МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1987

УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЕЙ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛАСТИН, ИЗГОТОВЛЕННЫХ ИЗ НЕОДНОРОДНОГО ПО ТОЛЩИНЕ АНИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

АЛЬТЕНБАХ Х.

Пластина рассматривается как двумерный континуум Коссера. Один из вариантов построения системы уравнений, описывающих такой континуум, представлен в [1]. В публикуемой работе рассматривается только линеаризированный частный случай из [1]. Подробно обсуждается вопрос об определении упругих модулей пластинки, изготовленной из неоднородного по толщине анизотропного материала. Представленные в работе формулы для модулей являются наиболее общими из известных в литературе по теории многослойных и неоднородных пластин (см. [2]).

1. Кинематика пластинки Коссера определяется вектором перемещений $\mathbf{u}$ и вектором малого поворота $\boldsymbol{\varphi}$ [1]:

$$\mathbf{u}=u_1\mathbf{e}_1+u_2\mathbf{e}_2+w\mathbf{n},\quad \boldsymbol{\varphi}=-\varphi_2\mathbf{e}_1+\varphi_1\mathbf{e}_2 \tag{1.1}$$

Здесь u_α ($\alpha=1, 2$) — перемещения в плоскости пластинки, w — поперечный прогиб, $\mathbf{e}_\alpha$ — орты координатных осей в плоскости пластинки, $\mathbf{n}$ — нормаль к плоскости пластинки, φ_α — малые повороты.

Напряженное состояние пластинки Коссера определяется тензором усилий $\mathbf{T}$ и тензором моментов $\mathbf{M}$. Тензор усилий содержит в себе и поперечные усилия ($\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}\neq0$), а тензор моментов является плоским, т. е. содержит два крутящих и два изгибающих момента ($\mathbf{M}\cdot\mathbf{n}=0$) [1]. Справедливы формулы типа Коши

$$\mathbf{T}_{(\nu)}=\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{T},\quad \mathbf{M}_{(\nu)}=\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{M} \tag{1.2}$$

где $\mathbf{T}_{(\nu)}$ и $\mathbf{M}_{(\nu)}$ — векторы усилий и моментов в нормальном сечении пластинки с нормалью $\boldsymbol{\nu}$, лежащей в плоскости пластинки.

Справедливы следующие дифференциальные уравнения равновесия пластинки ($\mathbf{T}_\times$ — векторный инвариант тензора усилий):

$$\nabla\cdot\mathbf{T}+\mathbf{q}=0,\quad \nabla\cdot\mathbf{M}+\mathbf{T}_\times+\mathbf{m}=0 \tag{1.3}$$

В [1] доказано, что вариация внутренней энергии имеет выражение

$$\delta U=(\mathbf{T}\cdot\mathbf{a})\cdot\cdot\,\delta\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{M}\cdot\cdot\,\delta\boldsymbol{\varkappa}^T+(\mathbf{T}\cdot\mathbf{n})\cdot\delta\boldsymbol{\gamma} \tag{1.4}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}={}^1/_2[\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}+(\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{a})^T]$$

$$\boldsymbol{\varkappa}=\nabla\boldsymbol{\varphi},\quad \boldsymbol{\gamma}=\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})+\mathbf{c}\cdot\boldsymbol{\varphi}$$

Здесь $\mathbf{a}$ — первый метрический тензор пластинки, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор деформации растяжений — сдвигов, $\boldsymbol{\varkappa}$ — тензор деформации изгиба — кручения, $\boldsymbol{\gamma}$ — вектор поперечной деформации, $\mathbf{c}$ — дискриминантный тензор; символом (T) отмечена операция транспонирования.

Из выражения для δU следует, что энергия деформации зависит только от тензоров $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varkappa}$ и вектора $\boldsymbol{\gamma}$:

$$U=U(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\varkappa}) \tag{1.5}$$

Сопоставление вариации (1.5) с (1.4) дает общее выражение для закона упругости пластины

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{a}=\partial U/\partial\boldsymbol{\varepsilon},\quad \mathbf{T}\cdot\mathbf{n}=\partial U/\partial\boldsymbol{\gamma},\quad \mathbf{M}=\partial U/\partial\boldsymbol{\varkappa} \tag{1.6}$$

В случае малых деформаций плотности внутренней энергии является однородной квадратичной формой от ε, γ и $\varkappa$. Следовательно

$$U={}^1/_2\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\cdot\mathbf{C}_1\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\cdot\mathbf{C}_2\cdot\cdot\boldsymbol{\varkappa}+{}^1/_2\boldsymbol{\varkappa}\cdot\cdot\mathbf{C}_3\cdot\cdot\boldsymbol{\varkappa}+ \tag{1.7}$$

$$+{}^1/_2\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\gamma}\cdot(\boldsymbol{\Gamma}_1\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\Gamma}_2\cdot\cdot\boldsymbol{\varkappa})$$

где $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$, $\boldsymbol{\Gamma}_1$, $\boldsymbol{\Gamma}_2$, $\boldsymbol{\Gamma}$ — тензоры упругих модулей пластинки. После подстановки (1.7) в (1.6) получаем соотношения упругости

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{C}_1\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{C}_2\cdot\cdot\boldsymbol{\varkappa}+\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\Gamma}_1 \tag{1.8}$$

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}=\boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\Gamma}_1\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\Gamma}_2\cdot\cdot\boldsymbol{\varkappa},$$

$$\mathbf{M}^T=\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\cdot\mathbf{C}_2+\mathbf{C}_3\cdot\cdot\boldsymbol{\varkappa}+\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\Gamma}_2$$

Из соотношений (1.8) видно, что в рассмотренном варианте теории пластин учитывается и поперечная деформация, значит предложенный вариант включает в себя теорию Рейсснера.

2. Полагаем, что значения упругих модулей пластинки могут быть определены при сопоставлении некоторых точных решений классической теории упругости для слоя толщиной h и соответствующего решения по теории пластинки Коссера. При таком сопоставлении усилия и моменты, действующие в слое, должны вычисляться по формулам [1]:

$$\mathbf{T}=\langle\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\tau}\rangle,\quad \mathbf{M}=\langle\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\tau}z\cdot\mathbf{c}\rangle \tag{2.1}$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — тензор напряжений в задаче о слое, а символом $\langle\ldots\rangle$ обозначено интегрирование по толщине слоя от $-h/2$ до $h/2$.

Симметрия тензора напряжений в классической теории упругости [3, 4] накладывает ограничения на тензоры усилий и моментов

$$(\mathbf{T}\cdot\mathbf{a})\cdot\cdot\mathbf{c}=0,\quad \mathbf{M}\cdot\cdot\mathbf{a}=\langle\boldsymbol{\tau}\cdot\cdot\mathbf{c}z\rangle=0 \tag{2.2}$$

Отсюда при помощи (1.8) получаем

$$\mathbf{a}\cdot\cdot\mathbf{C}_3=0,\quad \mathbf{C}_2\cdot\cdot\mathbf{a}=0,\quad \boldsymbol{\Gamma}_2\cdot\cdot\mathbf{a}=0 \tag{2.3}$$

$$\mathbf{c}\cdot\cdot\mathbf{C}_1=0,\quad \mathbf{c}\cdot\cdot\mathbf{C}_2=0,\quad \boldsymbol{\Gamma}_1\cdot\cdot\mathbf{c}=0$$

Этим условиям удовлетворяют тензоры

$$\mathbf{C}_1=C_1^{11}\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1+C_1^{12}(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_2\mathbf{a}_1)+C_1^{22}\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2+ \tag{2.4}$$

$$+C_1^{24}(\mathbf{a}_2\mathbf{a}_4+\mathbf{a}_4\mathbf{a}_2)+C_1^{14}(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_4+\mathbf{a}_4\mathbf{a}_1)+C_1^{44}\mathbf{a}_4\mathbf{a}_4$$

$$\mathbf{C}_2=C_2^{12}\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2+C_2^{13}\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3+C_2^{14}\mathbf{a}_1\mathbf{a}_4+C_2^{22}\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2+C_2^{23}\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3+$$

$$+C_2^{24}\mathbf{a}_2\mathbf{a}_4+C_2^{42}\mathbf{a}_4\mathbf{a}_2+C_2^{43}\mathbf{a}_4\mathbf{a}_3+C_2^{44}\mathbf{a}_4\mathbf{a}_4$$

$$\mathbf{C}_3=C_2^{22}\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2+C_3^{23}(\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_3\mathbf{a}_2)+C_3^{33}\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3+$$

$$+C_3^{34}(\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4+\mathbf{a}_4\mathbf{a}_3)+C_3^{24}(\mathbf{a}_2\mathbf{a}_4+\mathbf{a}_4\mathbf{a}_2)+C_3^{44}\mathbf{a}_4\mathbf{a}_4$$

$$\boldsymbol{\Gamma}=\Gamma_1\mathbf{a}_1+\Gamma_{12}\mathbf{a}_4+\Gamma_2\mathbf{a}_2$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_1=\Gamma_1^{i\alpha}\mathbf{e}_i\mathbf{a}_\alpha\quad (i=1,2;\quad \alpha=1,2,4)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_2=\Gamma_2^{i\beta}\mathbf{e}_i\mathbf{a}_\beta\quad (i=1,2;\quad \beta=2,3,4)$$

$$\mathbf{a}_{1,2}=\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\pm\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2,\quad \mathbf{a}_{3,4}=\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mp\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$$

Когда плоскость $z=0$ является плоскостью симметрии упругих свойств слоя, то $\mathbf{C}_2=0$ [5].

Если слой изготовлен из ортотропного материала, то получаем

$$\Gamma_1=0,\quad C_1^{14}=C_1^{24}=0,\quad \boldsymbol{\Gamma}_1=0,\quad \boldsymbol{\Gamma}_2=0 \tag{2.5}$$

$$C_2^{12}=C_2^{22}=C_2^{43}=C_2^{44}=0,\quad C_3^{23}=C_3^{24}=0$$

В случае трансверсально-изотропного материала слоя (ось изотропии совпадает с нормалью **n**) имеем

$$C_1^{12}=0, \quad C_1^{22}=C_1^{44}, \quad \Gamma_1=\Gamma, \quad \Gamma_2=0 \tag{2.6}$$
$$C_2^{14}=C_2^{23}=0, \quad C_2^{24}=-C_2^{42}, \quad C_3^{34}=0, \quad C_3^{22}=C_3^{44}$$

3. Ограничимся далее рассмотрением ортотропного материала слоя. Такой материал описывается обобщенным законом Гука [3]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_1^*}{\partial x_1}=\frac{1}{E_1}\sigma_1-\frac{\nu_{12}}{E_2}\sigma_2-\frac{\nu_{1n}}{E_n}\sigma_n, \quad &&\frac{\partial u_1^*}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2^*}{\partial x_1}=\frac{\tau_{12}}{G_{12}}\\
&\frac{\partial u_2^*}{\partial x_2}=-\frac{\nu_{21}}{E_1}\sigma_1+\frac{1}{E_2}\sigma_2-\frac{\nu_{2n}}{E_n}\sigma_n, \quad &&\frac{\partial u_1^*}{\partial z}+\frac{\partial w^*}{\partial x_1}=\frac{\tau_{1n}}{G_{1n}}\\
&\frac{\partial w^*}{\partial z}=-\frac{\nu_{n1}}{E_1}\sigma_1-\frac{\nu_{n2}}{E_2}\sigma_2+\frac{1}{E_n}\sigma_n, \quad &&\frac{\partial u_2^*}{\partial z}+\frac{\partial w^*}{\partial x_2}=\frac{\tau_{2n}}{G_{2n}}
\end{aligned} \tag{3.1}$$
$$\nu_{12}/E_2=\nu_{21}/E_1, \; \nu_{1n}/E_n=\nu_{n1}/E_1, \; \nu_{2n}/E_n=\nu_{n2}/E_2$$

где σ_1, σ_2, σ_n — нормальные, τ_{12}, τ_{1n}, τ_{2n} — касательные напряжения трехмерной теории упругости, u_1^*, u_2^*, w^* — компоненты соответствующего вектора перемещений. Все модули Юнга E_1, E_2, E_n, модули сдвига G_{12}, G_{1n}, G_{2n} и коэффициенты Пуассона ν_{12}, ν_{21}, ν_{1n}, ν_{2n}, ν_{n2} являются функциями от поперечной координаты z, причем на функциональные зависимости не налагаются дополнительные условия.

Какие же точные решения задачи теории упругости для слоя следует рассмотреть для того, чтобы определить модули пластинки? Однозначного ответа на этот вопрос нет [6]. Однако из механических соображений представляется бесспорным, что должны быть взяты решения для пластины, у которой поверхности $z=\pm h/2$ свободны от напряжений.

В качестве первого точного решения задачи о слое рассмотрим задачу изгиба с растяжением в плоскости пластинки. Приведем сначала решение соответствующей задачи для пластинки Коссера. Пластинка принимает форму (A_1, A_2, R_1, R_2 — постоянные числа):

$$u_1=A_1x_1, \; u_2=A_2x_2 \tag{3.2}$$
$$w=-{}^1/_2x_1^2/R_1-{}^1/_2x_2^2/R_2$$
$$\varphi_1=x_1/R_1, \; \varphi_2=x_2/R_2$$

Тогда для тензоров деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\varkappa}$ получаем выражения

$$\boldsymbol{\varepsilon}=A_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1+A_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2, \; \boldsymbol{\gamma}=0 \tag{3.3}$$
$$\boldsymbol{\varkappa}=\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2/R_1-\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1/R_2$$

После подстановки (3.3) в определяющие уравнения (1.8) получаем

$$\begin{aligned}
&T_{11}=A_1(C_1^{11}+2C_1^{12}+C_1^{22})+A_1(C_1^{11}-C_1^{22})+\\
&+(-C_2^{13}-C_2^{23}+C_2^{14}+C_2^{24})/R_1+(-C_2^{13}-C_2^{23}-C_2^{14}-C_2^{24})/R_2\\
&T_{22}=A_1(C_1^{11}-C_1^{22})+A_2(C_1^{11}-2C_1^{12}+C_1^{22})+\\
&+(-C_2^{13}+C_2^{23}+C_2^{14}-C_2^{24})/R_1+(-C_2^{13}+C_2^{23}-C_2^{14}+C_2^{24})/R_2\\
&M_{12}=A_1(-C_2^{13}+C_2^{14}-C_2^{23}+C_2^{24})+A_2(-C_2^{13}+C_2^{14}+C_2^{23}-C_2^{24})+\\
&+(C_3^{33}-2C_3^{34}+C_3^{44})/R_1+(C_3^{33}-C_3^{44})/R_2\\
&-M_{21}=A_1(-C_2^{13}-C_2^{14}-C_2^{23}-C_2^{24})+A_2(C_2^{23}+C_2^{24}-C_2^{14}-C_2^{13})+\\
&+(C_3^{33}-C_3^{44})/R_1+(C_3^{33}+2C_3^{34}+C_3^{44})/R_2
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Теперь рассмотрим упругий ортотропный параллелепипед толщины h. В соответствии с (3.3) имеем

$$\varepsilon_1^*=\partial u_1^*/\partial x_1=A_1+z/R_1, \; \varepsilon_2^*=\partial u_2^*/\partial x_2=A_2+z/R_2 \tag{3.5}$$

Из закона Гука (3.1) получаем следующие выражения для напряжений:

$$\sigma_1=\frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}(\varepsilon_1^*+\nu_{12}\varepsilon_2^*),\qquad \sigma_2=\frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}(\varepsilon_2^*+\nu_{21}\varepsilon_1^*) \tag{3.6}$$

Переход от тензора напряжений к тензору **T** и **M** осуществляется по (2.1). Тогда будем иметь

$$\begin{gathered}
T_{11}=A_1\left\langle\frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\right\rangle+\frac{1}{R_1}\left\langle\frac{E_1z}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\right\rangle+\\
+A_2\left\langle\frac{\nu_{12}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\right\rangle+\frac{1}{R_2}\left\langle\frac{\nu_{12}E_1z}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\right\rangle\\
T_{22}=A_2\left\langle\frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\right\rangle+\frac{1}{R_2}\left\langle\frac{E_2z}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\right\rangle+\\
+A_1\left\langle\frac{\nu_{21}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\right\rangle+\frac{1}{R_1}\left\langle\frac{\nu_{21}E_2z}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\right\rangle
\end{gathered} \tag{3.7}$$

$$M_{12}=A_1\left\langle\frac{E_1z}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\right\rangle+\frac{1}{R_1}\left\langle\frac{E_1z^2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\right\rangle+A_2\left\langle\frac{\nu_2E_1z}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\right\rangle+\frac{1}{R_2}\left\langle\frac{\nu_{12}E_1z^2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\right\rangle$$

$$-M_{21}=A_2\left\langle\frac{E_2z}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\right\rangle+\frac{1}{R_2}\left\langle\frac{E_2z^2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\right\rangle+A_1\left\langle\frac{\nu_{21}E_2z}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\right\rangle+\frac{1}{R_1}\left\langle\frac{\nu_{21}E_2z^2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\right\rangle$$

Сопоставляя (3.4) с (3.7), получаем неоднородную систему алгебраических уравнений, которая имеет единственное решение

$$\begin{gathered}
C_1^{11}=\frac{1}{4}\left\langle\frac{E_1+E_2+2E_1\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\right\rangle,\qquad C_1^{12}=\frac{1}{4}\left\langle\frac{E_1-E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\right\rangle\\
C_1^{22}=\frac{1}{4}\left\langle\frac{E_1+E_2-2\nu_{12}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\right\rangle,\qquad C_2^{13}=-\frac{1}{4}\left\langle\frac{E_1+E_2+2E_1\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}z\right\rangle\\
C_2^{24}=\frac{1}{4}\left\langle\frac{E_1+E_2-2E_1\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}z\right\rangle,\qquad C_2^{23}=-C_2^{14}=-\frac{1}{4}\left\langle\frac{E_1-E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}z\right\rangle\\
C_3^{33}=\frac{1}{4}\left\langle\frac{E_1+E_2+2\nu_{12}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}z^2\right\rangle,\qquad C_3^{34}=-\frac{1}{4}\left\langle\frac{E_1-E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}z^2\right\rangle\\
C_3^{44}=\frac{1}{4}\left\langle\frac{E_1+E_2-2\nu_{12}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}z^2\right\rangle
\end{gathered} \tag{3.8}$$

Для определения остальных компонент тензоров $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ рассматриваем задачу сдвига в плоскости. При этом пластинка Коссера принимает следующую форму:

$$\begin{gathered}
u_1=B_1x_2,\ u_2=B_1x_1,\ w=-B_2x_1x_2\\
\varphi_1=B_2x_2,\ \varphi_2=B_2x_1
\end{gathered} \tag{3.9}$$

Тогда в соответствии с выражениями для деформаций имеем $\varepsilon=B_1\mathbf{a}_4$, $\gamma=0$, $\varkappa=-B_2\mathbf{a}_2$; следовательно, с учетом (1.8) получаем

$$T_{12}=2(B_1C_1^{44}-B_2C_2^{42}),\ M_{11}=2(B_1C_2^{42}-B_2C_3^{22}) \tag{3.10}$$

Для неоднородного слоя с учетом (3.9) получаем формулу для деформации

$$\gamma_{12}^*={}^1/_2(\partial u_1^*/\partial x_2+\partial u_2^*/\partial x^1)=B_1+B_2z \tag{3.11}$$

Тогда $\tau_{12}=\tau_{21}=2\gamma_{12}^*G_{12}$ и в соответствии с формулами (2.1) будем иметь

$$\begin{gathered}
T_{12}=2(B_1\langle G_{12}\rangle+B_2\langle G_{12}z\rangle)\\
-M_{11}=2(B_1\langle G_{12}z\rangle+B_2\langle G_{12}z^2\rangle)
\end{gathered} \tag{3.12}$$

Сравнивая (3.10) и (3.12), приходим к выражениям для последних компонент тензоров $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$:

$$C_1^{44}=\langle G_{12}\rangle,\ C_2^{42}=-\langle G_{12}z\rangle,\ C_3^{22}=\langle G_{12}z^2\rangle \tag{3.13}$$

4. Для определения тензора модулей поперечного сдвига $\mathbf{\Gamma}$ рассмотрим поверхность Коссера ($-t\leqslant x_1\leqslant t$, $|x_2|<\infty$) под действием постоянного крутящего момента на краях $x_1=\pm t$. При этом принимаем

$$\mathbf{u}_1=u_2(x_1)\mathbf{e}_2,\ \boldsymbol{\varphi}=-\varphi_2(x_1)\mathbf{e}_1 \tag{4.1}$$

Тогда будем иметь

$$\boldsymbol{\varepsilon}={}^1/_2\partial u_2/\partial x_1\mathbf{a}_4,\ \boldsymbol{\gamma}=\varphi_2(x_1)\mathbf{e}_2,\ \boldsymbol{\varkappa}=-\partial\varphi_2/\partial x_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 \tag{4.2}$$

Учитывая соотношения (1.8), (2.4) и (2.5), получаем

$$\mathbf{T}=(C_1^{44}\partial u_2/\partial x_1-C_2^{42}\partial\varphi_2/\partial x_1)\mathbf{a}_4+(\Gamma_1-\Gamma_2)\varphi_2\mathbf{e}_2\mathbf{n}$$
$$\mathbf{M}=(C_2^{42}/\partial u_2/\partial x_1-C_3^{22}\partial\varphi_2/\partial x_1)\mathbf{a}_2 \tag{4.3}$$

Подставляя (4.3) в уравнения равновесия (1.3), найдем

$$C_1^{44}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}-C_2^{42}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_1^2}=0 \tag{4.4}$$
$$C_2^{42}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}-C_3^{22}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_1^2}+(\Gamma_1-\Gamma_2)\varphi_2=0$$

Система (4.4) при граничных условиях (M_{11}^* — заданный постоянный крутящий момент) $\pm\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{T}=0$, $\pm\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{M}=\pm M_{11}^*\mathbf{e}_1$ при $x_1=\pm t$ имеет следующее решение для u_2 и φ_2:

$$u_2=-M_{11}^*\frac{C_2^{42}}{C_1^{44}C_3^{22}-(C_2^{42})^2}\frac{\operatorname{sh}\check\lambda x_1}{\check\lambda\operatorname{ch}\check\lambda t}$$
$$\varphi_2=-M_{11}^*\frac{C_1^{44}}{C_1^{44}C_3^{22}-(C_2^{42})^2}\frac{\operatorname{sh}\check\lambda x_1}{\check\lambda\operatorname{ch}\check\lambda t}$$

Учитывая (3.13), окончательно имеем

$$u_2=M_{11}^*\frac{\langle G_{12}z\rangle}{\langle G_{12}\rangle\langle G_{12}z^2\rangle-\langle G_{12}z\rangle^2}\frac{\operatorname{sh}\check\lambda x_1}{\check\lambda\operatorname{ch}\check\lambda t} \tag{4.5}$$
$$\varphi_2=-M_{11}^*\frac{\langle G_{12}\rangle}{\langle G_{12}\rangle\langle G_{12}z^2\rangle-\langle G_{12}z\rangle^2}\frac{\operatorname{sh}\check\lambda x_1}{\check\lambda\operatorname{ch}\check\lambda t}$$
$$\check\lambda^2=(\Gamma_1-\Gamma_2)C_1^{44}/(C_1^{44}C_3^{22}-(C_2^{42})^2)$$

В соответствии с (4.5) получаем для усилий и моментов соотношения

$$T_{12}=0,\ M_{11}=M_{11}^*\operatorname{ch}\check\lambda x_1/\operatorname{ch}\check\lambda t \tag{4.6}$$

Рассмотрим аналогичную задачу для упругого слоя ($-t\leqslant x_1\leqslant t$, $|x_2|<\infty$, $|z|\leqslant h/2$). Будем иметь следующие перемещения: $u_1^*=w^*=0$, $u_2^*=u_2^*(x_1, z)$, которым соответствует тензор напряжений

$$\boldsymbol{\tau}=G_{12}\partial u_2^*/\partial x_1\mathbf{a}_4+G_{2n}\partial u_2^*/\partial z(\mathbf{e}_2\mathbf{n}+\mathbf{n}\mathbf{e}_2) \tag{4.7}$$

После подстановки (4.7) в уравнение равновесия теории упругости [3] получаем

$$G_{12}\frac{\partial^2 u_2^*}{\partial x_1^2}+\frac{\partial}{\partial z}\left(G_{2n}\frac{\partial u_2^*}{\partial z}\right)=0 \tag{4.8}$$

Решение уравнения (4.8) ищется при следующих граничных условиях:

$$\sigma_n=\tau_{1n}=\tau_{2n}=0 \text{ при } z=\pm h/2 \tag{4.9}$$

Применяя метод разделения переменных Фурье $u_2^*=X(x_1)Z(z)$, приходим к задаче Штурма — Лиувилля

$$d/dz(G_{2n}dZ/dz)+\lambda^2 G_{12}Z=0 \qquad (4.10)$$

$$dZ/dz=0 \text{ при } z=\pm h/2$$

и к уравнению

$$d^2X/dx_1^2-\lambda^2 X=0 \qquad (4.11)$$

Из множества решений задачи (4.10) выбираем то, которое соответствует наименьшему положительному λ. Решение уравнения (4.11) имеет вид $X(x_1)=B\,\mathrm{sh}\,\lambda x_1/(\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda t)$; таким образом $u_2^*=BZ(z)\mathrm{sh}\,\lambda x_1/(\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda t)$. Внося это выражение в (4.7) и вычисляя интересующие силы и моменты, получим

$$T_{12}=\langle\tau_{12}\rangle=\langle G_{12}Z(z)\rangle B \qquad (4.12)$$

$$M_{11}=-\langle\tau_{12}z\rangle=-B\langle G_{12}zZ(z)\rangle\mathrm{ch}\,\lambda x_1/\mathrm{ch}\,\lambda t$$

Чтобы убедиться, что правая часть в первом соотношении равна нулю, нужно проинтегрировать уравнение (4.10) и учесть граничные условия для функции $Z(z)$:

$$\langle G_{12}Z(z)\rangle=0 \qquad (4.13)$$

Постоянную B определим из условия, что при $x_1=t$ крутящий момент равен заданному M_{11}^*. В результате находим

$$T_{12}=0,\ M_{11}=M_{11}^*\,\mathrm{ch}\,\lambda x_1/\mathrm{ch}\,\lambda t \qquad (4.14)$$

$$u_2^*=-\frac{Z(z)M_{11}^*}{\langle G_{12}zZ(z)\rangle}\frac{\mathrm{sh}\,\lambda x_1}{\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda t}$$

Сопоставляя значения T_{12} и M_{11} с (4.6), находим, что оба выражения будут тождественно равны друг другу, если потребовать выполнение равенства

$$\lambda=\lambda^{\vee}=\sqrt{(\Gamma_1-\Gamma_2)C_1^{44}/(C_1^{44}C_3^{22}-(C_2^{42})^2)} \qquad (4.15)$$

А как сопоставить поля перемещений в этих двух решениях u_2^* (4.14) и (4.5)? Потребуем выполнения равенства в среднеквадратичном с весом

$$\langle G_{12}(u_2^*-u_2-z\varphi_2)^2\rangle=\min_{u_2,\varphi_2} \qquad (4.16)$$

Реализуя условие минимума, получаем с учетом (4.13):

$$u_2=\frac{M_{11}^*\langle G_{12}z\rangle}{\langle G_{12}\rangle\langle G_{12}z^2\rangle-\langle G_{12}z\rangle^2}\frac{\mathrm{sh}\,\lambda x_1}{\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda t}$$

$$\varphi_2=-\frac{M_{11}^*\langle G_{12}\rangle}{\langle G_{12}\rangle\langle G_{12}z^2\rangle-\langle G_{12}z\rangle^2}\frac{\mathrm{sh}\,\lambda x_1}{\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda t}$$

Сопоставляя эти выражения с (4.5), убеждаемся в их полном тождестве. Это связано с тем, что в (4.16) введен вес G_{12}. Если ввести другой вес, то тождества упомянутых выражений не будет!

Таким образом, для определения двух модулей сдвига пластинки Γ_1 и Γ_2 получено всего одно уравнение (4.15). Еще одно уравнение получим рассматривая аналогичную задачу для слоя и поверхности Коссера $|x_1|<\infty$, $|x_2|\leqslant s$ при действии постоянного крутящего момента на краях $x_2=\pm s$. Приходим к уравнению

$$\eta^2=\eta^{\vee 2}=(\Gamma_1+\Gamma_2)C_1^{44}/(C_1^{44}C_3^{22}-(C_2^{42})^2) \qquad (4.17)$$

причем η — наименьшее положительное собственное число задачи Штурма — Лиувилля

$$\frac{d}{dz}\left(G_{1n}\frac{dZ_1}{dz}\right)+\eta^2 G_{12}Z_1=0 \qquad (4.18)$$

$$dZ_1/dz=0 \text{ при } z=\pm h/2$$

Отметим, что, как и в предыдущем случае, сравнение пластического решения с трехмерным решением задачи о слое проводилось в смысле средних квадратов с тем же самым весом G_{12}:

$$\langle G_{12}[u_1^*(x_1,z)-u_1-z\varphi_1]^2\rangle=\min_{u_1,\varphi_1} \tag{4.19}$$

Найденные формулы осреднения (4.16) и (4.19) можно, очевидно, объединить:

$$\langle \mathbf{u}^*-\mathbf{u}-z\mathbf{c}\cdot\boldsymbol{\varphi})\cdot G_{12}\mathbf{a}_1\cdot(\mathbf{u}^*-\mathbf{u}-z\mathbf{c}\cdot\boldsymbol{\varphi})\rangle=\min_{\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi}} \tag{4.20}$$

При помощи равенств (4.15), (4.17) окончательно получаем

$$\Gamma_1={}^1/_2(\lambda^2+\eta^2)\frac{C_1^{44}C_3^{22}-(C_2^{42})^2}{C_1^{44}}$$

$$\Gamma_2={}^1/_2(\eta^2-\lambda^2)\frac{C_1^{44}C_3^{22}-(C_2^{42})^2}{C_1^{44}}$$

Таким образом, компоненты тензоров $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ и $\mathbf{C}_3$ находятся в конечном виде. Полученные здесь формулы совпадают с известными [7]. Что касается компонент тензора модулей сдвига, то их не удалось найти в конечной форме: для их определения требуется решить две граничные задачи (4.10) и (4.18). Представленные формулы отличаются от всего известных своей большей общностью.

Определим по полученным формулам сначала модули для однослойной пластины из изотропного материала. Единственными упругими характеристиками будут ($E_1=E_2=E$, $\nu_{12}=\nu_{21}=\nu_{1n}=\nu_{n1}=\nu_{2n}=\nu_{n2}=\nu$, $G_{12}=G_{1n}=G_{2n}=G=E/[2(1+\nu)]$):

$$C_1^{11}=\frac{1}{2}\left\langle\frac{E}{1-\nu}\right\rangle=\frac{Eh}{2(1-\nu)},\qquad C_1^{22}=\frac{Eh}{2(1+\nu)}=Gh$$

$$C_3^{33}=\frac{Eh^3}{24(1-\nu)},\qquad C_3^{44}=\frac{Eh^3}{24(1+\nu)}=\frac{Gh^3}{12}$$

Традиционные величины жесткости на растяжения K и на изгиб D равны

$$K=C_1^{11}+C_1^{22}=Eh/(1-\nu^2),\quad D=C_3^{33}+C_3^{44}=Eh^3/[12(1-\nu^2)]$$

Наименьший положительный корень (4.10) равен $\lambda=\pi/h$, а следовательно $\Gamma={}^1/_{12}\pi^2Gh$.

Это значение точно совпадает со значением, найденным Миндлиным, и практически совпадает со значением Рейсснера ($\Gamma={}^5/_6Gh$) [8].

Вторым примером будет изотропный материал с кусочно-постоянными упругими характеристиками. Этот случай имеет место, когда рассматриваются многослойные пластины с жестко сцепленными слоями. Например, для трехслойной пластины [$|z|\leqslant h_K/2$, E_K, ν_K, $G_K={}^1/_2E_K/(1+\nu_K)$, $h_K/2\leqslant|z|\leqslant h_D/2$, E_D, ν_D, $G_D={}^1/_2E_D/(1+\nu_D)$] получаем

$$K=E_D(h_D-h_K)/(1-\nu_D^2)+E_Kh_K/(1-\nu_K^2)$$

$$D={}^1/_{12}[E_D(h_D^3-h_K^3)/(1-\nu_D^2)+E_Kh_K^3/(1-\nu_K^2)]$$

$$\Gamma=(4\gamma^2/h^2)[G_D/(h_D^3-h_K^3)+G_Kh_K^3]$$

где γ определяется как наименьшее положительное решение следующего уравнения ($\alpha=h_K/h_D$):

$$G_K\cos\alpha\gamma\cos(1-\alpha)\gamma-G_D\sin\alpha\gamma\sin(1-\alpha)\gamma=0$$

Найденное решение Γ лежит в следующем диапазоне: $\Gamma_*\leqslant\Gamma\leqslant\Gamma_{**}$, где Γ_* найдено по аксиоме последовательного соединения $\Gamma_*={}^1/_{12}\pi^2G_KG_D(h_D-h_K)h_K/[4G_Kh_K+G_D(h_D-h_K)]$, а Γ_{**} — по аксиоме параллельного соединения $\Gamma_{**}={}^1/_{12}\pi^2[G_Kh_K+G_D(h_D-h_K)]$.

Вычисления показывают, что в случае сильно отличных свойств внешних слоев и внутреннего слоя, когда G_K на несколько порядков меньше G_D, Γ близко к Γ_*, когда G_K близко к G_D, Γ близко к Γ_{**}.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жилин П. А.* Основные уравнения неклассической теории упругих оболочек.— Сб. науч. тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1982, № 386, с. 29–46.
2. *Григолюк Э. И., Коган Ф. А.* Современное состояние теории многослойных оболочек.— Прикл. механика, 1972, т. 8, № 6, с. 3—17.
3. *Лурье А. И.* Теория упругости М.: Наука, 1970. 939 с.
4. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
5. *Altenbach H., Shilin P. A.* Die bestimmung der deformationsenergie für dreischichtige, orthotrope, dünne schalen konstanter dicke.— Wiss Z., TH Magdeburg, B. 26, H. 4, S. 7—10.
6. *Palmow W. A., Altenbach H.* Über eine Cosseratsche Theorie für elastische Platten.— Techn. Mech., B. 3, H. 3, S. 5–9.
7. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов М.: Мир, 1982. 334 с.
8. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* Неклассические теории стержней, пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1973. 272 с.

ГДР, Магдебург

Поступила в редакцию
21.II.1985