

УДК 539.3

**АНАЛИЗ ДЕФОРМАЦИЙ ОБОЛОЧЕК ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ
ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

КУЗНЕЦОВ В. В., СОЙНИКОВ Ю. В.

С использованием классических гипотез тонких оболочек получены аппроксимационные выражения для деформаций и искривлений малого элемента оболочки произвольной формы при любых перемещениях и поворотах. Для принятой модели конечного элемента получено точное выражение первой и второй вариаций потенциальной энергии, используемые в итерационном процессе решения. Приведены два примера расчета оболочки и пластины при перемещениях, сравнимых с наибольшим линейным размером тела.

1. При определении деформированного состояния оболочек произвольной формы в области существенно больших перемещений с помощью классического аппарата дифференциальной геометрии [1, 2] возникают значительные затруднения при получении решения численными методами, которые связаны как с построением специальных криволинейных координат на поверхности, так и с громоздкостью общих деформационных соотношений. Для преодоления этих трудностей концепция конечных элементов предоставляет дополнительные средства, связанные с возможностями локального описания геометрии поверхности.

Возьмем на поверхности некоторую точку o и построим ортогональный трехгранник с единичными ортами e_i ($i=1, \dots, 3$) так, что орты e_i ($i=1, 2$) образуют плоскость, касательную к поверхности в данной точке. Радиус-векторы произвольной точки на плоскости r^p и на поверхности r выражаются в виде

$$r^p = r^0 + \alpha_i e_i, \quad r = r^p + \zeta e_3 \quad (i=1, 2) \quad (1.1)$$

где α_i — декартовы координаты на плоскости, $\zeta = \zeta(\alpha_1, \alpha_2)$ — функция, задающая форму поверхности в окрестности точки o , r^0 — радиус-вектор начала координат. Здесь и в дальнейшем используется правило суммирования по повторяющимся дважды (немым) индексам.

Вычислив частные производные от r по α_i , получим два вектора, касательных к поверхности $r_{,i} = e_i + \zeta_{,i} e_3$.

Индекс после запятой означает дифференцирование по параметру α с тем же индексом. Поскольку векторы e_i касательны к поверхности, то в точке o имеют место равенства

$$r_{,i} = e_i, \quad \zeta_{,i}|_{\alpha=0} = 0, \quad \alpha = \sqrt{\alpha_i \alpha_i} \quad (i=1, 2) \quad (1.2)$$

где α — модуль вектора, построенного из точки o до некоторой точки на плоскости. На основании (1.2) можно заключить, что разложение Тейлора функции $\zeta(\alpha_1, \alpha_2)$ в окрестности точки o имеет вид

$$\zeta = \frac{1}{2} k_{ij} \alpha_i \alpha_j + O(\alpha^3) \quad (1.3)$$

где k_{ij} — некоторые коэффициенты. Выясним их смысл. Для этого запишем коэффициенты второй квадратичной формы b_{ij} поверхности, заданной уравнением (1.3) [3]:

$$b_{ij} = \zeta_{,ij} / \sqrt{1 + \zeta_{,k}^2} \quad (i, j, k=1, 2) \quad (1.4)$$

Подставив разложение (1.3) в формулу (1.4) и положив $\alpha=0$, получим

$b_{ij}=k_{ij}$ при $\alpha=0$. Таким образом, коэффициенты k_{ij} равны коэффициентам второй квадратичной формы поверхности в точке o .

Ограничимся рассмотрением малых по сравнению с единицей деформаций срединной поверхности элемента оболочки и будем считать справедливой гипотезу Кирхгофа — Лява [1]. На перемещения и повороты самого элемента ограничений накладывать не будем. При перемещении точки o поверхности в точку o_1 вместе с ней будет перемещаться и касательная плоскость: орты e_i переходят в орты e_i^\sim . Представим вектор деформированной поверхности r^\sim в виде $r^\sim=r^p+\xi^\sim e_3^\sim$, $\xi^\sim=\xi+w$, где r^p — вектор на касательной плоскости к деформированной оболочке, w — прогиб. Функции $\xi^\sim(\alpha_1, \alpha_2)$, $w(\alpha_1, \alpha_2)$ в окрестности точки o_1 имеют разложение, подобное (1.3)

$$\xi^\sim=1/2 k_{ij}^\sim \alpha_i \alpha_j + O(\alpha^3), \quad w=1/2 (k_{ij}^\sim - k_{ij}) \alpha_i \alpha_j + O(\alpha^3) \quad (1.5)$$

Вычисляя компоненты тензора деформаций в срединной поверхности и на расстоянии z от срединной поверхности по общим формулам [1, 2], получаем $\varepsilon_{ij}^z = \varepsilon_{ij} + z \kappa_{ij}$.

Оценим порядок величин, связанных с прогибом w , в выражениях для $\varepsilon_{ij} \approx 1/2 (r_{,i}^\sim r_{,j}^\sim - \delta_{ij}) + 1/2 [\xi_{,i} w_{,j} + \xi_{,j} w_{,i} + w_{,i} w_{,j}]$. Согласно (1.3), (1.5), члены, заключенные в квадратных скобках, имеют порядок $O(\alpha^2)$. Пренебрегая этими величинами для малого элемента, находим

$$\varepsilon_{ij} = 1/2 (r_{,i}^\sim r_{,j}^\sim - \delta_{ij}) \quad (i, j=1, 2) \quad (1.6)$$

С принятой степенью точности искривления κ_{ij} запишутся в виде

$$\kappa_{ij} = 1/2 (\theta_{i,j} + \theta_{j,i}), \quad \theta_i = -w_{,i} \quad (i, j=1, 2) \quad (1.7)$$

где θ_i — изменения косинусов углов наклона вектора нормали n к касательной плоскости. Вычисляя эти величины через вектор нормали n^\sim к деформированной поверхности, получаем

$$\theta_i = n^\sim r_{,i}^\sim - n r_{,i}^p \quad (i=1, 2) \quad (1.8)$$

Хотя введенные меры деформаций и искривлений носят приближенный характер, связанный с малостью рассматриваемой области изменения параметров α_i , они точно обращаются в нуль при произвольных перемещениях элемента как твердого тела. В этом частном случае имеем $r_{,i}^\sim = e_i^\sim$, $n^\sim e_i^\sim = n e_i$.

Соотношения (1.6), (1.7) известны в теории плоского деформированного состояния и малых прогибов тонких пластин. В выражении (1.6) содержатся кроме линейных членов относительно упругих перемещений v_i в плоскости также их произведения. Положим, что упругие перемещения являются малыми, тогда эти произведения могут быть отброшены после выделения перемещений твердого тела, в результате чего соотношение (1.6) приведет к известному в линейной теории виду: $\varepsilon_{ij} = 1/2 (v_{i,j} + v_{j,i})$, $v_i = (r^\sim - r^t) e_i^\sim$. Здесь r^t — радиус-вектор срединной поверхности, получающийся в результате бездеформационного перемещения элемента. Ввиду того что точное определение единичных ортов e_i^\sim в выражении для v_i связано с выполнением трансцендентных операций над векторами, в приводимом ниже алгоритме предпочтение отдано выражению (1.6).

2. Деформационные соотношения для пластин применялись к расчету оболочек методом конечных элементов в линейной постановке ранее [4, 5]. К геометрически нелинейным задачам такой подход применялся в [6, 7]. При этом в обоих случаях рассматривается прямая замена оболочки многогранником и в качестве характеристик исходной геометрии используются только радиусы-векторы узлов элементов. Проведенная оценка общих деформационных соотношений показывает, что деформационные соотношения для пластин могут рассматриваться как аппроксимационные. В то же время условия связи (1.8) изменений косинусов углов наклона нормали к касательной плоскости включают в качестве геометрических характеристик единичный вектор нормали к исходной поверхности n и к деформированной n^\sim . Эти соотношения следуют из условия непрерывности вектора нормали при переходе от одного элемента поверхности к другому.

Проведенный анализ говорит о том, что гладкая оболочка не может быть представлена совокупностью плоских элементов в буквальном смысле (заменена многогранником), но может быть ими аппроксимирована с выполнением условий непрерывности вектора нормали.

При построении конечноэлементных моделей оболочек на основе треугольных элементов удобно в качестве координатной плоскости использовать секущую плоскость, которую легко построить зная радиусы-векторы трех узлов элемента до и после деформации. Как известно, секущая плоскость стремится к касательной при сближении трех точек. Пусть до деформации радиусы-векторы этих точек были \mathbf{r}_i ($i=1, 2, 3$). Тогда радиус-вектор какой-либо точки на плоскости до деформации и после можно выразить следующим образом [4]:

$$\mathbf{r}^p = \mathbf{r}_i L_i, \quad \mathbf{r}^{\check{p}} = \mathbf{r}_i \check{L}_i, \quad L_i = a_i + b_{im} \alpha_m \quad (2.1)$$

$$a_i = 1/2 (\alpha_{1j} \alpha_{2k} - \alpha_{1k} \alpha_{2j}) / F$$

$$b_{i1} = 1/2 (\alpha_{2j} - \alpha_{2k}) / F, \quad b_{i2} = 1/2 (\alpha_{1k} - \alpha_{1j}) / F \quad (i=1, 2, 3; j=2, 3, 1; k=3, 1, 2)$$

Здесь F — площадь треугольника, проведенного через три заданные точки, α_{mk} — координаты вершин треугольника на плоскости (первый индекс соответствует номеру координаты, а второй — номеру вершины).

Производные $\mathbf{r}_{,i}^p$, $\mathbf{r}_{,i}^{\check{p}}$ вычисляются по формулам

$$\mathbf{r}_{,i}^p = b_{ji} \mathbf{r}_j, \quad \mathbf{r}_{,i}^{\check{p}} = b_{ji} \check{\mathbf{r}}_j \quad (i=1, 2; j=1, \dots, 3) \quad (2.2)$$

Подставляя эти производные в формулу для ε_{ij} , замечаем, что они соответствуют постоянным значениям компонент тензора деформаций срединной поверхности в элементе. Искривления \varkappa_{ij} запишем в виде

$$\varkappa_{ij} = 1/2 (N_{km,ij} + N_{km,ji}) \theta_{km} \quad (2.3)$$

$$\theta_{km} = \mathbf{n}_m \check{\mathbf{r}}_{,k}^p - \mathbf{n}_m \mathbf{r}_{,k}^p \quad (i, j, k=1, 2; m=1, 2, 3)$$

где N_{km} — функции формы, θ_{km} — узловое значения изменений косинусов углов наклона нормали (первый индекс соответствует номеру косинуса, второй — номеру узла); \mathbf{n}_m (\mathbf{n}_m) — значения вектора нормали в каждом узле.

Функциями формы, описывающими изменения кривизн элемента, примем выражения из [8] (Σ_i' означает, что суммирование по i не производится)

$$N_{1i} = 2F (b_{k2} \eta_{1i} - b_{j2} \eta_{2i}), \quad N_{2i} = 2F (b_{j1} \eta_{2i} - b_{k1} \eta_{1i}) \quad (2.4)$$

$$\eta_{1i} = L_i^2 L_j + c_{1i} L_i L_j L_k, \quad \eta_{2i} = L_i^2 L_k + c_{2i} L_i L_j L_k$$

$$c_{1i} = 1/2 (3h_i^2 - h_j^2 + h_k^2) / H^2$$

$$c_{2i} = 1/2 (3h_i^2 + h_j^2 - h_k^2) / H^2, \quad H^2 = h_i^2 + h_j^2 + h_k^2 \quad (\Sigma'_{i,j,k})$$

Выражения для всех функций форм получаются по формулам (2.4) путем циклической перестановки индексов i, j, k .

Запишем потенциальную энергию конечного элемента оболочки

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_F (T_{ij} \varepsilon_{ij} + M_{ij} \varkappa_{ij}) dF \quad (2.5)$$

$$T_{ij} = B [(1-\nu) \varepsilon_{ij} + \nu (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \delta_{ij}]$$

$$M_{ij} = D [(1-\nu) \varkappa_{ij} + \nu (\varkappa_{11} + \varkappa_{22}) \delta_{ij}]$$

$$B = Eh / (1-\nu^2), \quad D = Bh^2 / 12$$

где h — толщина оболочки, E, ν — упругие постоянные, δ_{ij} — символ Кронекера. С помощью линейного преобразования переменных

$$\tau_{ij} = B^* [(1-\nu^*) \varepsilon_{ij} + \nu^* (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \delta_{ij}] \quad (2.6)$$

$$\mu_{ij} = D [(1-\nu^*) \varkappa_{ij} + \nu^* (\varkappa_{11} + \varkappa_{22}) \delta_{ij}], \quad \nu^* = \nu / (1 + (1-\nu^2)^{1/2}),$$

$$B^* = [B / (1 + \nu^*{}^2)]^{1/2}, \quad D^* = [D / (1 + \nu^*{}^2)]^{1/2}$$

приведем квадратичную форму (2.5) к каноническому виду суммы квадратов

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_F (\tau_{ij}^2 + \mu_{ij}^2) dF \quad (2.7)$$

Введем не зависящий от координат α_i вектор обобщенных упругих перемещений

$$\mathbf{u}^T = |\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \theta_{11}, \theta_{21}, \theta_{12}, \theta_{22}, \theta_{13}, \theta_{23}| \quad (2.8)$$

Ввиду линейной зависимости τ_{ij} , μ_{ij} от компонент вектора \mathbf{u} для них имеют место представления

$$\tau_{ij} = (\boldsymbol{\tau}_{ij}')^T \mathbf{u}, \quad \mu_{ij} = (\boldsymbol{\mu}_{ij}')^T \mathbf{u} \quad (2.9)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{ij}' = |\partial \tau_{ij} / \partial u_1, \dots, \partial \tau_{ij} / \partial u_9|^T, \quad \boldsymbol{\mu}_{ij}' = |\partial \mu_{ij} / \partial u_1, \dots, \partial \mu_{ij} / \partial u_9|^T$$

Вычисляя ненулевые компоненты этих векторов, получаем

$$\partial \tau_{ij} / \partial \varepsilon_{km} = B^* [\delta_{ik} \delta_{jm} (1 - \nu^*) + \delta_{ij} \delta_{km} \nu^*] \quad (2.10)$$

$$\partial \mu_{ij} / \partial \theta_{km} = D^* [\delta_{ip} \delta_{jn} (1 - \nu^*) + \delta_{ij} \delta_{pn} \nu^*] N_{km, pn}$$

Используя выражения (2.9), запишем потенциальную энергию как функцию вектора \mathbf{u} :

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{K} = \iint_F [\boldsymbol{\tau}_{ij}' (\boldsymbol{\tau}_{ij}')^T + \boldsymbol{\mu}_{ij}' (\boldsymbol{\mu}_{ij}')^T] dF \quad (2.12)$$

Выражение (2.12) дает способ вычисления матрицы жесткости \mathbf{K} размерности (9×9) через диадное произведение векторов [9]. Ввиду того что потенциальная энергия (2.11) записывается через вектор \mathbf{u} , так же как и в случае линейной задачи, он был назван вектором обобщенных упругих перемещений. Отметим, что матрица \mathbf{K} совпадает с матрицей жесткости закрепленного от перемещений твердого тела треугольного конечного элемента пластины, испытывающей деформации изгиба и растяжения — сдвига срединной поверхности. Интегрирование в выражении (2.12) осуществляется по кубатурным формулам Гаусса [4].

Одним из эффективных методов решения нелинейных алгебраических уравнений является метод Ньютона — Канторовича [10, 11], основанный на разложении потенциальной энергии в ряд по приращениям обобщенных координат δq_{ij} .

Выберем в качестве обобщенных координат в узле элемента приращения декартовых координат δx_{ij} и компоненты первой вариации вектора нормали $\delta \varphi_{ij}$:

$$\delta \mathbf{q}_i = |\delta x_{1j}, \delta x_{2j}, \delta x_{3j}, \delta \varphi_{1j}, \delta \varphi_{2j}|^T \quad (j=1, \dots, 3) \quad (2.13)$$

В целом элемент характеризуется 15-компонентным вектором обобщенных координат $\delta \mathbf{q} = |\delta \mathbf{q}_1^T, \delta \mathbf{q}_2^T, \delta \mathbf{q}_3^T|^T$. Разложение потенциальной энергии элемента до вторых степеней приращений обобщенных координат записывается в форме

$$\Pi = \Pi_0 + (\mathbf{g}^\Pi)^T \delta \mathbf{q} + \frac{1}{2} (\delta \mathbf{q})^T \mathbf{H}^\Pi (\delta \mathbf{q}) \quad (2.14)$$

где \mathbf{g}^Π , \mathbf{H}^Π — градиент и гессиан потенциальной энергии. Для потенциальной энергии, заданной в форме (2.11), нетрудно получить выражения

$$\mathbf{g}^\Pi = \mathbf{u}' \mathbf{P}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{K} \mathbf{u}, \quad \mathbf{H}^\Pi = \mathbf{u}' \mathbf{K} (\mathbf{u}')^T + \mathbf{P}_i \mathbf{u}_i'' \quad (i=1, \dots, 9) \quad (2.15)$$

$$\mathbf{u}' = \left| \frac{\partial u}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial q_{15}} \right|^T, \quad \mathbf{u}_i'' = \left\| \frac{\partial^2 u_i}{\partial q_r \partial q_s} \right\| \quad (i=1, \dots, 9; \quad r, s=1, \dots, 15)$$

Производные $\partial u_i / \partial q_h$, $\partial^2 u_i / (\partial q_h \partial q_m)$ для матриц \mathbf{u}' , \mathbf{u}_i'' находятся из вариации компонент вектора \mathbf{u} по обобщенным координатам

$$\delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial q_h} \delta q_h, \quad \delta^2 u_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial q_m \partial q_h} \delta q_m \delta q_h \quad (2.16)$$

Нахождение $\partial u_i / \partial x_{kj}$ не вызывает каких-либо затруднений. При вычислении $\partial u_i / \partial \varphi_{kj}$ следует иметь в виду, что по φ_{kj} варьируются только направляющие косинусы λ_{kj}^n векторов нормали \mathbf{n}_j :

$$\frac{\partial \lambda_{kj}^n}{\partial \varphi_{ij}} = \lambda_{ikj}, \quad \frac{\partial \lambda_{ikj}^n}{\partial \varphi_{mj}} = -\delta_{im} \lambda_{kj}^n \quad (i, m = 1, 2; \Sigma_j') \quad (2.17)$$

Здесь λ_{ikj} — направляющие косинусы двух вспомогательных векторов в узле j , образующих совместно с \mathbf{n}_j взаимно ортогональную тройку.

Ненулевые компоненты матрицы \mathbf{u}_j' имеют следующие выражения:

$$\partial \varepsilon_{ij} / \partial x_{km} = 1/2 (b_{mi} x_{h,j}^p + b_{mj} x_{h,i}^p) \quad (2.18)$$

$$\partial \theta_{ij} / \partial x_{km} = b_{mi} \lambda_{kj}^n, \quad \partial \theta_{ij} / \partial \varphi_{kj} = \lambda_{kmj}^n x_{m,i}^p \quad (\Sigma_j')$$

Аналогично вычисляются матрицы \mathbf{u}_i'' ($i=1, \dots, 9$), ненулевые компоненты которых имеют вид

$$\partial^2 \varepsilon_{ij} / \partial x_{km} \partial x_{hs} = 1/2 (b_{mi} b_{sj} + b_{mj} b_{si}) \quad (\Sigma_h') \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_{ij}}{\partial x_{km} \partial \varphi_{sj}} = b_{mi} \lambda_{shj}^n \quad (\Sigma_j'), \quad \frac{\partial^2 \theta_{ij}}{\partial \varphi_{kj}^2} = -\lambda_{mj}^n x_{m,i}^p \quad (\Sigma_{h,i}')$$

Полученные выражения дают полную информацию для вычисления градиента и гессиана потенциальной энергии конечного элемента оболочки. Все полученные формулы обнаруживают явную зависимость от значений индексов, поэтому процесс получения градиента и гессиана оболочечного элемента может быть полностью алгоритмизирован на ЭВМ при помощи оператора цикла.

Если потенциал внешних сил W является линейной функцией вектора обобщенных координат $W = -\mathbf{Q}^T \mathbf{q}$, то приращение $\delta \mathbf{q}$ для ансамбля находится итерационным путем из системы уравнений (\mathbf{Q} — вектор обобщенных сил)

$$\mathbf{H}^{\Pi} \delta \mathbf{q} + \mathbf{g}^{\Pi} - \mathbf{Q} = 0 \quad (2.20)$$

Решение системы линейных уравнений (2.20), которое осуществлялось методом Гаусса с учетом симметрии матрицы \mathbf{H}^{Π} , представляет собой один шаг итерационного процесса нахождения вектора неизвестных \mathbf{q} .

Запишем далее формулы вычисления новых значений, неизвестных по найденным приращениям δq_i . Поскольку в вектор $\delta \mathbf{q}$ входят приращения δx_{ij} глобальных, а не локальных координат узлов, то новое значение самих координат x_{ij}^{*} получается обычным суммированием. При разложении компонент приращения радиуса-вектора по ортам локальной системы координат формулы суммирования имели бы несколько иной вид. Для вычисления с помощью $\delta \varphi_{ij}$ новых значений направляющих косинусов нормали λ_{ij}^{n*} и двух вспомогательных ортов λ_{hij}^{n*} существуют специальные формулы, сохраняющие единичность и ортогональность вновь полученных векторов. Окончательно будем иметь

$$x_{ij}^{*} = x_{ij} + \delta x_{ij} \quad (2.21)$$

$$\lambda_{ij}^{n*} = a_1 \lambda_{ij}^n + a_2 \lambda_{hij}^n \delta \varphi_{hj} \quad (\Sigma_j')$$

$$\lambda_{hij}^{*} = \lambda_{hij}^n - \delta \varphi_{kj} (a_2 \lambda_{ij}^n + a_3 \lambda_{mij}^n \delta \varphi_{mj})$$

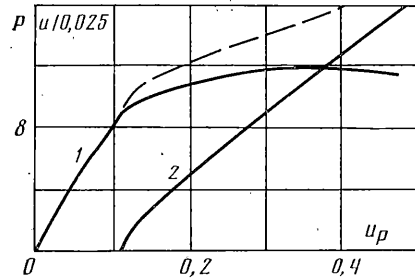
$$a_1 = \cos \delta \varphi_j, \quad a_2 = (\sin \delta \varphi_j) / \delta \varphi_j$$

$$a_3 = (1 - \cos \delta \varphi_j) / \delta \varphi_j^2, \quad \delta \varphi_j = (\delta \varphi_{ij}^2)^{1/2} \quad (\Sigma_j')$$

После этого можно определить новые координатные плоскости элементов по формуле (2.1) и повторить вычислительный процесс до получения заданной точности. Отметим два момента такого процесса: процесс обладает полной консервативностью, т. е. упругая энергия на любой итерации зависит только от текущего и начального значения неизвестных и не зависит от значения этих неизвестных на промежуточных итерациях;

$(g^{\Pi})^T \delta q$ и $(\delta q)^T H^{\Pi} \delta q$ являются точными выражениями первой и второй вариаций потенциальной энергии упругой системы с конечным числом степеней свободы. Это обстоятельство может быть использовано при определении реакций в связях и в вопросах устойчивости.

3. Обычно метод Ньютона — Канторовича применяется в сочетании с шаговым изменением параметра нагрузки. Последовательно увеличивая нагрузку, для построения характеристики «нагрузка — перемещение» можно проследить весь процесс нелинейного деформирования. При этом возникает задача определения устойчивости найденных состояний равновесия, которая решается проверкой гесса на знакоопределенность в соответствии с энергетическим критерием устойчивости. Положительно-определенной матрице H^{Π} соответствует устойчивое состояние равновесия, а неположительно определенной — неустойчивое. Смена знака угловых миноров матрицы Гесса является признаком прохождения точки ветвления форм равновесия или предельной точки. При непрерывной зависимости решения задачи от параметра нагрузки в критической точке $\det(H^{\Pi})=0$ (на практике имеет место приближенное равенство). В такой точке наблюдается плохая сходимость либо расходимость итерационного процесса. Эффективным методом продолжения решения после критической точки является вычисление собственного вектора матрицы H^{Π} (формы потери устойчивости). Практически для этого необходимо вычеркнуть одно из уравнений системы [12], поскольку равенство нулю определителя говорит о линейной зависимости уравнений. Затем собственный вектор, умноженный на масштабный множитель, прибавляется к полученному ранее решению.



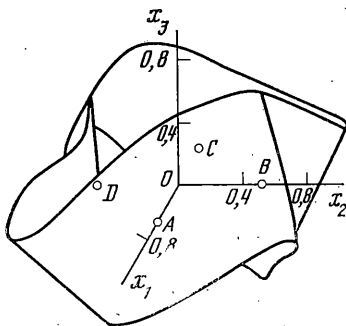
Фиг. 1

Описанная процедура применялась для нахождения закритических состояний, а масштабный множитель выбирался из условия положительной определенности матрицы H^{Π} . Это обеспечивало сходимость метода Ньютона — Канторовича к новым устойчивым закритическим формам равновесия.

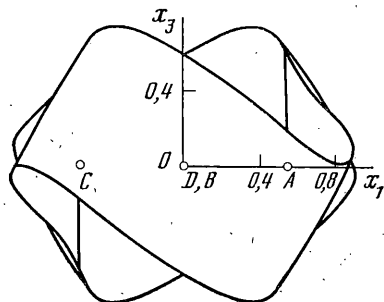
Формирование градиента и гесса для ансамбля конечных элементов в уравнении (2.20) производится согласно схеме их соединения, которая задается с помощью матрицы индексов $\|M_{ij}\|$ [5], где M_{ij} — номер узла i -го элемента (для треугольного элемента $j=1, 2, 3$). Такую матрицу индексов удобно использовать, если матрица Гесса и градиент всей конструкции помещаются в оперативную память ЭВМ и их формирование производится в цикле по элементам. Если гесса и градиент всей конструкции не могут быть размещены в оперативной памяти ЭВМ, то заполнение соответствующей матрицы и вектора удобнее производить последовательно по строкам и компонентам. Для этого используется матрица $\|N_{ij}\|$ ($j=1, \dots, b$), где N_{ij} — номер элемента, содержащего i -й узел (b — максимальное количество элементов, примыкающих к i -му узлу). Построчное формирование системы разрешающих уравнений с помощью матрицы $\|N_{ij}\|$ позволяет в процессе решения организовать оптимальный обмен с внешними устройствами ЭВМ.

При помощи изложенного метода было исследовано нелинейное деформирование и потеря устойчивости короткой цилиндрической оболочки при действии сосредоточенных нагрузок. Деформирование цилиндрической оболочки с соотношением размеров $l/R=1$, $h/R=0,01$ (l, R, h — длина, радиус, толщина оболочки) осуществлялось заданием смещений в радиальном направлении четырех симметрично расположенных точек.

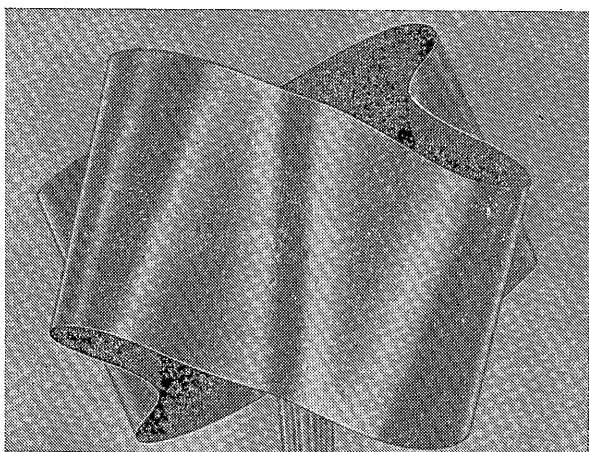
На фиг. 1 кривая 1 соответствует зависимости параметра реакции P в этих точках от параметра смещения u_p , равного отношению действительного перемещения к радиусу. Безразмерный параметр P связан с реакциями Q зависимостью $P=Q R^2 / (l D)$. На диаграмме равновесных состояний сплошной линией показана устой-



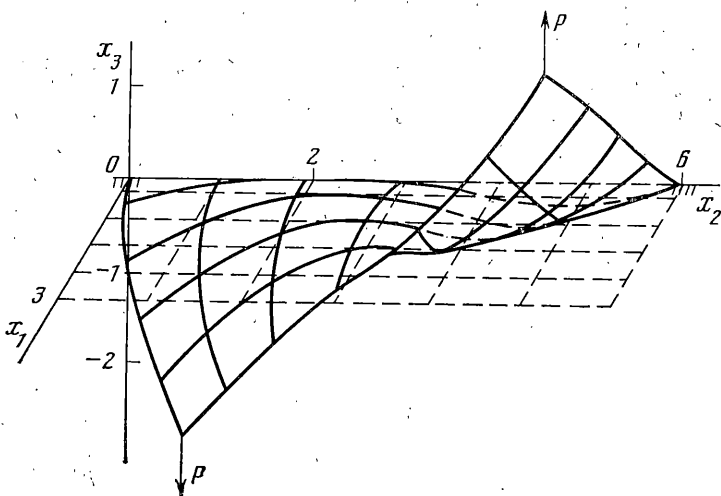
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

чивая ветвь, а штриховой — неустойчивая. Участок диаграммы до точки ветвления соответствует плоским четырехлепестковым формам равновесия. После прохождения точки бифуркации такие состояния становятся неустойчивыми. В этом случае устойчивыми будут неплоские равновесные формы с депланацией оболочки в осевом направлении. Оболочка принимает своеобразную форму серпантина с изгибом и кручением срединной поверхности.

На фиг. 2, 3 показаны диметрическая и боковая проекции деформированной поверхности, полученной на последнем шаге нагружения (перемещения заданы в точках A, B, C, D).

В качестве характеристики нелинейного деформирования оболочки может быть использована также зависимость максимальной депланации u от смещения точек u_p (фиг. 1, кривая 2). Здесь неустойчивым формам равновесия соответствуют точки, лежащие на оси абсцисс правее точки бифуркации.

Простота схемы нагружения в рассмотренной задаче позволила воспроизвести такой характер деформирования на тонкой целлулоидной модели. Перемещения точек задавались с помощью четырех радиально натянутых нитей, сходящихся в центре оболочки.

На фиг. 4 приведена фотография деформированной оболочки, сделанная при эксперименте. Расчетная схема содержала 96 треугольных конечных элементов, соединенных по схеме «крест» [4] с общим количеством узлов, равным 72.

Во втором примере была решена задача изгиба прямоугольной пластинки двумя равными и противоположно направленными сосредоточенными силами, характеризуемым безразмерным параметром $P=3,6 \cdot 10^3 Q/(Ehb)$, где Q — значение силы, E — модуль упругости; отношение сторон пластинки $b/a=1/2$. Нагружение проводилось до значения параметра нагрузки $P=0,076$. Расчетная схема содержала 108 конечных элементов и 70 узлов.

Форма деформированной пластинки при $P=0,076$ показана на фиг. 5.

Программа расчета была реализована на языке «Альфа-6» ЭВМ БЭСМ-6. Время

счета одной итерации метода Ньютона — Канторовича в режиме построчного формирования системы разрешающих уравнений составляло для рассмотренных примеров 28 с.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Гостехиздат, 1953. 544 с.
2. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Л.— М.: Гостехиздат, 1948. 211 с.
3. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. Л.— М.: Гостехиздат, 1950. 428 с.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
5. Постнов В. А., Хархурим И. Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1974. 341 с.
6. Yoshida Y., Nomura T., Masura N. A formulation and solution procedure for post-buckling of thin-walled structures.— *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, 1982, v. 32, p. 371—403.
7. Argyris J. H., Dunne P. C., Malejanakis G. A., Schelkle E. A simple triangular facet shell element with application to linear and nonlinear equilibrium and elastic stability problems.— *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, 1977, v. 10, p. 97—131.
8. Бадрухин Ю. И., Кузнецов В. В., Соиников Ю. В. К вопросу о построении согласованных изгибных конечных элементов.— В кн.: Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Тр. 7-й Всесоюз. конф. Миасс: Изд-во Ин-та теор. и прикл. механ. СО АН СССР, 1982, с. 256—261.
9. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
10. Канторович Л. В., Акилов Г. Р. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: Физматгиз, 1959. 684 с.
11. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.
12. Рублев А. Н. Курс линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Высш. шк., 1972. 420 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
11.III.1985