

УДК 539.374

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДА ФОТОВЯЗКОПЛАСТИЧНОСТИ

ШАРАФУТДИНОВ Г. З.

Фотовязкопластичность — это поляризационно-оптический метод исследования напряженно-деформированного состояния в вязкопластических телах. Главные трудности, возникающие при применении метода фотовязкопластичности, сосредоточены вокруг основных соотношений метода — определяющих соотношений, связывающих напряжения и деформации, и соотношений связи между параметрами двойного лучепреломления и механическими величинами. Сложность упомянутых соотношений объясняется необходимостью совместного учета влияния времени и параметров процессов нагружения или деформирования на напряженно-деформированное состояние в теле.

Определяющие соотношения для целлулоида, выбранного в качестве модельного материала, приняты кусочно-линейными [1]. Соотношения связи между параметрами двойного лучепреломления и механическими величинами предложены в форме обобщенного линейного закона, учитывающего зависимость величины двойного лучепреломления как от напряжений, так и от деформаций. Значения деформации и величины двойного лучепреломления, определенные при помощи основных соотношений, сравниваются с результатами эксперимента, в котором активное нагружение и разгрузка осуществляется дважды. Установлено, что наилучшее совпадение обеспечивается в том случае, если применение линейных определяющих соотношений на стадии разгрузки связывать с устойчивым по Друкеру состоянием материала [2,3].

Предлагаемые определяющие соотношения не связаны с понятием предела текучести и соответственно с трудностями при его определении для реономных материалов. Кроме того, эти соотношения удовлетворительно описывают процесс разгрузки в таких материалах и позволяют учесть возможное нарушение аналитичности процесса деформирования.

Рассмотрен также один из важнейших вопросов метода — моделирование процессов деформирования вязкопластических тел при использовании кусочно-линейных определяющих соотношений.

1. Целлулоид является одним из модельных материалов, широко применяемым при изучении процессов пластического деформирования поляризационно-оптическим методом. Способность целлулоида пластически деформироваться, так же как и зависимость его механических свойств от времени, делают этот материал пригодным для использования в методе фотовязкопластичности. Вместе с тем особенности поведения целлулоида обуславливают определенные трудности при установлении основных соотношений метода для этого модельного материала.

Исходя из кусочно-линейной формы определяющих соотношений [1] запишем их для данного конкретного материала в изотермических условиях в виде

$$e_{ij}(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) ds_{ij} + \int_{t_1}^t \Pi_1(t-\tau) d(s_{ij} - s_{ij}^0) \quad (1.1)$$

где e_{ij} , s_{ij} — компоненты девиаторов деформаций и напряжений, t — время, t_1 — момент времени, при котором материал становится физически нелинейным, $s_{ij}^0 = s_{ij}(t_1)$. Момент времени t_1 определяется как решение уравнения

$$s_{ij}(t) s_{ij}(t) = s^0 \quad (1.2)$$

где $s^0 = s_{ij}^0 s_{ij}^0$ — в общем случае функция или функционал процесса.

При определении материальных функций $\Pi(t)$, $\Pi_1(t)$ и значения параметра s^0 выделяют, в первую очередь, область физической линейности материала. В этом случае в определяющем соотношении (1.1) остается

только первое слагаемое

$$e_{ij}(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) ds_{ij}(\tau) \quad (1.3)$$

Определение линейной функции ползучести $\Pi(t)$ можно осуществить, например, при помощи экспериментальных данных, полученных при одноосном растяжении. При этом необходимо измерять экспериментальные значения деформаций: ε_{11} — в направлении линии действия приложенной силы и ε_{22} — в перпендикулярном к нему направлении.

Из соотношения (1.3) получаем

$$\varepsilon_{11}(t) - \varepsilon_{22}(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d[\sigma_{11}(\tau) - \sigma_{22}(\tau)] \quad (1.4)$$

где ε_{ij} , σ_{ij} — компоненты тензоров деформаций и напряжений. Если задать $\sigma_{11}(t) = \sigma_0 h(t)$, где $h(t)$ — функция Хевисайда, то из (1.4) при одноосном напряженном состоянии имеем

$$\varepsilon_{11}(t) - \varepsilon_{22}(t) = \Pi(t) \sigma_0, \quad t > 0 \quad (1.5)$$

откуда вычисляются значения функции $\Pi(t)$ для любого фиксированного t .

Для определения значений функции $\Pi_1(t)$ и параметра s^0 необходимо провести не менее двух экспериментов при физически нелинейном поведении материала. Пусть это будут два эксперимента на одноосное растяжение при следующих значениях продольной компоненты тензора напряжений: σ_{01} и σ_{02} , $\sigma_{01} \neq \sigma_{02}$. В этих экспериментах измеряется продольная и поперечная компоненты деформации. Отметим, что при одноосном напряженном состоянии $s_{11} = {}^2/3 \sigma_{11}$, $s_{22} = s_{33} = -1/3 \sigma_{11}$, $\sigma_{22} = 0$. Таким образом, из (1.1) имеем

$$\begin{aligned} e_{11} - e_{22} &= \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\sigma_{11}(\tau) + \int_0^t \Pi_1(t-\tau) d[(s_{11} - s_{22}) - (s_{11}^0 - s_{22}^0)] = \\ &= \int_0^t \Pi(t-\tau) d\sigma_{11}(\tau) + \int_0^t \Pi_1(t-\tau) d(\sigma_{11} - \sigma_{11}^0) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Задавая в экспериментах на ползучесть $\sigma_{11}(t)$ при помощи функции Хевисайда, получим из (1.6)

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})_1 &= \Pi(t) \sigma_{01} + \Pi_1(t) (\sigma_{01} - \sigma_{11}^0) \\ (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})_2 &= \Pi(t) \sigma_{02} + \Pi_1(t) (\sigma_{02} - \sigma_{11}^0) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Разрешив эти уравнения относительно вторых слагаемых и поделив одно уравнение на другое, исключаем $\Pi_1(t)$. Из полученного таким образом уравнения имеем

$$\sigma_{11}^0 = (\sigma_{01} - A \sigma_{02}) / (1 - A) \quad (1.8)$$

$$A = [(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})_1 - \Pi(t) \sigma_{01}] / [(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})_2 - \Pi(t) \sigma_{02}]$$

Определение функции $\Pi_1(t)$ производится при помощи любого из уравнений (1.7). Вычисление параметра s^0 в данном случае осуществляется при помощи соотношения

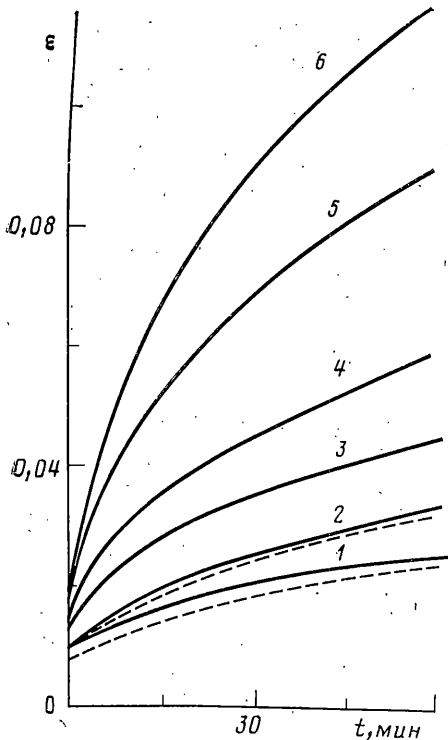
$$s^0 = {}^2/3 (\sigma_{11}^0)^2 \quad (1.9)$$

Следует отметить, что процедура определения материальных функций при выборе вместо s^0 какого-либо другого граничного параметра может измениться.

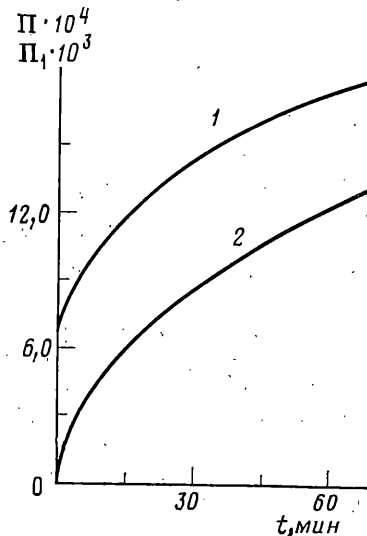
Используем полученные в экспериментах при одноосном растяжении образцов из целлулоида данные для иллюстрации применения приведенных выше соотношений. Вначале была проведена серия экспериментов на ползучесть при следующих значениях напряжения σ_0 (МПа): 20,0; 23,0; 24,5; 26,0; 29,0; 31,5. Кривые ползучести

«(графики продольной деформации) 1–6, соответствующие упомянутым номиналам напряжений, в зависимости от времени t (мин) приведены на фиг. 1. Графики удвоенной поперечной деформации приведены лишь для двух номиналов напряжений: 20,0 и 23,0 МПа (штриховые линии). Во всех остальных случаях графики удвоенной поперечной деформации практически не отличаются от соответствующих кривых ползучести и здесь не приводятся.

Линейная функция ползучести определена при помощи экспериментальных данных в линейной области поведения материала, в которую входит и значение $\sigma_0 = 20$ МПа. Вычисле-



Фиг. 1



Фиг. 2

ние функции $\Pi_1(t)$ и значения параметра σ_{11}^0 произведено при помощи остальных экспериментальных данных.

Графики функций $\Pi(t) \cdot 10^4$ и $\Pi_1(t) \cdot 10^3$ (МПа⁻¹) в зависимости от времени t (мин) приведены на фиг. 2 (кривые 1, 2). Значения параметров σ_{11}^0 и s^0 соответственно равны 22,4 МПа и 335 МПа².

Особый интерес имеет применение выбранного определяющего соотношения для описания поведения материала не только при активном нагружении, но и при разгрузке. В качестве эксперимента, обеспечивающего оба режима нагружения, предложен эксперимент, в котором образец при $0 \leq t \leq 10$ мин деформируется с постоянной скоростью, так что к концу этого промежутка деформация равна 0,032–0,0325. Затем при значениях времени от 10 до 20 мин образец разгружается на 15 МПа от достигнутого к $t=10$ мин значения напряжений. При повторном активном нагружении в промежутке $20 \leq t \leq 30$ образец деформируется с постоянной скоростью (такой же, как и на первом участке) и за 10 мин деформация увеличивается на 0,032–0,0325. Далее, в промежутке $30 \leq t \leq 48$ мин, образец разгружается с постоянной скоростью 1,5 МПа/мин. Отметим, что как в экспериментах на ползучесть, так и в данном эксперименте применение автоматизированной системы управления позволяет осуществлять закон нагружения в истинных напряжениях путем учета изменения площади испытуемого образца в масштабе реального времени [4].

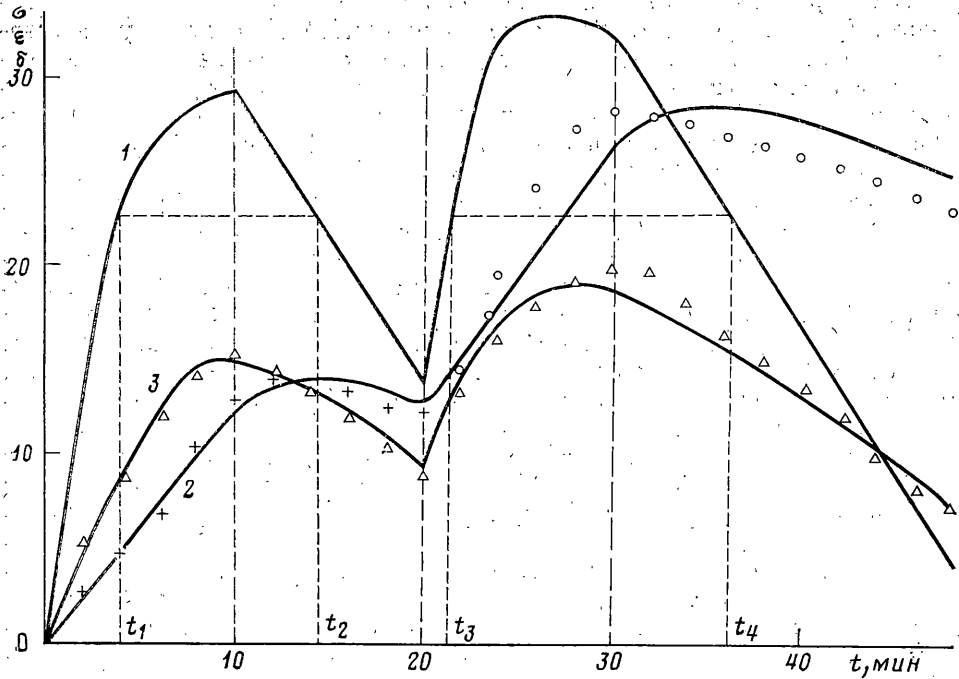
Графики напряжения σ_{11} (МПа) и деформации $\epsilon_{11} \cdot 400$ в зависимости от времени t (мин) отмечены цифрами 1, 2 соответственно на фиг. 3.

При вычислении значений деформаций при помощи соотношения (1.1) в первом и втором активном нагружении использовано отмеченное выше значение $\sigma_{11}^0 = 22,4$ МПа. Положение этой границы на фиг. 3 отмечено горизонтальной штриховой линией.

Проанализируем особенности применения определяющего соотношения (1.1) на каждом из четырех участков.

На первом участке, который характеризуется активным нагружением, в соотношении (1.1) сначала используется только первое слагаемое, а при $\sigma_{11} > \sigma_{11}^0$ — оба его члена в правой части. Отклонения расчетных значений деформаций (крестики) от экспериментальной зависимости $\epsilon_{11} \sim t$ (сплошная линия) невелики (не более 5%).

На втором участке первое слагаемое соотношения (2.1) используется, как, впрочем, и везде, без каких-либо оговорок. Значение деформации ϵ_{11} при $t=20$ мин, вычисленное при помощи этого слагаемого, равно 0,015, в то время как экспериментальное значение деформации в этот момент равно 0,032–0,033. Если при разгрузке до абсциссы второго пересечения t_2 штриховой линией графика экспериментальной



Фиг. 3

зависимости $\sigma_{ij} \sim t$ во втором интервале использовать переменный верхний предел, а при $t > t_2$ зафиксировать его и рассматривать второе слагаемое в (2.1) в любой фиксированный момент времени как некоторое число, определяемое интегралом с пределами интегрирования от t_1 до t_2 , то дополнительный вклад в расчетное значение деформации при $t=20$ мин составит $\approx 0,013$. Таким образом, расчетное значение деформации при $t=20$ мин равно 0,028. Если же не фиксировать t_2 , а во втором интервале использовать переменный верхний предел, то это приведет к существенному уменьшению расчетных значений деформаций. Наилучшее совпадение экспериментальных и расчетных значений деформаций достигается, если зафиксировать величину второго интервала на его максимальном уровне. Эта величина равна 0,016, так что при $t=20$ мин расчетное значение деформации равно 0,031. Следует отметить, что, несмотря на то, что разгрузка начата при $t=10$ мин, значение второго интеграла, как и значение полной деформации, продолжает увеличиваться вплоть до $t=12$ мин, после чего значение полной деформации начинает уменьшаться. В соответствии с определением [2, 3], следующим из постулата Друккера, исследуемый материал при $10 \leq t \leq 12$ мин является неустойчивым неупругим материалом. Этот вывод следует как из экспериментальных, так и из расчетных, с использованием соотношения (1.1), данных.

Таким образом, наилучшее совпадение экспериментальных и расчетных зависимостей $\varepsilon_{ij} \sim t$ на втором участке обеспечивается в том случае, если до момента перехода t_{u1} от неустойчивого состояния к устойчивому использовать оба слагаемых соотношения (1.1), а при $t > t_{u1}$ — описывать поведение материала при помощи линейного функционала, зафиксировав значение второго интеграла в (1.1) на том уровне, который достигается им при $t=t_{u1}$. Определяющее соотношение при $0 \leq t \leq t_{u1}$ имеет вид

$$e_{ij}(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) ds_{ij}(\tau) + \int_{t_1}^t \Pi_1(t-\tau) d(s_{ij} - s_{ij}^0) \quad (1.10)$$

а при $t \geq t_{u1}$ во втором слагаемом необходимо положить $t=t_{u1}$.

В начале третьего участка, при $t \leq t_3$, используется соотношение (1.10) с фиксированным значением второго члена, а при $t > t_3$ — соотношение

$$e_{ij}(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) ds_{ij}(\tau) + \int_{t_1}^{t_{u1}} \Pi_1(t_{u1}-\tau) d(s_{ij} - s_{ij}^0) + \int_{t_3}^t \Pi_1(t-\tau) d(s_{ij} - s_{ij}^0) \quad (1.11)$$

Несмотря на то что во второй половине этого участка наблюдается разгрузка (за счет релаксации), соотношение (1.11) достаточно удовлетворительно описывает поведение материала: отклонения расчетных значений деформаций (кружки) от экспериментальных на этом участке не превосходят 10—15%. Весьма возможно, что определенное влияние на величину ошибок оказывает и процедура вычислений, в частности из-за наличия высоких скоростей изменения напряжений. После начала разгрузки, происходящей вследствие релаксации и до конца третьего участка, т. е. до $t=30$ мин, величина первого интеграла в (1.11) стабилизируется на приблизительно постоянном уровне, а величина третьего интеграла продолжает возрастать и достигает к этому моменту значения приблизительно 0,027, так что суммарное расчетное значение деформации ϵ_{11} при $t=30$ мин равно 0,07 (при экспериментальном значении ϵ_{11} , равном 0,065).

Несмотря на начавшуюся при $t=30$ мин принудительную разгрузку, значение третьего интеграла в соотношении (1.11) продолжает увеличиваться и достигает значения 0,0295 при $t=32$ мин, после чего его величина начинает уменьшаться. Как и выше, это есть граница, разделяющая неустойчивое и устойчивое (по Друккеру) состояния материала. Если фиксировать значение этого интеграла на максимальном уровне и использовать его для вычисления деформаций при $t>32$, то могут быть получены значения деформаций, отмеченные кружками на фиг. 3. Любые другие варианты применения третьего интеграла в (1.11) приводят к существенному снижению расчетных значений деформаций на четвертом участке. Таким образом, определяющее соотношение, начиная от $t=t_{u2}=32$ мин, имеет вид

$$e_{ij}(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) ds_{ij}(\tau) + \int_{t_1}^{t_{u1}} \Pi_1(t_{u1}-\tau) d(s_{ij}-s_{ij}^0) + \int_{t_3}^{t_{u2}} \Pi_1(t_{u2}-\tau) d(s_{ij}-s_{ij}^0) \quad (1.12)$$

Момент времени t_3 определяется как решение уравнения (1.2) при втором активном нагружении.

Отметим, что при последующих активных нагружениях в нелинейной области и разгрузках в соотношении (1.12) должны появиться дополнительные слагаемые; процедура их учета аналогична изложенной.

2. В число основных соотношений поляризационно-оптических методов входят также и соотношения связи между напряжениями, деформациями и параметрами двойного лучепреломления. Необходимость их установления диктуется практическими потребностями: экспериментальным решением задач, установлением условий подобия процессов деформирования модели и прототипа и некоторыми другими.

Основной вопрос, возникающий при формулировке соотношений связи между параметрами двойного лучепреломления и механическими величинами, что является причиной двойного лучепреломления, актуален и в настоящее время. По-видимому, причиной возникновения двойного лучепреломления служат как напряжения, так и деформации. Одна часть величины двойного лучепреломления происходит за счет изменения сил взаимодействия между атомами, ионами или какими-либо другими колебательными системами (молекулами, звеньями длинноцепных молекул и т. п.). Другая часть величины двойного лучепреломления связана с ориентационной поляризацией, имеющей место, например, в поляроидных пленках.

Нет никаких оснований пренебрегать первой или второй составляющей величины двойного лучепреломления априори, поэтому наиболее общая форма основного закона поляризационно-оптического метода имеет вид

$$\kappa_{ij}(t) = P s_{ij} + Q e_{ij} \quad (2.1)$$

где κ_{ij} , s_{ij} , e_{ij} — компоненты девятериков диэлектрической проницаемости, напряжений и деформаций, P , Q — некоторые операторы.

При наличии аналитической зависимости между напряжениями и деформациями не составляет труда выразить κ_{ij} через $s_{ij}(e_{ij})$. В этом случае

выбор первого или второго типа соотношения определяется лишь удобством применения основных соотношений поляризационно-оптического метода.

Если операторы P и Q линейные, то соотношение (2.1) является обобщением известного закона Файлона — Джессопа, в котором P и Q — константы. Соотношение (2.1) рационально использовать в качестве основного соотношения метода фотовязкопластичности, не приводя его к зависимости κ_{ij} только от s_{ij} или e_{ij} , что обуславливается достаточно сложной зависимостью между s_{ij} и e_{ij} для целлулоида в нелинейной области.

Таким образом, общие линейные соотношения метода фотовязкопластичности примем в виде (2.1). При этом будем считать оптически чувствительный материал стабильным

$$\kappa_{ij}(t) = \int_0^t \Phi_{\sigma}(t-\tau) ds_{ij}(\tau) + \int_0^t \Phi_{\varepsilon}(t-\tau) de_{ij}(\tau) \quad (2.2)$$

Из (2.2) получаем

$$\kappa_{11}(t) - \kappa_{22}(t) = \int_0^t \Phi_{\sigma}(t-\tau) d(\sigma_{11} - \sigma_{22}) + \int_0^t \Phi_{\varepsilon}(t-\tau) d(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}), \quad (2.3)$$

Соотношение (2.3) может быть приведено к виду [5]:

$$\begin{aligned} \frac{2n_0\lambda}{h} m \cos 2\varphi = \int_0^t \Phi_{\sigma}(t-\tau) d[(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha] + \\ + \int_0^t \Phi_{\varepsilon}(t-\tau) d[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cos 2\beta] = I_1 + I_2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

где m — порядок полос изохром, φ — параметр изоклины, $\sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ — главные значения тензоров напряжений и деформаций, α, β — углы, характеризующие главные направления этих тензоров, n_0 — показатель преломления материала, h — толщина слоя оптически чувствительного материала, λ — длина волны света.

Аналогично получено и соотношение для касательных компонент

$$\begin{aligned} \frac{2n_0\lambda}{h} m \cos 2\varphi = \int_0^t \Phi_{\sigma}(t-\tau) d[(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha] + \\ + \int_0^t \Phi_{\varepsilon}(t-\tau) d[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin 2\beta] = I_3 + I_4 \end{aligned} \quad (2.5)$$

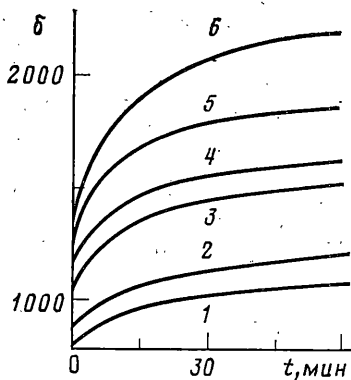
Исключая порядок полос изохром m из соотношений (2.4), (2.5), получаем выражение для параметра изоклины

$$\operatorname{tg} 2\varphi = (I_3 + I_4) / (I_1 + I_2) \quad (2.6)$$

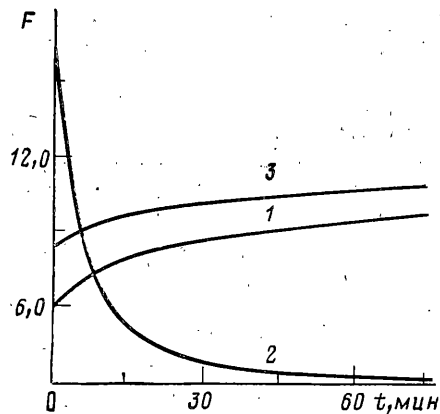
Определение функций $\Phi_{\sigma}(t)$ и $\Phi_{\varepsilon}(t)$ может быть произведено при помощи экспериментальных данных, полученных в опытах на ползучесть при одноосном напряженном состоянии при значениях напряжений, обеспечивающих физически нелинейное поведение оптически чувствительного материала. В этом случае $(\sigma_1 - \sigma_2) = (\sigma_1 - \sigma_2)_0 h(t)$ ($h(t)$ — функция Хевисайда), $\alpha = 0, \beta = 0$, параметр изоклины φ , как это следует из (2.6), также равен нулю. В этом случае из (2.4) имеем

$$\delta_i = F_{\sigma}(t) (\sigma_1 - \sigma_2)_0 + \int_0^t F_{\varepsilon}(t-\tau) d(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)_i \quad (i=1, 2) \quad (2.7)$$

где $\delta = \lambda m$ — относительная разность хода; индексами 1 и 2 при δ и вне



Фиг. 4



Фиг. 5

скобок отмечены величины, относящиеся к двум экспериментам при различных значениях $(\sigma_1 - \sigma_2)$, $F = \frac{1}{2} h n^{-1} \Phi$.

Исключая F_σ из соотношений (2.7), получаем

$$\int_0^t F_\sigma(t-\tau) d\left(\Delta\varepsilon_1 - \frac{\Delta\sigma_1}{\Delta\sigma_2} \Delta\varepsilon_2\right) = \delta_1 - \frac{\Delta\sigma_1}{\Delta\sigma_2} \delta_2 \quad (2.8)$$

где $\Delta\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$. Решая это уравнение, определяем функцию $F_\sigma(t)$, после чего из (2.7) вычисляем функцию $F_\varepsilon(t)$.

Для определения этих функций воспользуемся экспериментальными данными, полученными в упомянутых опытах, в которых помимо продольных и поперечных деформаций измерялись также и относительные разности хода δ . Измерения этой величины производились при помощи компенсатора Бабине, в который для увеличения диапазона измеряемых относительных разностей хода вводился дополнительный элемент в виде предварительно растянутого и «замороженного» образца с обратной измеряемой относительной разностью хода.

Экспериментальные зависимости $\delta(t)$ (в Нм) от времени t (мин) при значениях $\sigma_0 = 20,0; 23,0; 24,5; 26,0; 29,0; 31,5$ МПа приведены на фиг. 4 (кривые 1–6 соответственно). При помощи этих экспериментальных данных были вычислены $F_\sigma(t)$ и $F_\varepsilon(t)$. График функции $F_\sigma(t) \cdot 0,2$ (в Нм/МПа) представлен на фиг. 5 кривой 1, а $F_\varepsilon(t) \cdot 10$ (в Нм) — кривой 2. По оси абсцисс отложено время t (мин).

Кривой 3 на фиг. 5 соответствует функция $F(t) \cdot 0,2$ (в Нм/МПа) для линейной области поведения материала, когда основное соотношение поляризационно-оптического метода может быть представлено в виде

$$\kappa_{ij}(t) = \int_0^t F(t-\tau) ds_{ij}(\tau) \quad (2.9)$$

Однако такая форма основного соотношения имеет ограниченное применение. В частности, при одноосном растяжении образцов из целлюлоида при $T = 55^\circ \text{C}$ соотношение (2.9) справедливо лишь при $\sigma_0 \leq 22,4$ МПа, поэтому в дальнейшем использоваться не будет. Основная цель приведения здесь соотношения (2.9) и графика функции $F(t)$ заключается в том, чтобы показать, что распространение этого соотношения на нелинейную область поведения сводится не только к добавлению дополнительных членов.

Применим теперь основное соотношение (2.2) для расчета величины относительной разности хода δ в образце, который в течение первых 10 мин деформировался с постоянной скоростью, затем 10 мин разгружался и т. д. (см. фиг. 3). График экспериментальной зависимости $\delta \cdot 10^2$ (в Нм) представлен кривой 3. Рассчитанные при помощи основного соотношения метода фотовязкопластичности с использованием экспери-

ментальных зависимостей $\sigma \sim t$, $\varepsilon \sim t$ значения относительной разности хода отмечены треугольниками на фиг. 3. Как правило, экспериментальные и расчетные значения относительной разности хода различаются не более чем на 3–5%. Наибольшее расхождение этих зависимостей, достигающее 10–12%, наблюдается в интервале от 30 до 34 мин. Причины такого расхождения неясны: среди возможных можно назвать причины, связанные с численным счетом интегралов типа свертки, тем более, что указанному интервалу предшествует участок с относительно высокой скоростью изменения напряжений; шаг Δt при вычислениях выбирался равным 0,5 мин.

3. Выведем условия подобия полей напряжений и деформаций в модели и прототипе, изготовленных из вязкопластических материалов, имеющих область линейного поведения материала.

Пусть определяющие соотношения материалов модели (m) и прототипа (p) имеют вид

$$e_{ij}(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) ds_{ij}(\tau) + \int_{t_1}^t \Pi_1(t-\tau) d(s_{ij} - s_{ij}^0) \quad (3.1)$$

где s_{ij} , e_{ij} — компоненты девиаторов напряжений и деформаций, s_{ij}^0 — компоненты девиатора напряжений, характеризующие напряженное состояние при нарушении линейности поведения материала. Как и выше, граница нарушения линейности поведения материала связывается с достижением значения второго инварианта $s \equiv s_{ij}s_{ij}$ определенной величины s^0 .

Помимо соотношения (3.1) в систему уравнений входят также уравнения равновесия, соотношения Коши, граничные условия и выражение для первого инварианта тензора деформаций θ , который, как правило, принимается либо равным нулю (несжимаемость), либо пропорциональным среднему гидростатическому напряжению (упругое изменение объема).

Не приводя этих соотношений, выпишем данную систему относительно безразмерных величин σ_{ij}^∇ , ε_{ij}^∇ , u_i^∇ и т. д.

$$\partial \sigma_{ij}^\nabla / \partial x_j^\nabla = 0 \quad (3.2)$$

$$\varepsilon_{ij}^\nabla = 1/2 [u_i^\nabla / x_0 \varepsilon_0] (\partial u_i^\nabla / \partial x_j^\nabla + \partial u_j^\nabla / \partial x_i^\nabla) \quad (3.3)$$

$$e_{ij}^\nabla = \left[\frac{\Pi(0)\sigma_0}{\varepsilon_0} \right] \int_0^t \Pi^\nabla(t-\tau) ds_{ij}^\nabla + \left[\frac{\Pi_1(0)\sigma_0}{\varepsilon_0} \right] \int_{t_1}^t \Pi_1^\nabla(t-\tau) d(s_{ij}^\nabla - s_{ij}^{0\nabla}) \quad (3.4)$$

$$\sigma_{ij}^\nabla |_{s_\sigma} = [f_{10}/\sigma_0] f_1^\nabla(t) \quad (3.5)$$

$$u_i^\nabla |_{s_u} = [f_{20}/u_0] f_2^\nabla(t) \quad (3.6)$$

где u_0 , x_0 , ... — некоторые характерные величины; выражения в квадратных скобках — характерные комбинации.

Точное подобие между процессами деформирования модели и прототипа устанавливается в том случае, когда характерные комбинации и безразмерные функции времени в системах уравнений, описывающих эти процессы, соответственно равны между собой.

Наиболее трудно добиться равенства материальных функций. В линейном случае эта задача решается с использованием принципа температурно-временной эквивалентности [5, 6]. Другие подходы к решению таких задач [7] здесь обсуждаться не будут, так как они базируются на отличных от (3.1) определяющих соотношениях.

При использовании соотношений (3.1) важное значение имеет переход материала из линейной в физически нелинейную область. Это условие обязательно должно быть отражено в условиях подобия. По этой причине в первую очередь выбираем характерное значение σ_0 , так что значение безразмерного параметра s^0 (или σ_{11}^0) равно единице как для модельного, так и для натурального процесса. Поскольку $\Pi(0)$ определена и для модельного, и для натурального материала, то отсюда имеем

$$\varepsilon_0^m = \Pi_m(0) \sigma_0^m, \quad \varepsilon_0^p = \Pi_p(0) \sigma_0^p \quad (3.7)$$

Эти условия получены при равенстве единице характерной комбинации при первом интеграле в (3.4). Считая, что характерная комбинация в (3.3) также равна единице, имеем

$$u_0^m = x_0^m \epsilon_0^m = x_0^m \Pi_m(0) \sigma_0^m, \quad (3.8)$$

$$u_0^p = x_0^p \Pi_p(0) \sigma_0^p$$

Величина x_0 , как правило, пропорциональна характерному размеру. Аналогично из (3.5), (3.6) получим

$$f_{10}^m = \sigma_0^m, \quad f_{10}^p = \sigma_0^p \quad (3.9)$$

$$f_{20}^m = x_0^m \Pi_m(0) \sigma_0^m, \quad f_{20}^p = x_0^p \Pi_p(0) \sigma_0^p \quad (3.10)$$

Функции времени $f_1(t)$ и $f_2(t)$, входящие в систему, следует выбирать такими же, как в натурном процессе.

Таким образом, выбирая температуру модельного процесса, обеспечивающую точное или приближенное совпадение материальных функций $\Pi_m(t)$ и $\Pi_p(t)$ [5, 6], устанавливая затем значения граничных параметров и выбирая характерные величины так, как это указано выше, можно установить подобие для линейных процессов деформирования при различных характерных значениях напряжений и деформаций. Необходимость этого ясна из сравнения напряженно-деформированного состояния, например, алюминиевого сплава Д16 при $T=300^\circ\text{C}$ и целлулоида при 55°C [4].

Нетрудно показать, что при плоском напряженном состоянии системы (3.2) — (3.6) вполне достаточно для установления подобия между модельными и натурными процессами. Действительно, из условия $\sigma_{33}=0$ (σ_{33} — нормальная к поверхности модели компонента напряжения) имеем $\sigma = s_{11} + s_{22}$. Знание же величины среднего гидростатического напряжения σ позволяет при помощи соответствующих частей определяющих соотношений определить θ , если, конечно, материал сжимаемый.

При моделировании нелинейных процессов деформирования проблема усложняется ввиду возможного несовпадения как значений $\Pi_1^m(0)$ и $\Pi_1^p(0)$, так и функций $\Pi_1^{m\nabla}(t)$ и $\Pi_1^{p\nabla}(t)$. Если $\Pi_1^m(0)=0$, $\Pi_1^p(0)=0$, то необходимо выбрать другую характерную величину Π_{10} , в частности, ее можно положить равной $\Pi(0)$. В этом случае характерная комбинация при втором интеграле в соотношении (3.4) равна единице, а основное различие значений второго слагаемого в (3.4) определится различием безразмерных функций $\Pi_1^{\nabla}(t) = \Pi_1(t)/\Pi(0)$.

Пусть для определенности $\Pi_{10} = \Pi(0)$ и $\Pi_1^{m\nabla}(t) > \Pi_1^{p\nabla}(t)$ для любого t . Введем функцию $\Pi_{1\Delta}(t)$, такую, что

$$\Pi_1^{m\nabla}(t) = \Pi_1^{p\nabla}(t) + \Pi_{1\Delta}^{\nabla}(t) \quad (3.11)$$

Тогда из соотношения (3.4) для натурального процесса имеем

$$e_{ij}^{p\nabla} = \int_0^t \Pi_p^{\nabla}(t-\tau) ds_{ij}^{\nabla} + \int_{t_1}^t \Pi_1^{m\nabla}(t-\tau) d(s_{ij}^{\nabla} - s_{ij}^{0\nabla}) - \int_{t_1}^t \Pi_{1\Delta}^{\nabla}(t-\tau) d(s_{ij}^{\nabla} - s_{ij}^{0\nabla}) \quad (3.12)$$

Так как

$$\int_0^t \Pi_p^{\nabla}(t-\tau) ds_{ij}^{\nabla} \cong \int_0^t \Pi_m^{\nabla}(t-\tau) ds_{ij}^{\nabla} \quad (3.13)$$

то из (3.12) получаем

$$e_{ij}^{p\nabla} = e_{ij}^{m\nabla} - \int_0^t \Pi_{1\Delta}^{\nabla}(t-\tau) d(s_{ij}^{\nabla} - s_{ij}^{0\nabla}) \quad (3.14)$$

Естественно при этом предполагается, что в модельном процессе величины деформаций не достигают такого уровня, при котором нарушается геометрическая линейность постановки задачи.

При практической реализации изложенной методики моделирования устанавливают характерные величины напряжений и деформаций, на основе чего конкретизируют граничные условия в модельном процессе. После решения задачи на модели определяются безразмерные компоненты тензоров напряжений и деформаций в модели. Безразмерные компоненты тензоров напряжений в прототипе соответственно равны аналогичным величинам в модели, а безразмерные компоненты деформаций в прототипе устанавливаются на основе соотношения (3.14). Переход к размерным компонентам тензоров напряжений и деформаций осуществляется при помощи умножения их безразмерных компонент на соответствующие характерные величины для прототипа.

Используя соотношение, связывающее безразмерные компоненты девиаторов, следует помнить, что масштаб перемещений задается без учета возможного различия безразмерных функций ползучести для материалов модели и прототипа, поэтому при задании граничных условий в перемещениях возможны ошибки, обусловленные различием релаксационных процессов в материале модели и прототипа. Однако они могут быть уменьшены, если применить метод последовательных приближений, при котором в первом приближении используется упомянутая методика, а в последующих — масштаб перемещений u_0^m корректируется с учетом величины второго слагаемого в (3.14) путем умножения u_0^m на слагаемое $(1+k)$, где k можно определить таким образом:

$$k = \frac{e_{ij}^{\nabla}}{e_{kl}^{\nabla} e_{kl}^{\nabla}} \int_{t_1}^t \Pi_{1\Delta}^{\nabla}(t-\tau) d(s_{ij}^{\nabla} - s_{ij}^{0\nabla}) \quad (3.15)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Шарафутдинов Г. З. Об одной форме определяющих соотношений вязкопластичности. — Проблемы прочности, 1985, № 9, с. 97–102.
2. Пэжина П. Основные вопросы вязкопластичности. М.: Мир, 1968. 176 с.
3. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
4. Шарафутдинов Г. З. Об экспериментальном изучении механических свойств вязкоупругих материалов и определяющих соотношениях вязкоупругости. — В кн.: 2-я Всесоюз. конф. «Ползучесть в конструкциях». Тез. докл. Новосибирск: Изд-е Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1984, с. 165–166.
5. Нетребко В. П., Шарафутдинов Г. З. Исследование метода линейной фотовязкоупругости. — Упругость и неупругость: Сб. статей. М.: Изд-во МГУ, 1973, вып. 3, с. 173–187.
6. Нетребко В. П., Шарафутдинов Г. З. Моделирование изотермических процессов деформирования в линейной вязкоупругости. — В кн.: Тр. VII Всес. конф. по поляризационно-оптическому методу исследования напряжений. Т. 2. Таллин: Изд-во АН ЭССР, 1971, с. 211–215.
7. Александров А. Я., Азметзянов М. Х. Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела. М.: Наука, 1973. 576 с.

Москва

Поступила в редакцию
4.VII.1985