

УДК 539.374

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН
В ВЯЗКОУПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ
С УЧЕТОМ ВНУТРЕННЕГО ТЕПЛООБРАЗОВАНИЯ
И ЗАВИСИМОСТИ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

ГАСАНОВ А. Б., ИЛЬЯСОВ М. Х., КИЙКО И. А.

Нестационарные динамические задачи термовязкоупругости математически сложны. Несмотря на то что строгая теория деформирования этих сред создана давно [1], в литературе имеются лишь численные решения [2, 3] прикладных задач. В некоторых частных постановках и для конкретных моделей подобные задачи рассмотрены в работах [4–6]. Используется также метод малого параметра¹, который позволяет построить аналитические решения широкого класса указанных задач с учетом зависимости свойств материала от нестационарного и неоднородного температурного поля при отсутствии диссипации энергии; ее учет приводит задачи к нелинейным и их аналитическое исследование усложняется.

В публикуемой работе на основе сочетания методов интегральных преобразований, малого параметра и последовательных приближений построены решения нелинейных краевых задач линейной теории термовязкоупругости о распространении нестационарных одномерных волн в материалах с произвольными наследственными свойствами.

1. Пусть на поверхность $x=0$ вязкоупругого полупространства с момента времени $t=0$ начинает действовать равномерно распределенная нормальная нагрузка. Определение напряженно-деформированного состояния полупространства сводится к интегрированию уравнения движения

$$\partial \sigma_{xx}(x, t) / \partial x = \rho \partial^2 u(x, t) / \partial t^2 \quad (1.1)$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$u = \partial u / \partial t = 0, \quad t = 0, \quad (1.2)$$

$$\sigma_{xx}(0, t) = \sigma_0 f(t), \quad \sigma_{xx} = 0, \quad x \rightarrow \infty \quad (1.3)$$

где $\sigma_{xx} = \sigma + s_{xx}$ — компонент тензора напряжения, σ — шаровой тензор, s_{xx} — компонент деватора тензора напряжения, $u(x, t)$ — перемещение, ρ — плотность материала, $f(t)$ — заданная функция, σ_0 — постоянная.

Определяющие соотношения примем в виде

$$\sigma(x, t) = \int_0^t R_1(t' - \tau') d[e(x, \tau) - \alpha \theta(x, \tau)]$$

$$S_{xx}(x, t) = \int_0^t R(t' - \tau') d[e_{xx}(x, \tau)] \quad (1.4)$$

Здесь $R_1(t')$, $R(t')$ — функции объемной и сдвиговой релаксации, t' — приведенное время (для простоты считаем t' одинаковым для функций R_1 , R).

В вязкоупругих материалах под действием изменяющейся во времени нагрузки за счет диссипации энергии образуется температурное поле, свя-

¹ Ильясов М. Х., Гасанов А. Б. Нестационарные термовязкоупругие волны. Баку, 1982. — 31 с. Деп. ВИНТИ, № 199–82.

занное с полем напряжений и деформаций. Уравнение теплопроводности вязкоупругой среды с учетом функции диссипации приведено в [1, 7]:

$$c\partial\theta/\partial t = \kappa\partial^2\theta/\partial x^2 + F(x, t) \quad (1.5)$$

$$F(x, t) = \sigma \frac{\partial}{\partial t} \left(e - \frac{\sigma}{R_1(0)} \right) + S_{xx} \frac{\partial}{\partial t} \left(e_{xx} - \frac{S_{xx}}{R(0)} \right)$$

где $e_{xx} = e_{xx} + e/3$, e_{xx} — девиатор тензора деформаций, e — дилатация, $\theta = T - T_0$ — приращение температуры, T_0 — исходная температура, $T_0 = \text{const}$, $\theta = 0$ при $t = 0$.

Рассмотрим два типа краевых условий для уравнения (1.5): граница полупространства теплоизолирована: при $x = 0$:

$$\partial\theta/\partial x = 0 \quad (1.6)$$

на границе происходит конвективный теплообмен с окружающей средой: при $x = 0$:

$$\partial\theta/\partial x - h\theta = 0 \quad (1.7)$$

Точное аналитическое решение задачи (1.1)–(1.7) затруднительно, поэтому воспользуемся комбинацией приближенных методов решения, развитых в [8, 9]. В первом приближении температуру не учитываем, тогда $t' = t$. Решение задачи (1.1)–(1.4) в изображениях Лапласа по времени выражается формулой

$$\sigma_{xx}^*(x, p) = \sigma_0 f^*(p) \exp(-x\sqrt{\rho p/r^*}) \quad (1.8)$$

$$r^* = R_1^*(p) + 2R^*(p)/3$$

где p — параметр преобразования; звездочкой сверху обозначаются изображения одноименных функций. При выводе этой формулы учтено неравенство $\text{Re}\sqrt{\rho p/r^*} > 0$ при $\text{Re} p > 0$. Функцию диссипации вследствие соотношений (1.4) при $\theta = 0$ можно представить в виде

$$F(x, t) = \frac{\sigma}{R_1(0)} \int_0^t \Gamma_1(t-\tau) \frac{\partial e(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \frac{2S_{xx}}{3R(0)} \int_0^t \Gamma(t-\tau) \frac{\partial e_{xx}(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (1.9)$$

где $\Gamma_1(t)$, $\Gamma(t)$ — ядра объемной и сдвиговой релаксации.

Оригиналом (1.8) является выражение (звездочка означает свертку функций):

$$\sigma_{xx}(x, t) = \sigma_0 f(t) * D_1(x, t) \quad (1.10)$$

$$D_1(x, t) = \delta(t - x/c_1) - (x/(2c_1)) P_1'(t - x/c_1) + \dots$$

$$+ \frac{(-1)^n}{2^{2n} \cdot n!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n-k-2)!}{k!(n-k-1)!} \left(\frac{2x}{c_1}\right)^{k+1} P_n^{(k+1)}\left(t - \frac{x}{c_1}\right) + \dots$$

$$P_1(t) = L^{-1}\{c_1^2 \rho / (pr^*) - 1\}$$

$$P_n(t) = P_1(t) * P_{n-1}(t), \quad c_1^2 = [R_1(0) + 2R(0)/3] / \rho$$

Подставив (1.10) в (1.9), находим явный вид функции диссипации, которую в дальнейшем считаем известной. Тогда решениями задач (1.5), (1.6) и (1.5), (1.7) будут [10] выражения

$$\theta(x, t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^t \sqrt{\frac{c}{\kappa(t-\tau)}} [\exp(-\eta_-) + \exp(-\eta_+)] F(\xi, \tau) d\tau d\xi \quad (1.11)$$

$$\theta(x, t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^t \sqrt{\frac{c}{\kappa(t-\tau)}} \exp\left(hx + \frac{h\kappa}{c(t-\tau)}\right) [\exp(-\eta_-) + \exp(-\eta_+)] \times$$

$$\times F(\xi, \tau) d\tau d\xi, \quad \eta_\pm = c(x \pm \xi)^2 / (4\kappa(t-\tau)) \quad (1.12)$$

Теперь решим задачу (1.1)–(1.4) с учетом температуры.

Предположим материал терморелогически простым и используем температурно-временную аналогию, тогда приведенное время выразится формулой

$$t' = \int_0^t \frac{d\xi}{a_T[T(x, \xi)]}$$

Пусть коэффициент температурно-временной редукции a_T выражается формулой Вильямса – Лэндела – Ферри

$$\varphi(x, t) = a_T^{-1} = \exp \left[\frac{b_0}{T_s} \frac{\theta(x, t)}{T_s} \frac{1}{1 + \theta(x, t)/T_s} \right]$$

где b_0 – константа материала, T_s – температура стеклования. Обозначая $\theta_1(t) = \sup |\theta(x, t)|$, при $x \in [0, \infty)$ получим

$$\varphi(x, t) = \exp \left[\frac{b_0}{T_s} \left(1 - \frac{T_s}{\theta + \theta_1} \frac{1}{1 - z} \right) \right]$$

$$z = (\theta_1 - \theta) / (\theta_1 + T_s)$$

Учитывая, что $|z| < 1$, функцию $\varphi(x, t)$ разлагаем в ряд по степеням z ; в итоге имеем

$$\varphi(x, t) = \varphi_0(t) \left\{ 1 - \frac{b_0(\theta + \theta_1)}{(T_s + \theta_1)^2} \frac{\theta_1 - \theta}{\theta_1 + \theta} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left[\frac{b_0^2(\theta_1 + \theta)^2}{(T_s + \theta_1)^4} - \frac{2b_0(\theta_1 + \theta)^2}{(T_s + \theta_1)^3} \right] \left(\frac{\theta_1 - \theta}{\theta_1 + \theta} \right)^2 + \dots \right\}$$

Функция $b_0(\theta_1 + \theta)/(T_s + \theta_1)^2$ в некотором диапазоне температур ограничена [1], поэтому члены ряда являются убывающими, а величина $\lambda = \sup |(\theta_1 - \theta)/(\theta_1 + \theta)|$, $x, t \in [0, \infty)$ – малый параметр. Учитывая это

$$\varphi(x, t) = \varphi_0(t) + \lambda \varphi_1(x, t) + \lambda^2 \varphi_2(x, t) + \dots$$

$$\varphi_0(t) = \exp \left[\frac{b_0}{T_s} \left(1 - \frac{T_s}{\theta + T_s} \right) \right]$$

$$\varphi_1(x, t) = -\varphi_0(t) b_0(\theta + \theta_1) / (\theta_1 + T_s)^2$$

$$\varphi_2(x, t) = \varphi_0(t) \left[\frac{b_0}{2(\theta_1 + T_s)} - 1 \right] \frac{b_0(\theta_1 + \theta)^2}{(T_s + \theta_1)^3}, \dots$$

Отметим, что в каждом приближении параметр λ будет различным. Приведенное время выразится формулой

$$t' = \omega_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \omega_n(x, t) = \omega_0(t) + \delta_0$$

$$\omega_k(x, t) = \int_0^t \varphi_k(x, \xi) d\xi \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

Функции $R(t')$, $R_1(t')$ разложим в ряды по степеням λ :

$$R(t') = R(\omega_0 + \delta_0) = R(\omega_0(t)) + \delta_0 (dR/dt')|_{t'=\omega_0} + \delta_0^2 (d^2R/dt'^2)|_{t'=\omega_0} + \dots =$$

$$= \lambda \omega_1(x, t) (dR/dt')|_{t'=\omega_0} + R(\omega_0(t)) + \lambda^2 [\omega_2(x, t) dR/dt' +$$

$$+ (1/2) \omega_1^2(x, t) d^2R/dt'^2]|_{t'=\omega_0} = R^{(0)}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n R^{(n)}(x, t) \quad (1.13)$$

Разложение $R_1(t')$ имеет точно такой же вид с заменой R на R_1 всюду. Отметим, что если для функций объемной и сдвиговой релаксации при-

веденные времена будут разными, то для них $\omega_k(x, t)$ также будут различными.

Решение задачи (1.1)–(1.4) разыскиваем в виде ряда по степеням λ :

$$\sigma_{xx}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \sigma_{xx}^{(n)}(x, t), \quad u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u^{(n)}(x, t)$$

Подставив эти выражения в (1.13) в (1.4) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях λ , получаем систему

$$\sigma_{xx}^{(0)}(x, t) = r^{(0)} * \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} - \alpha \theta^{(0)} \right) \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(n)}(x, t) &= r^{(n)} * \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} - \alpha \theta^{(0)} \right) - \sum_{k=1}^n r^{(n-k)} * \frac{\partial^2 u^{(k)}}{\partial x \partial t} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \\ r^{(i)} &= R_1^{(i)} + 2R^{(i)}/3 \quad (i=0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Аналогичная процедура с уравнениями движения приводит к последовательности интегродифференциальных уравнений:

$$\rho \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial t^2} = r^{(0)} * \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial \theta^{(0)}}{\partial x} \right) \quad (1.15)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ r^{(n)} * \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} - \alpha \theta^{(0)} \right) + \sum_{k=1}^n r^{(n-k)} * \frac{\partial^2 u^{(k)}}{\partial x \partial t} \right\}$$

Уравнения (1.4) и (1.15) решаются при следующих начальных и граничных условиях:

$$u^{(n)} = \partial u^{(n)} / \partial t = 0, \quad t = 0 \quad (1.16)$$

$$\sigma_{xx}^{(0)}(0, t) = \sigma_0 f(t), \quad \sigma_{xx}^{(n)}(0, t) = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$\sigma_{xx}^{(n)}(x, t) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

Из этих соотношений следует, что для определения нулевого приближения $u^{(0)}(x, t)$ решается исходная задача с измененными и не зависящими от координаты x функциями релаксации $R_1^{(0)}(t)$, $R^{(0)}(t)$. Последующие приближения определяются из того же уравнения с некоторыми «фиктивными силами» при нулевых начальных и граничных условиях, причем «фиктивные силы» выражаются через решения предыдущих приближений.

Применим к (1.15) преобразование Лапласа по времени, используя начальные условия. В результате получим

$$d^2 u^{(0)*}(x, p) / dx^2 - \mu^*(p) u^{(0)*}(x, p) = \alpha d \theta^* / dx \quad (1.17)$$

$$d^2 u^{(n)*}(x, p) / dx^2 - \mu^*(p) u^{(n)*}(x, p) = \Psi_n^*(x, p) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$\mu^*(p) = \rho p / r^{(0)*}(p)$$

$$\Psi_n^*(x, p) = - \frac{d}{dx} \left[\frac{r^{(n)*} \mu^{*2} \sigma_{xx}^{(0)*}}{\rho p^2} + \left(\frac{\mu^*}{\rho p} \right) \sum_{m=1}^{n-1} \frac{r^{(n-m)*} du^{(m)*}}{dx} \right]$$

Находим решение краевой задачи (1.17), (1.16):

$$\begin{aligned} u^{(0)*} &= \sqrt{\mu^*} (\alpha \kappa \psi^* / (c\rho - \kappa \mu^*) - \sigma_0 f^* / (\rho p^2)) \exp(-x \sqrt{\mu^*}) - \\ &\quad - \sqrt{c\rho \kappa} \alpha \psi^* (c\rho - \kappa \mu^*)^{-1} \exp(-x \sqrt{c\rho / \kappa}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(n)*} = & B_n^* \exp(-x\sqrt{\mu^*}) + \left[\exp(-x\sqrt{\mu^*}) \cdot (\mu^*)^{-1/2} \times \right. \\ & \left. \times \int \Psi_n^*(x, p) \exp(x\sqrt{\mu^*}) dx - \exp(x\sqrt{\mu^*}) \int \Psi_n^*(x, p) \exp(-x\sqrt{\mu^*}) dx \right] \end{aligned}$$

Коэффициенты $B_n^*(p)$ определяются из граничных условий $\sigma_{xx}^{(n)*}(0, p) = 0$ ($n=1, 2, 3, \dots$) и имеют вид

$$B_n^* = \frac{r^{(n)*}(0, p) \sigma_0 f^* \mu^*}{\rho p^2} + (F_n^*(0, p) - Q_n^*(0, p) (\mu^*)^{-1/2} +$$

$$+ \rho^{-1} \sum_{h=1}^{n-1} r^{(n-h)*}(0, p) \left(\frac{du^{(h)*}}{dx} \right)_{x=0}, \quad \Psi^* = \frac{1}{2\sqrt{c\kappa}} \int_0^\infty \text{sh } \xi \sqrt{\frac{cp}{\kappa}} F^*(\xi, p) d\xi$$

$$F_n^*(0, p) = \left[\int \Psi_n^*(x, p) \exp(x\sqrt{\mu^*}) dx \right]_{x=0},$$

$$Q_n^*(0, p) = \left[\int \Psi_n^*(x, p) \exp(-x\sqrt{\mu^*}) dx \right]_{x=0}$$

Переходя в (1.18) от изображений к оригиналам, получаем

$$\begin{aligned} u^{(0)}(x, t) = & \alpha \kappa \eta_1(t) * (D_2(x, t) - \delta(t)) * \theta^{(0)}(x, t) - \\ & - \sigma_0 \rho^{-1} f(t) * t * \partial(D_1(x, t)) / \partial x \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$u^{(n)}(x, t) = \left\{ \eta_0(t) * \left[r^{(n)}(0, t) * \sigma_0 \rho^{-1} t * f(t) - \right. \right.$$

$$\left. - \rho^{-1} \sum_{h=1}^{n-1} r^{(n-h)}(0, t) * (\partial u^{(h)} / \partial x)_{x=0} \right] - F_n(0, t) \left. \right\} *$$

$$* \int_0^x D_1(\xi, t) d\xi + (F_n^{(0)}(x, t) - Q_n^{(0)}(x, t)) / 2$$

$$\eta_0(t) = \Pi_1^{(0)}(t) + 2\Pi^{(0)}(t) / 3, \quad \eta_1(t) = L^{-1} \{ \rho / (cr^{(0)*} - \rho \kappa) \}$$

$$D_2(x, t) = L^{-1} \{ (1/\sqrt{\mu^*}) \exp(x\sqrt{\mu^*} - \sqrt{cp/\kappa}) \}$$

$$Q_n^{(0)}(x, t) = L^{-1} \{ (1/\sqrt{\mu^*}) \exp(-x\sqrt{\mu^*}) F_n^*(x, p) \}$$

$$F_n^{(0)}(x, t) = L^{-1} \{ (1/\sqrt{\mu^*}) \exp(x\sqrt{\mu^*}) Q_n^*(x, p) \}$$

где $\Pi_1^{(0)}(t)$ и $\Pi^{(0)}(t)$ — резольвенты функций $R_1^{(0)}$, $R^{(0)}$.

Из (1.14) с учетом (1.11), (1.12) и (1.19) находим напряжения

$$\sigma_{xx}^{(0)}(x, t) = \sigma_0 f(t) * D_1(x, t) - \rho \alpha \kappa c^{-1} \eta_1(t) * (d\eta_0(t)/dt - D_2(x, t)) * \theta^{(0)}(x, t)$$

$$\sigma_{xx}^{(n)}(x, t) = r^{(n)}(x, t) * \sigma_{xx}^{(0)}(x, t) * r^{(0)}(0) \eta_0(t) + \sum_{h=1}^n r^{(n-h)}(x, t) * d^2 u^{(h)} / dx dt$$

По перемещениям и напряжениям второго приближения определяется функция диссипации $F^{(2)}(x, t)$, а по формулам (1.11), (1.12) — распределение температуры во втором приближении, которые используются для определения перемещений и напряжений третьего приближения. Вычисление последующих приближений проводится аналогично.

2. Рассмотрим подробнее два случая: 1. Функции объемной и сдвиговой релаксации пропорциональны: $R_1(t) = aR(t)$, $a = \text{const}$, тогда выражение (1.8) приводится к виду

$$\sigma_{xx}^*(x, p) = \sigma_0 f^*(p) \exp\left(-\frac{xp}{c_1} \sqrt{\frac{R(0)}{pR^*(p)}}\right)$$

Оригиналом σ_{xx}^* является выражение

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x, t) &= \sigma_0 f(t) * \Phi(x, t) \\ \Phi(x, t) &= \delta(t-x/c_1) - {}^{1/2} x c_1^{-1} K_1'(t-x/c_1) + \dots \\ &\dots + \frac{(-1)^n}{2^{2n} \cdot n!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n-k-2)!}{k!(n-k+1)!} \left(\frac{2x}{c_1}\right)^{k+1} K_n^{(k+1)}\left(t - \frac{x}{c_1}\right) + \dots \end{aligned}$$

где $K_1=K(t)$ — ядро ползучести, K_n ($n \geq 2$) — итерированные ядра

$$K_2(t) = K_1(t) * K_1(t), \dots, K_n(t) = K_1(t) * K_{n-1}(t)$$

$$K_n^{(m)}(t) = d^m K_n(t) / dt^m$$

Функция диссипации любого приближения в этом случае примет вид

$$F(x, t) = \left[(a+1) \int_0^t R(t'-\tau') \frac{\partial e(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right] \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} R(t'-\tau') \frac{\partial e(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau$$

Решение задачи может быть получено из формул, приведенных выше, если в них сделать подстановки: $D_1(x, t) \rightarrow \Phi(x, t)$, $\eta_1(t) \rightarrow \Omega_1(t)$, а также учесть равенство $r^{(n)} = (a+2/3)R^{(n)}$ и обозначения

$$\Omega_1(t) = L^{-1} \{ c c_1^2 [(c c_1^2 - \kappa) R(0)]^{-1} \}$$

$$L(x, t) = L^{-1} \{ \exp(-x p c_1^{-1} \sqrt{R(0) \rho^{-1} / R^{*(0)}(p)} + x \sqrt{c p / \kappa}) \}$$

2. У многих полимерных материалов вязкость проявляется лишь по отношению к сдвиговым свойствам, изменение же объема происходит упруго. В этом случае справедливо соотношение $R(t) = 3B\omega(t)$, в котором B — модуль объемного сжатия, а $\omega(t)$ — функция А. А. Ильюшина [1], поэтому для функции σ_{xx}^* нулевого приближения получим

$$\sigma_{xx}^*(x, p) = \sigma_0 f^*(p) \exp\left(-\frac{x p}{c_1} \sqrt{\frac{1+2\omega_0}{1+2\omega^*}}\right), \quad \omega_0 = \omega(0) \quad (2.1)$$

Модуль всестороннего сжатия B можно с большой точностью считать не зависящим от температуры, поэтому изложенная методика решения задачи остается справедливой, изменится лишь выражение функции диссипации.

Оригиналом выражения $[1+2\omega^*(p)]^{-1}$ является функция А. А. Ильюшина $g_2(t)$, поэтому из (2.1) согласно [14] находим

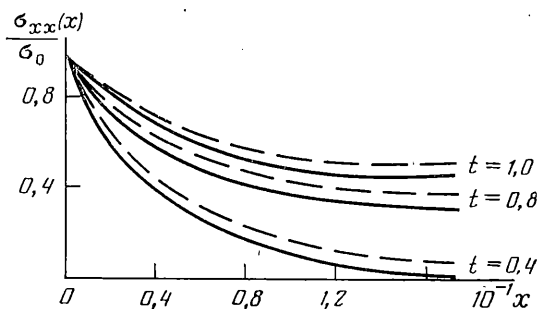
$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x, t) &= \sigma_0 f(t) C_0(x, t) \\ C_0(x, t) &= \delta(t-x/c_1) - x/(2c_1) \psi_1'(t-x/c_1) + \dots \\ &\dots + \frac{(-1)^n}{2^{2n} \cdot n!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n-k-2)!}{k!(n-k-1)!} \left(\frac{2x}{c_1}\right)^{k+1} \Psi_n^{(k+1)}\left(t - \frac{x}{c_1}\right) + \dots \\ \psi_1(t) &= g_2(t) * \omega(t), \dots, \psi_n(t) = \psi_1(t) * \psi_{n-1}(t) \end{aligned}$$

В этом случае функция диссипации имеет вид

$$F_1 = 9B^2 \int_0^t \omega(t'-\tau') de_{xx}(x, \tau) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} \omega(t'-\tau') \frac{\partial e_{xx}}{\partial \tau} d\tau$$

Температура полупространства выразится формулами (1.11) и (1.12), в которых $F(x, t)$ следует заменить на $F_1(x, t)$.

Для примера рассмотрим задачу о вязкоупругом полупространстве, к поверхности которого приложена ступенчатая нагрузка, т. е. $f(t) = H(t)$ ($H(t)$ — единичная функция Хевисайда). Материал полупространства — полиметилметакрилат: данные о его свойствах приведены в [3]; дополнительно принято $\rho = 1,18$ кг/м³, $\kappa = 0,17 \cdot 10^{-2}$ Вт/м·град, $c = 0,43$ Дж/кг·град.



На фигуре показано изменение напряжения σ_{xx} в зависимости от глубины при некоторых фиксированных значениях времени; сплошная линия — нулевое приближение, штриховая — первое. Хорошо видно повышение напряжения, обусловленное учетом влияния температуры на свойства материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
2. *Победря Б. Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1981. 343 с.
3. *Petrof R. C., Gratch S.* Wave propagation in a viscoelastic materials with temperature-dependent properties and thermomechanical coupling.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1964, v. 31, No. 3, p. 423–429.— Рус. перев.: Тр. Америк. о-ва инж.-мех. Сер. Е. Прикл. механика, 1964, т. 31, № 3, с. 62–70.
4. *Алгази С. Д.* Распространение одномерных возмущений в линейном вязкоупругом полупространстве при тепловом ударе.— Вест. МГУ. Математика, механика, 1973, № 1, с. 69–72.
5. *Филиппов И. Г., Ормонов Т. О.* Плоская термовязкоупругая волна в полупространстве при ненулевых начальных условиях.— Математические исследования: Сб. статей. Кишинев: Штиинца, 1982, вып. 70, с. 132–138.
6. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Обобщенная термомеханика. Киев: Наук. думка, 1976. 310 с.
7. *Победря Б. Е.* О связанных задачах механики сплошной среды.— Упругость и неупругость: Сб. статей. М.: Изд-во МГУ, 1971, вып. 2, с. 224–253.
8. *Победря Б. Е.* О решении задач термовязкоупругости с неоднородным полем температур.— Упругость и неупругость: Сб. статей. М.: Изд-во МГУ, 1974, вып. 1, с. 172–201.
9. *Лыков А. В.* Методы решения нелинейных уравнений нестационарной теплопроводности.— Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1970, № 5, с. 109–150.
10. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
11. *Ильясов М. Х.* О методах решения пространственных линейных нестационарных задач о распространении возмущений в изотропных однородных и анизотропных неоднородных вязкоупругих средах.— Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук, 1983, № 6, с. 130–135.

Баку — Москва

Поступила в редакцию
22.X.1984