**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1987**

УДК 539.374

УСТОЙЧИВОСТЬ ВЯЗКОУПРУГИХ НЕОДНОРОДНО СТАРЕЮЩИХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ЗАДАННОМ ПРОДОЛЬНОМ ПЕРЕМЕЩЕНИИ КОНЦОВ

ДРОЗДОВ А. Д., КОЛМАНОВСКИЙ В. Б.

При исследовании устойчивости неоднородно стареющих стержней в условиях ползучести при наличии сосредоточенных и распределенных нагрузок в [1–4] установлена независимость условий устойчивости на бесконечном интервале времени от неоднородности старения и показано, что величина критической нагрузки, при которой происходит потеря устойчивости вязкоупругого стержня, меньше критической нагрузки потери устойчивости упругого стержня. Однако при экспериментальном изучении устойчивости в испытательной машине обычно задают не сжимающие усилия, а продольные перемещения концов стержня [5]. В настоящей работе установлены условия устойчивости стержня при заданных перемещениях его концов и произвольных ядрах ползучести. В частности, показано, что в рассматриваемых ситуациях условия устойчивости существенно зависят от неоднородности старения, а потеря устойчивости вязкоупругого стержня может происходить при перемещениях, больших, чем для соответствующего упругого стержня.

1. Постановка задачи. Рассмотрим прямолинейный стержень длины l из неоднородно стареющего вязкоупругого материала. Поперечное сечение стержня имеет одну ось симметрии. Изгиб происходит в плоскости, проходящей через продольную ось стержня и его ось симметрии. Введем ось x, направленную вдоль продольной оси стержня в недеформированном состоянии. Обозначим через S площадь поперечного сечения стержня, а через J — момент инерции сечения относительно нейтральной оси. В момент времени $t=0$ к стержню приложена внешняя нагрузка, состоящая из распределенной поперечной нагрузки интенсивности $q(x)$ и сжимающих сил, приложенных к торцам. Возраст элемента стержня в окрестности точки x в момент приложения внешней нагрузки обозначим $\rho(x)$. Функция ρ кусочно-непрерывная, ограниченная, и $\rho(0)=0$.

При одноосном напряженном состоянии напряжение $\sigma(t,x)$ и деформация $\varepsilon(t,x)$ в точке x в момент времени $t\geqslant 0$ связаны соотношениями

$$\varepsilon=E^{-1}(I+K)\sigma,\quad \sigma=E(I+K)^{-1}\varepsilon=E(I-R)\varepsilon \tag{1.1}$$

Здесь E — постоянный модуль упругомгновенной деформации материала, I — единичный оператор, K — оператор ползучести, R — оператор релаксации:

$$K\sigma=\int_0^t k(t+\rho(x),\tau+\rho(x))\sigma(\tau,x)\,d\tau,\qquad R\varepsilon=\int_0^t r(t+\rho(x),\tau+\rho(x))\varepsilon(\tau,x)\,d\tau$$

где $k(t,\tau)$, $r(t,\tau)$ — ядра ползучести и релаксации.

Обозначим через $y(t,x)$ прогиб стержня в точке x в момент времени t.

Определение 1. Стержень называется устойчивым на бесконечном интервале времени, если для любого $A>0$ существует такое $\delta=\delta(A)>0$, что из неравенства $\sup_x|q(x)|<\delta$ следует оценка

$$\sup_{t,x}|y(t,x)|<A,\ x\in[0,l],\ t\in[0,\infty)$$

Пусть прогиб стержня исследуется на конечном интервале времени $[0,T]$ и задано критическое значение прогиба y°. Критическое время T_0

определяется как первый момент достижения прогибом значения y°:

$$\sup_{t,x}|y(t, x)|<y^\circ, \ \sup_x|y(T_0, x)|=y^\circ, \ x\in[0, l], \ t\in[0, T_0)$$

Определение 2. Стержень называется устойчивым на интервале времени $[0, T]$, если $T_0>T$.

Обозначим через $u(t, x)$ продольное смещение точки оси стержня с координатой x в момент времени $t\geqslant 0$. Положим

$$u(t, 0)=0, \quad u(t, l)=-\alpha v(t) \tag{1.2}$$

Здесь $\alpha\geqslant 0$ — постоянный коэффициент, $v(t)$ — заданная кусочно непрерывно дифференцируемая функция.

Соотношения (1.2) описывают процесс нагружения стержня в испытательной машине, конец $x=0$ которого закреплен относительно продольных смещений, а продольные перемещения конца $x=l$ заданы как функция времени. Сжатие стержня происходит из ненагруженного состояния без разгрузки, т. е.

$$v(0)=0, \quad v^{\bullet}(t)=dv(t)/dt\geqslant 0 \tag{1.3}$$

Перемещение незакрепленного конца стержня ограничено, $v(t)\leqslant v_0$.

Поперечные перемещения концов стержня удовлетворяют одному из следующих граничных условий ($y'=\partial y/\partial x$):

$$y(t, 0)=y'(t, 0)=0, \quad y(t, l)=y'(t, l)=0 \tag{1.4}$$

$$y(t, 0)=y''(t, 0)=0, \quad y(t, l)=y''(t, l)=0 \tag{1.5}$$

$$y(t, 0)=y'(t, 0)=0, \quad y(t, l)=y''(t, l)=0 \tag{1.6}$$

$$y(t, 0)=y''(t, 0)=0, \quad y(t, l)=y'(t, l)=0 \tag{1.7}$$

Соотношения (1.4) описывают прогиб стержня, концы которого жестко защемлены, (1.5) — прогиб стержня с шарнирно закрепленными концами, а соотношения (1.6), (1.7) — прогиб стержня, один конец которого жестко защемлен, а другой — шарнирно оперт.

Считается, что скорость продольного перемещения точек стержня мала по сравнению со скоростью распространения звука (т. е. задачу об изгибе можно исследовать в квазистатической постановке), прогиб стержня y и продольное смещение u достаточно малы (т. е. можно пренебречь нелинейными членами в выражении для деформации в произвольной точке стержня) и справедлива гипотеза плоских сечений. Задача состоит в определении такого значения параметра $\alpha\geqslant 0$, при котором стержень устойчив в смысле определений 1 или 2.

2. Устойчивость на конечном интервале времени. Предположим, что ядро релаксации $r(t, \tau)$ удовлетворяет следующим предположениям:

существует такая функция $r_1(t, \tau)$, что

$$0\leqslant r(t+\rho(x), \tau+\rho(x))\leqslant r_1(t, \tau)$$

$$|r_1|=\sup_t\int_0^t r_1(t, \tau)\,d\tau<1, \quad 0\leqslant\tau\leqslant t, \quad x\in[0, l] \tag{2.1}$$

ядро $r(t, \tau)$ представимо в виде

$$r(t, \tau)=\psi_1(t, \tau)+\psi_2(t, \tau)(t-\tau)^{-\varkappa}, \quad 0<\varkappa<1, \quad 0\leqslant\tau\leqslant t \tag{2.2}$$

где неотрицательные функции ψ_1 и ψ_2 кусочно непрерывны по t и τ.

Фактическое определение условий устойчивости на конечном интервале времени сводится к исследованию соотношений, оценивающих прогиб в зависимости от параметров задачи. Приведем соответствующие оценки.

Обозначим через $N(t, x)$ нормальное усилие, а через $M(t, x)$ — изгибающий момент в сечении с координатой x в момент времени $t \geqslant 0$. Тогда

$$N = ES(I-R)u', \quad M = EJ(I-R)y'' \tag{2.3}$$

Уравнения равновесия элемента стержня имеют вид

$$M'' = q + (Ny')' \tag{2.4}$$

$$N' = 0 \tag{2.5}$$

Отметим, что ввиду (2.5) продольная нагрузка $N = N(t)$ не зависит от x.

Подставляя в уравнение (2.4) выражение (2.3) для изгибающего момента, получим

$$EJ[(I-R)y'']'' = (Ny')' + q \tag{2.6}$$

Умножим обе части равенства (2.6) на $y(t, x)$ и проинтегрируем по x в пределах от 0 до l. Интегрируя по частям и учитывая граничные условия (1.4) — (1.7), найдем

$$\int_0^l (y'')^2\,dx = \int_0^l y''Ry''\,dx + \frac{1}{EJ}\left[\int_0^l qy\,dx - \int_0^l N(y')^2\,dx\right] \tag{2.7}$$

Введем обозначения $Y_j^2(t) = \int (\partial^j y(t, x)/\partial x^j)^2 dx \quad (0 \leqslant x \leqslant l)$, $Z_j(t) = \sup_\tau Y_j(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$ $(j = 0, 1, 2)$. Оценим первые два слагаемых в правой части уравнения (2.7) с помощью неравенства Коши — Буняковского. Имеем

$$\left|\int_0^l y''Ry''\,dx\right| \leqslant Y_2(t)\int_0^t r_1(t, \tau)\,Y_2(\tau)\,d\tau, \qquad \left|\int_0^l qy\,dx\right| \leqslant QY_0(t),$$

$$Q^2 = \int_0^l q^2(x)\,dx \tag{2.8}$$

Обозначим через $\lambda > 0$ и $\lambda_1 > 0$ минимальные собственные значения краевых задач

$$d^4\psi(x)/dx^4 + \lambda\psi''(x) = 0, \quad d^4\psi(x)/dx^4 - \lambda_1\psi(x) = 0 \tag{2.9}$$

с одним из граничных условий (1.4) — (1.7).

В соответствии с неравенством Релея для любых $t \geqslant 0$ справедливы оценки

$$Y_0^2(t) \leqslant \lambda_1^{-1} Y_2^2(t), \quad Y_1^2(t) \leqslant \lambda^{-1} Y_2^2(t) \tag{2.10}$$

Подставляя (2.8), (2.10) в (2.7), заключаем, что

$$[1 - |N|\,(EJ\lambda)^{-1}]\,Y_2(t) \leqslant \int_0^t r_1(t, \tau)\,Y_2(\tau)\,d\tau + Q\,(EJ\lambda_1^{1/2})^{-1} \tag{2.11}$$

Потребуем, чтобы в каждый момент времени t упругий стержень, нагруженный продольной нагрузкой $N(t)$, был устойчив. Сформулированное требование выполнено, если [6]:

$$1 - |N|\,(EJ\lambda)^{-1} > 0 \tag{2.12}$$

Из (2.11), (2.12) можно получить различные оценки $Y_2(t)$. Например, из (2.11), (2.12) и леммы Гронуолла — Беллмана следует существование такой постоянной c_1, что при $0 \leqslant t \leqslant T$:

$$Y_2(t) \leqslant c_1 Q \tag{2.13}$$

Если дополнительно предположить, что

$$\beta = \inf_t[1 - |r_1| - |N(t)|\,(EJ\lambda)^{-1}] > 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{2.14}$$

то оценка (2.13) имеет место при $c_1 = (\beta EJ\lambda_1^{1/2})^{-1}$ для всех $0 \leqslant t \leqslant T$.

Для конкретизации условий устойчивости приведем выражение продольной силы $N(t)$. Подставим в уравнение (2.5) выражение (2.3) для нормального усилия N и проинтегрируем полученное равенство по x. Найдем $ES(I-R)u'(t, x)=ES(I-R^{\circ})u'(t, 0)$. Здесь R° — оператор с ядром $r(t, \tau)$. Значит $u'(t, x)=(I+K)(I-R^{\circ})u'(t, 0)$.

Отсюда и из граничных условий (1.2) следует, что $u(t, l)=-\alpha v(t)=$ $=l(I+K_2)(I-R^{\circ})u'(t, 0)$, где K_2 — оператор с ядром $k_2(t, \tau)$:

$$k_2(t,\tau)=\frac{1}{l}\int_0^l k(t+\rho(x), \tau+\rho(x))\,dx$$

Следовательно $u'(t, x)=-\alpha l^{-1}(I+K)(I+K_2)^{-1}v$. Из этого соотношения и (2.3) получаем выражение для продольной силы:

$$N=-\alpha_1(I+K_2)^{-1}v=-\alpha_1(I-R_2)v, \quad \alpha_1=\alpha ESl^{-1} \tag{2.15}$$

Ядро оператора R_2 обозначим через $r_2(t, \tau)$.

Из (2.15) видно, что если стержень упругий (т. е. $K=0$), то нормальное усилие $N_1(t)$, одинаковое во всех сечениях стрежня, имеет вид

$$N_1(t)=-\alpha_1 v(t) \tag{2.16}$$

Соотношения (2.15) и (2.16) показывают, что всегда

$$|N(t)|\leqslant|N_1(t)| \tag{2.17}$$

Механически неравенство (2.17) является следствием релаксации напряжений в вязкоупругом стержне. Для того, чтобы уточнить связь между N и N_1, введем в рассмотрение меру релаксации $\omega(t,\tau)$ с помощью соотношений

$$\begin{gathered} r_2(t, \tau)=-\partial\omega(t, \tau)/\partial\tau, \qquad \omega(t, \tau)\geqslant 0, \\ \omega(t, t)=0, \qquad 0\leqslant\tau\leqslant t \end{gathered} \tag{2.18}$$

Функция $\omega(t, \tau)$ при $t\to\infty$ стремится к своему предельному значению $\omega_0(\tau)$ равномерно по τ на любом конечном интервале изменения τ. Предположим, что $|r_2|<1$. Тогда

$$\omega(t,\tau)=\int_\tau^t r_2(t,s)\,ds\leqslant|r_2|<1, \quad \omega_0(\tau)=\lim_t\omega(t,\tau)<1 \tag{2.19}$$

На основании (2.15), (2.16), (2.18) имеем

$$-\alpha_1^{-1}N(t)=\int_0^t [1-\omega(t,\tau)]\,v^{\bullet}(\tau)\,d\tau \tag{2.20}$$

Из (2.16), (2.20) вытекает искомое равенство

$$N(t)=N_1(t)+\alpha_1\int_0^t \omega(t,\tau)\,v^{\bullet}(\tau)\,d\tau \tag{2.21}$$

Используя (2.17), (2.21), можно получить различные более простые достаточные условия справедливости (2.12) (т. е. устойчивости соответствующего упругого стержня). Например, вместо (2.12) достаточно предположить, что [6]:

$$\alpha<Jl\lambda(Sv_0)^{-1} \tag{2.22}$$

Замечание. Для принятых граничных условий (1.4)—(1.7) достаточно ограничиться оценками второй производной, ибо, например, в условиях (1.4)

$$y(t,x)=\int_0^x (x-s)\,y''(s)\,ds$$

3. Устойчивость на бесконечном интервале времени. Приведем некоторые достаточные условия устойчивости.

Теорема 3.1. Предположим, что неравенство (2.14) имеет место при всех $t \geqslant 0$. Тогда для $t \geqslant 0$ справедливо и соотношение (2.13), т. е. стержень устойчив на бесконечном интервале времени.

Для получения иных условий устойчивости необходимо уточнить предельное поведение ядра r. Пусть существует функция $r_0(t, \tau) \geqslant 0$, для которой при $t_1 \to \infty$ равномерно по $t \geqslant t_1$ будет

$$\int_{t_1}^{t} \sup_x |r(t+\rho(x), \tau+\rho(x)) - r_0(t, \tau)| d\tau \to 0, \qquad |r_0| < 1 \tag{3.1}$$

Оператор релаксации с ядром r_0 обозначим R_0. Покажем, что предельное значение N_0 нормального усилия равно

$$N_0 = \lim_t N(t) = -\alpha_1 \int_0^{\infty} [1-\omega_0(\tau)] v^{\cdot}(\tau) d\tau, \qquad t \to \infty \tag{3.2}$$

Ввиду (1.3) продольное смещение точки $x=l$ ограничено. Значит, для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует такое $t_1(\varepsilon_1)$, что $0 \leqslant v_0 - v(t_1) < \varepsilon_1$. Отсюда из (2.19) и (2.20) следует, что при $t \geqslant t_1$:

$$\left| N(t) + \alpha_1 \int_0^{t_1} [1-\omega(t, \tau)] v^{\cdot}(\tau) d\tau \right| \leqslant \alpha_1 \varepsilon_1 \tag{3.3}$$

Зафиксируем столь большое t_1, чтобы при $t \geqslant t_1$ выполнялось (3.3) и для любого $\tau \in [0, t_1]$ было справедливо неравенство $|\omega(t, \tau) - \omega_0(\tau)| < \varepsilon_1$, $t \geqslant t_1$. С учетом последней оценки имеем

$$\left| \int_0^{t_1} [1-\omega(t, \tau)] v^{\cdot}(\tau) d\tau - \int_0^{t_1} [1-\omega_0(\tau)] v^{\cdot}(\tau) d\tau \right| \leqslant \varepsilon_1 v_0 \tag{3.4}$$

Кроме того

$$\left| \int_0^{t_1} [1-\omega_0(\tau)] v^{\cdot}(\tau) d\tau - \int_0^{\infty} [1-\omega_0(\tau)] v^{\cdot}(\tau) d\tau \right| < \varepsilon_1 \tag{3.5}$$

Из неравенств (3.3)—(3.5) следует, что при $t \geqslant t_1$ справедлива оценка ($c_2 > 0$ — некоторая постоянная):

$$|N(t) - N_0| < c_2 \varepsilon_1 \tag{3.6}$$

Из (3.6) вытекает равенство (3.2). Приведем теперь достаточные условия устойчивости.

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия (2.1), (2.2), (2.19), (3.1). Тогда стержень устойчив, если при всех $t \geqslant 0$ справедливо неравенство (2.12) (или (2.22)) и

$$1 - |r_0| - |N_0| (EJ\lambda)^{-1} > 0 \tag{3.7}$$

Отметим, что фигурирующие в формулировке теоремы условия (2.12) существенно зависят от возраста материала ρ.

Доказательство. Запишем уравнение (2.7) в виде

$$\int_0^l (y'')^2 dx = \int_0^l y'' R_0 y'' dx + (EJ)^{-1} \int_0^l [qy - N_0 (y')^2 - (N-N_0)(y')^2 +$$

$$+ EJy''(R-R_0) y''] dx \tag{3.8}$$

Первые два слагаемых в правой части (3.8) оценим аналогично (2.8):

$$\left| \int_0^l y'' R_0 y'' dx \right| \leqslant |r_0| Y_2(t) Z_2(t), \qquad \left| \int_0^l qy \, dx \right| \leqslant \lambda_1^{-1/2} Q Y_2(t) \tag{3.9}$$

Далее имеем

$$\left|\int_0^l N_0(y')^2\,dx\right| \leqslant |N_0|\lambda^{-1}Y_2^2(t) \tag{3.10}$$

Оценим последние два слагаемых в правой части (3.8). Зафиксируем какое-либо $\varepsilon_1>0$, для которого $\beta_1=1-|r_0|-|N_0|(EJ\lambda)^{-1}-\varepsilon_1[1+(EJ\lambda)^{-1}]>0$. Возможность выбора такого ε_1 вытекает из (3.7). В соответствии с (3.1), (3.2) найдется такое $t_2(\varepsilon_1)$, что при $t\geqslant t_2$ справедливы неравенства

$$\int_{t_2}^{t} \sup_x |r(t+\rho(x), \tau+\rho(x))-r_0(t,\tau)|\,d\tau<\varepsilon_1, \quad \sup_t |N(t)-N_0|<\varepsilon_1$$

Отсюда и из (2.1), (3.1) для $t\geqslant t_2$ вытекают соотношения

$$\left|\int_0^l (N-N_0)(y')^2\,dx\right| \leqslant \varepsilon_1\lambda^{-1}Y_2^2(t) \tag{3.11}$$

$$\left|\int_0^l y''(R-R_0)y''\,dx\right| \leqslant Y_2(t)\left[(|r_0|+|r_1|)Z_2(t_2)+\varepsilon_1 Z_2(t)\right]$$

Подставляя оценки (3.9)—(3.11) в (3.8), заключаем, что

$$\beta_1 Z_2(t)\leqslant(|r_0|+|r_1|)Z_2(t_2)+Q(EJ\lambda_1^{1/2})^{-1} \tag{3.12}$$

Для фиксированных ε_1 и $t_2(\varepsilon_1)$ правая часть (3.12) может быть сделана с учетом (2.13) сколь угодно малой за счет выбора Q. Поэтому ввиду неравенства $\beta_1>0$ теорема 3.2 установлена.

Замечание. Требование (3.7) теоремы 3.2 является необходимым в следующем смысле. Если $1-|r_0|-|N_0|(EJ\lambda)^{-1}<0$, то существует такое ядро релаксации r, что стержень неустойчив.

4. Сравнение утверждений теоремы 3.1, 3.2 и условий потери устойчивости соответствующего упругого стержня с нагрузкой (2.16) показывает, что возможны такие режимы перемещений $u(t, l)$, при которых упругий стержень теряет устойчивость, а вязкоупругий — нет. Рассмотрим стержень из однородно стареющего материала ($\rho=0$) с мерой релаксации $\omega=[\gamma_1+\gamma_2(1+\tau)^{-2}][1-\exp(-\gamma_3(t-\tau))]$, где постоянные $\gamma_j>0$. В рассматриваемом случае $r=r_1=r_2$, а $\omega_0=\gamma_1+\gamma_2(1+\tau)^{-2}$. Функция v в (1.2), определяющая перемещение конца стержня, монотонно возрастает при $0\leqslant t\leqslant T$ и равна постоянной $v_0=EJ\lambda\alpha_1^{-1}$ при $T\leqslant t<\infty$. При таком перемещении конца упругий стержень потеряет устойчивость в момент T, поскольку в силу (2.16) нормальное усилие $N_1(T)=-\alpha_1 v_0$ достигает эйлерова критического значения $-EJ\lambda$. Предположим еще, что $\gamma_1+\gamma_2<1$. Тогда требования (2.2), (2.19) выполнены. Условия (3.1) выполнены при $r_0=\gamma_1\gamma_3\exp(-\gamma_3\times\times(t-\tau))$. Неравенство (2.12) справедливо для любого конечного t, поскольку в данном случае с учетом (2.21) оно эквивалентно неравенству

$$\int_0^T \omega(t,\tau)v^{\cdot}(\tau)\,d\tau>0$$

Наконец, справедливость условия (3.7) вытекает из того, что $|r_0|=\gamma_1$ и

$$|N_0|=-\alpha_1 v_0+\alpha_1\gamma_1 v_0+\alpha_1\gamma_2\int_0^T(1+\tau)^{-2}v^{\cdot}(\tau)\,d\tau$$

Значит, (3.7) эквивалентно оценке

$$(1-|r_0|)EJ\lambda-|N_0|=\alpha_1\gamma_2\int_0^T(1+\tau)^{-2}v^{\cdot}(\tau)\,d\tau>0$$

Тем самым все предположения теоремы 3.2 выполнены, т. е. вязкоупругий стержень устойчив, а упругий — неустойчив.

Механический смысл этого эффекта обусловлен релаксацией напряжений в вязкоупругом стержне.

5. Армированный стержень. Рассмотрим условия устойчивости вязкоупругого стержня, армированного упругим материалом. Стержень имеет две оси симметрии. Арматура расположена симметрично относительно продольной оси. Деформация и напряжение в основном материале связаны соотношениями (1.1), а деформация и напряжение в арматуре — законом Гука с модулем упругости E_a.

Обозначим S_a площадь поперечного сечения арматуры, а J_a — момент инерции арматуры относительно продольной оси.

Нормальное усилие N и изгибающий момент M в сечении стержня с координатой x определяются по формулам

$$N=ES\varkappa_1^{-1}(I-\varkappa_1 R)u', \quad M=EJ\varkappa_2^{-1}(I-\varkappa_2 R)y''$$
$$\varkappa_1=ES(ES+E_aS_a)^{-1}, \quad \varkappa_2=EJ(EJ+E_aJ_a)^{-1} \tag{5.1}$$

Сравнивая выражения (5.1) и (2.3), заключаем, что нормальное усилие в армированном стержне совпадает с нормальным усилием в неармированном стержне, модуль упругости которого в $\varkappa_1$ раз меньше, а ядро релаксации в $\varkappa_1$ раз больше соответствующих параметров основного материала армированного стержня. Аналогично, изгибающий момент в сечении армированного стержня равен изгибающему моменту в сечении неармированного стержня, у которого модуль упругости в $\varkappa_2$ раз меньше, а ядро релаксации в $\varkappa_2$ раз больше соответствующих величин основного материала армированного стержня. Таким образом, для получения условий устойчивости армированного стержня достаточно в полученных выше условиях устойчивости неармированного стержня заменить модуль упругости и ядро ползучести материала согласно указанному правилу.

6. Устойчивость на конечном интервале времени. Для исследования влияния возраста материала на величину критического времени численно решено уравнение (2.6) для стержня прямоугольного поперечного сечения из материала со следующими параметрами: $k(t, \tau)=-E(\partial/\partial\tau)[\varphi(\tau)\times\times(1-\exp(-\gamma(t-\tau)))]$, $\varphi(\tau)=A_1+A_2\tau^{-1}$, $A_1=0{,}238\cdot10^{-4}$ МПа$^{-1}$, $A_2=1{,}85\cdot10^{-4}$ МПа$^{-1}\cdot$сут, $E=2{,}0\cdot10^4$ МПа, $\gamma=0{,}04$ сут$^{-1}$.

Длина стержня $l=0{,}5$ м, ширина — 0,03 м, толщина — 0,05 м. Стержень состоит из двух равных однородных частей. Возраст одной части стержня относительно другой части равен ρ. Концы стержня шарнирно оперты. Через 5 сут. после изготовления стержня к нему приложена внешняя нагрузка, состоящая из сжимающих усилий и поперечной распределенной нагрузки постоянной интенсивности. Под действием сжимающих усилий происходит продольное смещение конца стержня с постоянной скоростью $\dot{v}=4{,}0\cdot10^{-5}$ м/сут. Результаты расчетов показывают, что с ростом возраста материала критическое время увеличивается, причем тем интенсивнее, чем больше критическое значение прогиба.

Отметим, что в силу [4, 6] результаты настоящей работы сохраняют свою силу и при наличии начального искривления оси стержня, а также в случае произвольного закрепления его концов в виде консервативной упругой системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Об устойчивости неоднородно стареющих вязкоупругих стержней.– ПММ, 1979, т. 43, вып. 4, с. 709–721.
2. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Об устойчивости сжато-растянутых неоднородно вязкоупругих армированных стержней– Докл. АН СССР, 1981, т. 258, № 6, с. 1334–1336.
3. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Об устойчивости неоднородно вязкоупругих армированных стержней.– ПММ, 1981, т. 45, вып. 6, с. 841–853.
4. *Дроздов А. Д., Колмановский В. Б., Потапов В. Д.* Устойчивость стержней из неоднородно стареющего вязкоупругого материала.– Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 2, с. 177–187.
5. *Хофф Н.* Продольный изгиб и устойчивость. М.: Изд-во иностр. лит. 1955. 154 с.
6. *Ржаницын А. Р.* Устойчивость равновесия упругих систем. М.: Гостехиздат, 1955. 476 с.

Москва

Поступила в редакцию
11.XI.1984