резонанс), а также двухчастотных режимов (комбинационный резонанс). Здесь рассматривается потеря устойчивости прямолинейной формы оболочки, связанная с возникновением периодических колебаний периода P или $2P$.

Обозначим через $\beta_k^{(1)}$ — критические значения средней нагрузки β , отвечающие P -периодическим возмущениям системы (1.3) ($\tau_0 = -\infty$), а через $\beta_k^{(2)}$ — отвечающие $2P$ -периодическим возмущениям (n, l фиксированы; $k=1, 2, \dots, N$).

Для минимальных критических нагрузок введем следующие обозначения: $\beta_*^{(1)} = \min \beta_k^{(1)}, \beta_*^{(2)} = \min \beta_k^{(2)}$ по $n, l; \beta_* = \min(\beta_*^{(1)}, \beta_*^{(2)})$ ($l=1, 2, \dots, n=0, 1, 2, \dots$).

¹ Бельнская Л. Х. Об устойчивости ортотропной, вязкоупругой цилиндрической оболочки под действием постоянной нагрузки. Ростов н/Д, 1983. — 26 с. Деп. в ВИНТИ 18.04.83; № 2008-83.

2. Уравнения для критических нагрузок. Для определения критических нагрузок воспользуемся методом цепных дробей [9-11].

Будем разыскивать P -периодические решения системы (1.3) при $\tau_0 = -\infty$ в виде рядов Фурье:

$$(w, X, Y, f) = \sum_k (w_k, x_k, y_k, f_k) \exp(i\omega k\tau)$$

Из последних трех уравнений системы (1.3) выразим x_k, y_k, f_k через w_k . Тогда из первого уравнения системы (1.3) для коэффициентов w_k получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$a_k w_k - b_0 w_{k-1} - b_0 w_{k+1} = 0 \quad (2.1)$$

($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $b_0 = \beta_j^{(1)} \lambda^2 \mu$ ($j=1, 2, \dots, N$). Комплексные коэффициенты a_k зависят от материальных постоянных оболочки, параметров внешней нагрузки β, μ, ω и квантовых чисел l, n ; коэффициенты a_k ввиду их громоздкости не выписаны. Преобразуем систему (2.1) к виду

$$a_k - b_0 g_k^{-1} = b_0 g_{k+1}, \quad g_k = w_k / w_{k-1} \quad (2.2)$$

Отметим, что для нетривиального решения ни один из коэффициентов w_k не обращается в нуль.

Из системы (2.2) выводим два представления для g_k :

$$g_k = \frac{b_0}{a_k - \frac{b_0^2}{a_{k+1} - \frac{b_0^2}{a_{k+2} - \dots}}}, \quad g_k = \frac{a_{k-1}}{b_0} \cdot \frac{b_0}{a_{k-2} - \frac{b_0^2}{a_{k-3} - \dots}}$$

Требуя, чтобы они совпадали при $k=1$, и учитывая, что $a_{-k} = \bar{a}_k$, приходим к уравнению для определения $\beta_j^{(1)} (\mu, \omega, d, l, n)$:

$$2 \operatorname{Re} G = a_0, \quad G = \frac{b_0^2}{a_1 - \frac{b_0^2}{a_2 - \dots}}$$

Получим теперь уравнение для критических нагрузок $\beta_k^{(2)}$; будем искать $2P$ -периодические решения системы (1.3) при $\tau_0 = -\infty$ в виде

$$(w, X, Y, f) = \sum_k (w_{2k+1}, x_{2k+1}, y_{2k+1}, f_{2k+1}) \exp(0,5i\omega(2k+1)\tau)$$

Подставляя это представление в систему (1.3), получаем $d_{2k+1} w_{2k+1} - b_0 w_{2k-1} - b_0 w_{2k+3} = 0$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$); $d_k = a_k(0,5\omega)$ ($k=\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$).

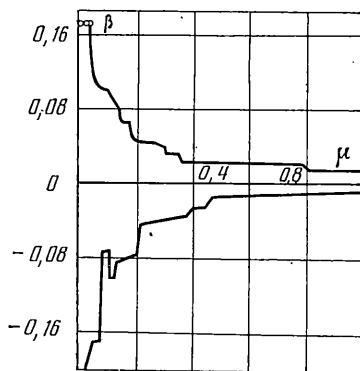
Аналогично предыдущему приходим к трансцендентному уравнению определяющему критические нагрузки $\beta_j^{(2)} (\mu, \omega, d, n, l)$:

$$|G^\sim|^2 = \epsilon_0, \quad G^\sim = a_1 - \frac{b_0^2}{a_3 - \frac{b_0^2}{a_5 - \dots}}$$

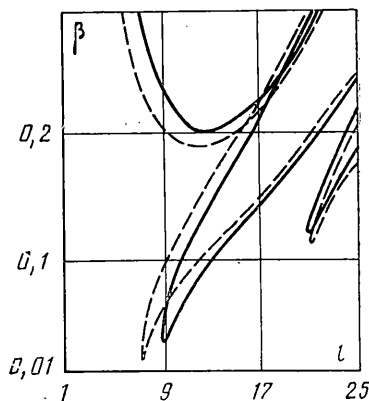
3. Результаты вычисления. Вычисления проводились для следующих значений модулей упругости: $A_{11} = 2,089 \times 10^{10}$ Н/м², $A_{12} = 0,276 \times 10^{10}$ Н/м², $A_{22} = 22,75 \times 10^{10}$ Н/м², $A_{44} = A_{55} = A_{66} = 0,795 \times 10^{10}$ Н/м², $A_{44}^* = A_{55}^* = A_{66}^* = 0,1 \times A_{66}$.

Рассматривались ядра K_i дробно-экспоненциального вида: $K_i(\tau) = A_i \exp(-\gamma_i \tau) \tau^{\alpha_i - 1}$, $A_i \geq 0$, $\gamma_i > 0$. Полагаем $\gamma_i = 0,05$, $\alpha_i = 0,25$ ($0 < \alpha_i < 1$). Будем обозначать через $(n_*, l_*)^{(1)}$ пару квантовых чисел (n, l) , отвечающую минимальной критической нагрузке $\beta_*^{(1)}$, а через $(n_*, l_*)^{(2)}$ — соответствующую $\beta_*^{(2)}$. Тогда (n_*, l_*) соответствует критической нагрузке β_* .

Будем полагать, что пара (n_*, l_*) изменяется, если меняется хотя бы одна из ее компонент. Можно ожидать, что в эксперименте при увеличении нагрузки β (ω ,



Фиг. 1



Фиг. 2

μ , d , A_i фиксированы) вначале реализуются формы потери устойчивости (n, l) , отвечающие наименьшему критическому значению β_* — (n_*, l_*) . Эту моду (n_*, l_*) назовем наиболее опасной.

1. Исследуем зависимость $\beta_*(\mu)$. Зафиксируем ω , d , A_1 ($A_2=A_3=0$, $\delta=142,86$). Если μ достаточно мало ($\mu < \mu_0$), то нейтральные кривые $\beta^{(1)}(l)$, $\beta^{(2)}(l)$ ($n=\text{const}$) имеют по одному минимуму на плоскости (l, β) ; при малых μ ($0 \leq \mu < \mu_*$) потеря устойчивости связана с P -периодическими режимами, а при $\mu \in (\mu_*, 1]$ — с $2P$ -периодическими.

На фиг. 1 приведена зависимость $\beta_*(\mu)$ при $d=2$, $A_1=0,5$, $A_2=A_3=0$, $\omega=5$ (сплошной линией отмечен $2P$ -периодический режим, точками — P -периодический режим). При $\mu=\mu_*$ ветви $\beta_*^{(1)}(\mu)$ и $\beta_*^{(2)}(\mu)$ пересекаются ($\beta_*^{(1)}(\mu_*)=\beta_*^{(2)}(\mu_*)$);

значение μ_* для $\omega=5$ равно $0,045$. Отметим, что $(n_*, l_*)^{(1)}(\mu_*) \neq (n_*, l_*)^{(2)}(\mu_*)$.

В эксперименте, когда амплитуда модуляции μ , увеличиваясь, переходит значение μ_* , то вместе с удвоением периода должно наблюдаться внезапное изменение размера ячейки, при этом одновременно меняются оба квантовых числа n_* и l_* . Отметим, что увеличение амплитуды модуляции μ на отрезке $[0; \mu_*)$ стабилизирует прямолинейную форму оболочки, а на отрезке $(\mu_*, 1]$ — дестабилизирует. Нейтральная кривая на плоскости (μ, β) имеет ступенчатый вид. На каждом горизонтальном участке — ступеньке — пара (n_*, l_*) остается постоянной для данной ступеньки. Для значений μ , равных: $0-0,01$; $0,02$; $0,03$; $0,04$; $0,05$; $0,06-0,1$; $0,11-0,13$; $0,14-0,17$; $0,18-0,26$; $0,27-0,29$; $0,3-0,35$; $0,36-0,79$; $0,791-0,1$ имеем (n_*, l_*) , равные $(9,10)$, $(6,27)$, $(13,2)$, $(13,3)$, $(13,4)$, $(13,5)$, $(12,10)$, $(12,9)$, $(12,8)$, $(10,10)$, $(11,9)$, $(12,7)$, $(10,9)$; при этом $\omega=5$, $A_1=0,5$, $A_2=A_3=0$, $d=2$. Как показывают вычисления, с увеличением частоты ω количество ступенек на плоскости (μ, β) увеличивается, их длина уменьшается. Квантовые числа (n_*, l_*) при увеличении ω растут.

Нейтральная кривая на плоскости (l, β) ($l=1, 2, \dots$) при малых μ ($0 \leq \mu < \mu_0$) состоит из одной ограниченной ветви, соответствующей P -периодическому режиму. С увеличением амплитуды модуляции μ на плоскости (l, β) (n фиксировано) появляются несколько ветвей, соответствующих P - и $2P$ -периодическим режимам. Все точки плоскости (μ, β) , лежащие ниже кривой $\beta_*(\mu)$, принадлежат области устойчивости.

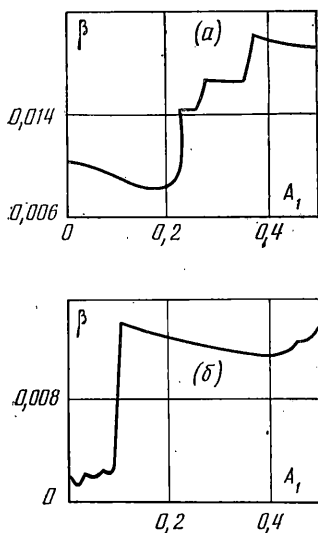
На фиг. 2 показана нейтральная кривая на плоскости (l, β) при фиксированных значениях $n=11$ и $n=12$, $\mu=0,4$, $\omega=5$, $d=2$, $A_1=0,5$, $A_2=A_3=0$. Критическая нагрузка достигает минимального значения на паре $(n_*, l_*)^{(2)}=(12,7)$ и равна $\approx 0,02076$. Области неустойчивости для разных азимутальных волн $n=11$ (сплошные кривые) и $n=12$ (штриховые кривые) пересекаются в отличие от стационарного случая, когда имеет место вложение этих областей². Область неустойчивости верхней ограниченной ветви, соответствующей P -периодическому режиму, при $n=11$ содержит область неустойчивости ветви для $n=12$, как и при $\mu=0$.

Рассмотрим зависимость $\beta_*(\mu)$ ($0 < \mu \leq 1$), когда $\beta < 0$, т. е. на оболочку действует растягивающая нагрузка. В отличие от стационарного случая модулированная нагрузка может вызвать неустойчивость и при растяжении ($0 < \mu \leq 1$, $\beta < 0$)³.

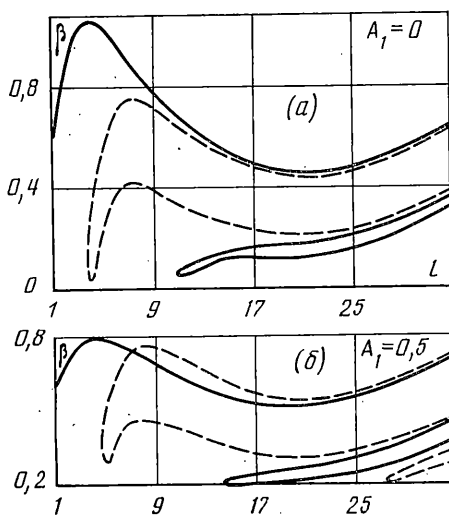
На фиг. 1 ($\beta < 0$) представлена зависимость $\beta_*(\mu)$ при $\omega=5$, $d=2$, $A_1=0,5$, $A_2=A_3=0$. Первая потеря устойчивости связана с возникновением $2P$ -периодических режимов на всем интервале $\mu \in (0; 1]$. Минимальное по модулю критическое значение $\beta_*=\beta_*^{(2)} \approx -0,01096$ достигается при $\mu=1$, при этом $(n_*, l_*)^{(2)}=(12,6)$. Характерно, что для $\beta < 0$ области неустойчивости на плоскости (l, β) при различных n не пересекаются.

² См. сноску на с. 148.

³ Аналогичный факт имеет место для вязкоупругого стержня из материала Фойхта [11].



Фиг. 3



Фиг. 4

Рассмотрена зависимость $\beta_*(\mu)$, когда $A_1, A_2, A_3 \neq 0$, т. е. вязкость действует по всем направлениям. В этом случае картина на плоскости (μ, β) качественно не меняется.

2. Перейдем к анализу зависимости $\beta_*(A_1)$. Фиксируем ω, μ, d, A_2, A_3 ($A_2=A_3=0$). Под действием периодической нагрузки увеличение вязкости оказывает как стабилизирующее действие, так и дестабилизирующее. На фиг. 3 представлена зависимость на плоскости (A_1, β) при $\mu=0,5, d=2$ для $\omega=5$ (фиг. 3, а) и $\omega=15$ (фиг. 3, б). Первая потеря устойчивости связана с возникновением $2P$ -периодических режимов. При небольших значениях A_1 ($0 \leq A_1 < A_0$) наблюдается уменьшение критической нагрузки $\beta_*(^{(2)})$. С увеличением A_1 ($A_0 < A_1 \leq 0,5$) критическая нагрузка растет немонотонно. Минимальная критическая нагрузка β_* на участке $A_1 \in [0; 0,5]$ достигает своего максимального значения $\approx 0,019$ при $A_1=0,5$ ($\omega=5$) и $\approx 0,014$ при $A_1=0,1$ ($\omega=15$). При этом критические нагрузки остаются меньше минимальных критических нагрузок для стационарного случая. Пики на кривой $\beta_*(\mu)$ соответствуют изменению (n_*, l_*) ; на каждом участке пара (n_*, l_*) постоянна. Значения квантовых чисел (n_*, l_*) при различных $A_1 \in [0; 0,5]$ для $\omega=5$ равны: $A_1=0-0,22$; $0,23-0,27$; $0,28-0,37$; $0,38-0,5$; $(n_*, l_*)=(11,8), (9,9), (10,9), (12,7)$. В случае $\omega=15$ значениям $A_1=0-0,02$; $0,03-0,06$; $0,07-0,09$; $0,1-0,44$; $0,45-0,49$; $0,5$ соответствуют $(n_*, l_*)=(19,18), (16,21), (14,22), (15,22), (11,23), (10,23)$.

Как показывают вычисления, с уменьшением частоты модуляции первая потеря устойчивости на плоскости (A_1, β) связана с возникновением P -периодических режимов. При этом минимальные критические нагрузки увеличиваются. Рассмотрена зависимость $\beta_\infty(\mu)$ в случае, когда $\mu \rightarrow \infty$, так что $\mu\beta = \beta_\infty$ остается постоянной величиной, т. е. средним значением нагрузки можно пренебречь: $\varphi^*(t) = \beta_\infty \cos \omega t$. Качественно картина на плоскости (A_1, β) не меняется в сравнении с конечными амплитудами модуляции μ .

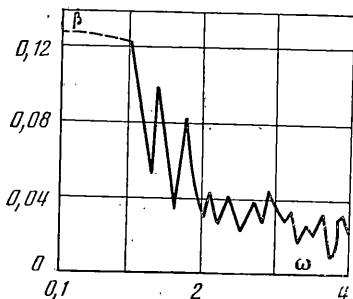
Отметим, что области неустойчивости на плоскости (l, β) при разных параметрах A_1 в случае модулированной нагрузки пересекаются; в стационарном случае, в аналогичной ситуации, области неустойчивости вложены друг в друга.

Действие вязкости оказывает существенное качественное влияние на поведение ветвей P - и $2P$ -периодических режимов: имеет место следующий эффект: для

ω	(n_*, l_*)	ω_*	ω	(n_*, l_*)	ω_*	ω	(n_*, l_*)	ω_*
0,1—0,4	(9,11)	2,914	0,5	(9,10)	2,719	0,6	(9,12)	3,107
0,7	(9,9)	2,522	0,8	(9,10)	2,719	0,9	(10,12)	3,046
1—1,09	(8,5)	1,699	1,1—1,3	(5,2)	0,964	1,4—1,6	(7,2)	0,983
1,7	(6,3)	1,234	1,9	(7,3)	1,212	2	(8,2)	1,126
2,1—2,2	(8,3)	1,289	2,3	(7,4)	1,470	2,4	(8,4)	1,484
2,5	(9,2)	1,331	2,6	(9,3)	1,447	2,7—2,8	(9,4)	1,592
2,9—3,1	(9,5)	1,759	3,2—3,3	(10,4)	1,777	3,4	(9,6)	1,940
3,5	(10,5)	1,904	3,6	(10,6)	2,047	3,7	(11,2)	1,884
3,8	(9,7)	2,130	3,9—4	(11,5)	2,122	4,1	(10,7)	2,202
4,2	(11,6)	2,234	4,3—4,4	(10,8)	2,364	4,5	(12,4)	2,323
4,6	(12,5)	2,399	4,7	(11,8)	2,492	4,8	(12,6)	2,488
4,9—5	(12,7)	2,588						

упругой оболочки ($A_1=A_2=A_3=0$) области неустойчивости — ветви (верхняя ветвь — выжжена), соответствующие P - и $2P$ -периодическим режимам чередуются, они сколь угодно близко приближаются друг к другу⁴. В случае же действия вязкости области неустойчивости P - и $2P$ -периодических режимов пересекаются (фиг. 4. $\omega=5$, $d=2$, $\mu=0,5$, $n=3$; сплошные кривые соответствуют P -периодическим колебаниям, штриховые — $2P$ -периодическим).

3. Рассмотрим зависимость $\beta_*(\omega)$. Зафиксируем μ , d , A_1 , A_2 , A_3 ($\mu=0,5$, $d=2$, $A_1=0,5$, $A_2=A_3=0$). Как показывают вычисления, при небольших значениях $\omega \in (0,01; \omega_0)$ потеря устойчивости связана с возникновением P -периодических режимов. При достижении частотой ω значения ω_0 ветви P - и $2P$ -периодических режимов пересекаются. При этом



Фиг. 5

$\beta_*^{(1)}(\omega_0) = \beta_*^{(2)}(\omega_0)$, а $(n_*, l_*)^{(1)}(\omega_0) \neq (n_*, l_*)^{(2)}(\omega_0)$. Для рассматриваемого случая имеем: $\omega_0=1,09$; $(n_*, l_*)^{(2)}=(5,2)$; $(n_*, l_*)^{(1)}=(8,5)$;

$\beta_*^{(1)} = \beta_*^{(2)} \approx 0,113$. С дальнейшим увеличением ω ($\omega > \omega_0$) происходит смена лидерства: первая потеря устойчивости связана с возникновением $2P$ -периодических режимов. При этом с увеличением ω минимальная критическая нагрузка изменяется немонотонно (фиг. 5, штриховая линия соответствует P -периодическому режиму, а сплошная — $2P$ -периодическому). Минимальные критические нагрузки на всем рассматриваемом интервале частот модуляции ω остаются меньше критической нагрузки в стационарном случае ($\mu=0$), равной 0,16882, квантовые числа $(n_*, l_*)=(9,10)$.

Зависимость квантовых чисел (n_*, l_*) от частоты модуляции приведена в таблице; здесь же представлены значения частот собственных колебаний оболочки ω_* , соответствующей данной паре (n_*, l_*) . Как видно, квантовые числа (n_*, l_*) с изменением $\omega \in (0,1; 5)$ меняются скачкообразно. С дальнейшим увеличением частоты ω ($\omega \gg 5$) критическая нагрузка также изменяется немонотонно, оставаясь меньше стационарной критической нагрузки, осевое волновое число возрастает, так что отношение $\lambda^2 \omega^{-2}$ ($\lambda = \pi l d^{-1}$) стремится к постоянному пределу.

Пики на нейтральной кривой соответствуют изменению пары (n_*, l_*) . В стационарной задаче также имеет место непрерывный перескок с одной формы на другую, но критическая нагрузка чувствует этот скачок значительно слабее. Зависимость $\beta(\omega)$, как видно из фиг. 5, носит сильно осциллирующий характер, что является, по-видимому, характерной особенностью явления параметрического резонанса.

Автор выражает благодарность В. И. Юдовичу за постановку задачи и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданович А. Е. Динамическая устойчивость упруговязкой ортотропной цилиндрической оболочки. — Механика полимеров, 1973, № 4, с. 714–721.
2. Рикардс Р. Б., Тетерс Г. А. Устойчивость оболочек из композитных материалов. Рига: Зинатне, 1974. 310 с.
3. Ибрагимов К. Х. Задача о динамической устойчивости вязкоупругой ортотропной цилиндрической оболочки. — В кн.: Вопросы вычисл. и прикл. математики. Ташкент: Изд-е Ин-та кибернетики АН УзССР, 1975, вып. 34, с. 164–174.
4. Матяш В. И. О динамической устойчивости шарнирно опертого упруговязкого стержня. — Механика полимеров, 1971, № 2, с. 293–300.
5. Махмудов С. Исследование областей динамической неустойчивости некоторых классов вязкоупругих систем. — В кн.: Вопросы вычисл. и прикл. математики. Ташкент: Изд-е Ин-та кибернетики АН УзССР, 1975, вып. 35, с. 166–173.
6. Москвин В. Г., Семенов В. А., Смирнов А. И. К исследованию параметрических колебаний систем с наследственным трением. — Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 3, с. 39–45.
7. Богданович А. Е. Динамическая устойчивость ортотропной цилиндрической оболочки с учетом поперечных сдвигов. — Механика полимеров, 1973, № 2, с. 312–320.
8. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
9. Мешалкин Л. Д., Синай Я. Г. Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости. — ПММ, 1961, т. 25, вып. 6, с. 1140–1143.
10. Юдович В. И. Пример рождения вторичного стационарного или периодического течения при потере устойчивости ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости. — ПММ, 1965, т. 29, вып. 3, с. 453–467.
11. Бельская Л. Х., Юдович В. И. Устойчивость вязкоупругого стержня под действием периодической нагрузки. — Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 6, с. 146–152.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
20.III.1985.

⁴ Этот факт справедлив для вязкоупругого стержня из материала Фойхта [11].