

УДК 539.3

ОБ ИЗЛУЧЕНИИ УПРУГИХ ВОЛН  
ПРИ СХЛОПЫВАНИИ ТРЕЩИНЫ

СИМОНОВ И. В.

Рассматривается медленное изменение состояния упругого тела с разрезом при действии знакопеременной нагрузки. Пока трещина раскрыта, процесс деформирования квазистатический. При схлопывании берегов трещины излучается сигнал. Для его описания в главном поставлена начально-краевая задача, одной из входных функций которой является решение соответствующей статической задачи. Подробно изучен случай прямолинейной трещины конечной длины в однородной изотропной упругой плоскости. Построено точное решение, выделены прифронтовые асимптотики. Отмечена зависимость показателя особенности решения около фронтов цилиндрических волн от показателя особенности напряжений в вершине трещин.

1. Линейно-упругая среда занимает область  $\Omega$  в пространстве  $R^3$  и определяется некоторым набором кусочно-гладких параметров. Внутри  $\Omega$  имеется разрез — двумерная область  $S = S^+ \cup S^-$  единичного характерного размера ( $S^+$  и  $S^-$  — «верхняя» и «нижняя» поверхности разреза). Другие характерные размеры в  $\Omega$  по предположению  $\gg 1$ . Введем обозначения:  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  — вектор смещения и тензор напряжений,  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к  $S^+$ ,  $[\mathbf{u}]$  — скачок  $\mathbf{u}$  при переходе с  $S^+$  на  $S^-$ ,  $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ ,  $\sigma_n = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}$ . Рассмотрим две задачи (будем считать, что они разрешимы).

1. Тело деформируется под действием совокупности поверхностных (на  $\partial\Omega_0$ ) и внутренних постоянных нагрузок  $Q_0$ . Часть границы может быть закреплена:  $\dot{\mathbf{u}} = 0$  на  $\partial\Omega \setminus \partial\Omega_0$ , иначе усилия самоуравновешены. Разрез полностью раскрыт:  $[u_n] > 0$  на  $S$ .

2. Начиная с момента времени  $t = t^* < 0$  указанное в задаче 1 напряженно-деформированное состояние медленно изменяется под действием переменных усилий  $Q_1(t)$

$$Q_1 = Q_0 g(t), \quad g(t) = g^\varepsilon(T), \quad T = \varepsilon t, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (1.1)$$

$$g(t^*) = 1; \quad g(t) > 0 \quad (t^* < t < 0); \quad g_{,r}^\circ(T), g_{,rr}^\circ(T) = O(1) \quad (t^* < t)$$

За единицу измерения скорости выберем максимальную скорость распространения волн в среде, тогда единицей времени является минимальное время пробега волной расстояния, равного характерной длине трещины. Решение задачи 2 при  $t^* < t < 0$  с точностью до  $O(\varepsilon^2)$  описывается квазистатическим приближением

$$\mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{u}_0^{(2)} + O(\varepsilon^2), \quad \mathbf{u}_0^{(2)} = \mathbf{u}^{(1)} g(t) \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{u}^{(k)}$  — решение задачи  $K$ . Действительно, для разности  $\mathbf{e} = \mathbf{u}^{(2)} - \mathbf{u}_0^{(2)}$  получаем задачу отыскания решения неоднородного векторного уравнения  $\mathbf{A}\mathbf{e} = \mathbf{e}_{,rr} - \varepsilon^2 \mathbf{u}^{(1)'} \varepsilon^{-3}$  с однородными начально-краевыми условиями ( $\mathbf{A}$  — статический оператор теории упругости). Таким образом, причины в задаче для невязки имеют порядок  $\varepsilon^2$  ( $\mathbf{u}^{(1)}$ ,  $\mathbf{u}^{(2)}$  непрерывны в  $\Omega + \partial\Omega + S$ ). В силу предположений о разрешимости и (1.1) имеет место линейная зависимость решения от причин, а следовательно, на конечном интервале времени и (1.2). Поскольку малый параметр  $\varepsilon$  не связан с геометрией области, можно считать, что оценка (1.2) почти всюду распространяется и на напряжения.

Продолжим решение 2 в область  $0 \leq t < t^0$  при следующих ограничениях

на временной множитель:

$$g(0) = 0, \quad g_{,t}(0) = b < 0 \quad (b = \varepsilon g_{,t}^{\circ}(0) = O(\varepsilon))$$

$$g(t) < 0, \quad 0 < t < t^{\circ} \quad (t^{\circ} \gg 1, \quad 0 \leq T < T^{\circ} \sim 1) \quad (1.3)$$

Судя по решению  $u_0^{(2)}$  и (1.3), берега трещины сомкнулись. С математической точки зрения в момент времени  $t=0$  произошло скачкообразное изменение типа краевого условия на  $S$ , иначе  $[u_0^{(2)}]_n < 0$  на  $S$  при  $t > 0$ , что недопустимо из-за физического условия непроникания берегов разреза. Если остаться на позициях квазистатического подхода, то следует учесть компенсирующие нормальные напряжения на  $S$ , равные нулю при  $t \leq -0$ . Между тем оценка  $\sigma_n^{(2)}(t)$ , исходя из элементарного рассмотрения динамики процесса соударения упругих поверхностей в одномерном приближении и в случае однородной изотропной среды, показывает, что  $\sigma_n^{(2)}(+0) = 1/2 \varepsilon \rho_0 [u_n]^{(1)} g_{,t}^{\circ}(0) = O(\varepsilon)$  ( $S$ ) ( $\rho_0$  — плотность среды).

На волнах, отходящих от разреза, указанный выше порядок напряжений сохранится и при  $t > 0$  (очевидно, в общем случае можно прийти к аналогичному выводу).

Итак, точное решение задачи 2 (имеются в виду напряжения, а не смещения) при  $t \geq 0$  отличается от квазистатического уже в порядке  $\varepsilon$ . Появление величин более низкого порядка обусловлено неединственным характером задачи: альтернативные условия меняют границы. Энергетическая значимость сигнала, излученного при схлопывании разреза, может оказаться невелика вследствие его кратковременности. Однако изучение его амплитудных значений может представить интерес для интерпретации измерений динамических напряжений, поскольку эти значения несут информацию о дефекте, прямые замеры характеристик которого, как правило, затруднены.

Поправку  $O(\varepsilon)$  к квазистатическому решению можно учесть рассматривая существенно более простую задачу, чем при полном учете динамики (зная решение задачи 1). Будем искать приближенное решение задачи 2 в виде суммы ( $t \geq 0$ ):  $u_1^{(2)} = u_0^{(2)} + u$ ,  $\sigma_1^{(2)} = \sigma_0^{(2)} + \sigma$ , где  $(u, \sigma)_0$  — квазистатическое решение без учета взаимодействия берегов  $S^+$  и  $S^-$ ,  $(u, \sigma)$  — динамическая поправка, подчиняющаяся следующим начальным и крайевым условиям на  $S$ :

$$u(x, 0) = u_{,t}(x, 0) = 0 \quad (x \in \Omega) \quad (1.4)$$

$$[u_n] = -[u_n]^{(1)} g(t), \quad \sigma \cdot n - \sigma_n = 0 \quad (x \in S)$$

Кроме того, напряжения  $\sigma$  и смещения  $u$  должны удовлетворять динамическим уравнениям теории упругости в  $\Omega$  и другим граничным условиям (здесь не выписываем). В той части области, куда не дошел передний фронт отошедшей от разреза  $S$  волны, решение по-прежнему квазистатическое. Пока возмущение не достигло других границ, задача определения поправки полностью описана.

Строгая оценка разности  $\sigma^{(2)} - \sigma_0^{(2)} - \sigma$  и доказательство того, что решения задачи 1 и задачи (1.4) определяют динамику процесса с точностью  $O(\varepsilon^2)$  в некоторой норме, наталкиваются на те же трудности, что и при доказательстве разрешимости динамических задач с переменными границами — это открытые математические вопросы [1]. В ряде случаев задача (1.4) может быть эффективно решена. Например, если  $S$  — плоская область, среда изотропна и однородна, а нагрузки симметричны относительно  $S$ , то перекрестные условия (1.4) приводят к разделяющимся волновым задачам для потенциалов [2].

2. Изучим этот случай на примере двумерной задачи о схлопывании прямолинейного разреза.

Задача (1.4) сводится к решению волновых уравнений для потенциалов смещений  $\varphi$  и  $\psi$  в верхней полуплоскости с крайевыми и начальными условиями

$$\Delta \varphi = \varphi_{,tt}, \quad \Delta \psi = \psi_{,tt} \gamma^2, \quad y > 0, \quad |x| < \infty, \quad t > 0 \quad (2.1)$$

$$\tau_{xy} = 2\varphi_{,xy} + \psi_{,yy} - \psi_{,xx} = 0 \quad (2.2)$$

$$u_y = \varphi_{,y} - \psi_{,x} = -v(x)g(t), \quad y=0, \quad |x| < \infty, \quad t \geq 0 \quad (2.3)$$

$$\varphi = \varphi_{,t} = \psi = \psi_{,t} = 0, \quad y > 0, \quad |x| < \infty, \quad t = 0 \quad (2.4)$$

Здесь  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $\gamma = c_1/c_2$ ,  $c_1, c_2$  — скорости волн расширения и сдвига; напряжения нормированы на модуль сдвига  $\mu$ ,  $v = v^\circ(x) \times \sqrt{H(1-x^2)}$  — статическое смещение верхнего берега разреза,  $H(x)$  — функция Хевисайда,  $v^\circ(x)$  и  $g(t)$  — достаточно гладкие функции в областях  $|x| < 1$  и  $0 \leq t \leq t^\circ$ , причем  $v^\circ(x) > 0$  при  $|x| < 1$ , а в концах разреза имеет асимптотику

$$v^\circ = M(\pm 1)\eta^\alpha + o(\eta^\alpha), \quad \eta = 1 - |x| \rightarrow +0 \quad (M > 0, \alpha \geq 1/2) \quad (2.5)$$

В сформулированной нестационарной задаче (2.1)–(2.5) краевые условия (2.2), (2.3) сквозные. В более простом варианте  $v^\circ \equiv 1$  (и с иной физической интерпретацией) задача рассмотрена в [3]. В задаче со смешанными краевыми условиями [4], где на части границы полуплоскости условия имели вид (2.2), (2.3), также до конца изучен случай  $v^\circ \equiv 1$ .

Большими буквами обозначим результат применения к функциям преобразования Лапласа по  $t$  и двустороннего преобразования Лапласа по  $x$  с параметрами  $s$  и  $p$ . Решим получающуюся из (2.1) систему обыкновенных дифференциальных уравнений для образов с краевыми условиями, порождаемыми (2.2), (2.3), отбрасывая растущие при  $y \rightarrow \infty$  решения

$$\Phi = F_1(\xi, s)V(p)G(s), \quad \Psi = F_2(\xi, s)V(p)G(s) \quad (2.6)$$

$$F_1 = \gamma^{-2}s^{-1}\beta_1^{-1}(\gamma^2 - 2\xi^2) \exp(-s\beta_1 y), \quad F_2 = 2\gamma^2 s^{-1} \xi \exp(-s\beta_2 y)$$

$$\xi = p/s, \quad \beta_1 = \sqrt{1 - \xi^2}, \quad \beta_2 = \sqrt{\gamma^2 - \xi^2}; \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = \gamma \quad (\xi = 0)$$

Разрезы в комплексной плоскости  $\xi$  соединяют точки  $\pm 1$  или  $\pm \gamma$  по действительной оси через бесконечность; на верхних берегах разрезов радикалы  $\beta_j$  ( $j=1, 2$ ) принимают значения, равные  $-i|\beta_j| \operatorname{sgn} x$ , на нижних — те же значения, но с противоположными знаками.

Будем также интересоваться напряжением  $\sigma_y = (\gamma^2 - 2)\varphi_{,xx} + \gamma^2\varphi_{,yy} - 2\psi_{,xy}$  на границе  $y=0$ . Связь изображения этой функции с изображениями функций  $v(x)$  и  $g(t)$  дается формулой

$$\Sigma = spD(\xi, s)V(p)G(s), \quad D = [(\gamma^2 - 2\xi^2)^2 + 4\xi^2\beta_1\beta_2]/(\gamma^2 s \xi \beta_1) \quad (2.7)$$

Область сходимости интегралов прямого преобразования Лапласа по времени  $\operatorname{Re} s > 0$ , а двойного — по крайней мере в полосе

$$-\operatorname{Re} s < \operatorname{Re} p < \operatorname{Re} s \quad (2.8)$$

Униформизация радикалов обеспечивает выполнение условия  $\operatorname{Re} s\beta_j > 0$  в полосе (2.8), что отвечает экспоненциально убывающим при  $y \rightarrow \infty$  решениям (2.6).

Реализуем алгоритм обращения двойного преобразования по отношению к коэффициентам  $F_j, D$  [5] с учетом факта, что  $p$  — параметр преобразования Лапласа, а не преобразования Фурье, как в [5] (все условия его применимости в данном случае выполнены). В результате получим фундаментальное решение задачи (2.1)–(2.4) (для  $v(x)g(t) = -\delta(x)\delta(t)$ , где  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака)

$$f_1 = (1/(\pi\sqrt{t^2 - r^2}) + \partial h/\partial x)H(t-r), \quad h = 2x\sqrt{t^2 - r^2}/(\pi\gamma^2 r^2) \quad (2.9)$$

$$f_2 = (2y/\pi\gamma^2)\partial(r^2\sqrt{t^2 - \gamma^2 r^2})/\partial x H(t-\gamma r), \quad r^2 = x^2 + y^2$$

$$d = -H(t)Q(c)/(\pi x\sqrt{1-c^2}), \quad c = x/t$$

$$\gamma^2 c^2 Q = (2 - \gamma^2 c^2)^2 H(1-c^2) - 4\sqrt{(1-c^2)(1-\gamma^2 c^2)} H(1-\gamma^2 c^2)$$

Можно проверить, что функции  $f_1$  и  $f_2$ , определенные формулами (2.9), удовлетворяют волновым уравнениям (2.1) в смысле обобщенных функ-

ций [6] и граничным условиям в форме

$$\lim_{y \rightarrow +0} (f_{1,y} - f_{2,y}) = \delta(x) \delta(t), \quad \lim_{y \rightarrow +0} (2f_{1,xy} - f_{2,xx} + f_{2,yy}) = 0$$

При этом используются формулы дифференцирования свертки [6] и пределы

$$y/(\pi r^2) \rightarrow \delta(x), \quad -2xy/(\pi r^4) \rightarrow \delta_{,x}(x) \quad (y \rightarrow +0)$$

Теперь решение задачи может быть записано в виде двойных свертки по переменным  $x$  и  $t$ :

$$\varphi = -f_1(x, y, t) ** v(x) g(t), \quad \psi = -f_2(x, y, t) ** v(x) g(t) \\ \sigma(x, t) = \sigma_y(x, 0, t) = d(x, t) ** v_{,x}(x) g_{,t}(t)$$

или в развернутом виде после некоторых преобразований (интегрирования по частям с учетом свойств четности или нечетности функций  $f_i, h$ ):

$$\varphi = \int_y^t g(t - \tau) d\tau \int_0^{\sqrt{t^2 - y^2}} \left\{ \frac{v(x + x_0) + v(x - x_0)}{\pi \sqrt{\tau^2 - r_0^2}} + \right. \\ \left. + h(x_0, y, \tau) [v_{,x}(x - x_0) - v_{,x}(x + x_0)] \right\} dx_0 = \\ = \int_{-\sqrt{t^2 - y^2}}^{\sqrt{t^2 - y^2}} \left[ v(x - x_0) \frac{1}{\pi} \int_{r_0}^t \frac{g(t - \tau) d\tau}{\sqrt{\tau^2 - r_0^2}} + v_{,x}(x - x_0) \int_{r_0}^t g(t - \tau) h(x_0, y, \tau) d\tau \right] dx_0 \quad (2.10)$$

$$\psi = \frac{2y}{\pi \gamma^2} \int_{\gamma y}^t g(t - \tau) d\tau \int_0^{\sqrt{\gamma^2 t^2 - y^2}} \frac{\sqrt{\tau^2 - \gamma^2 r_0^2}}{r_0^2} [v_{,x}(x - x_0) + v_{,x}(x + x_0)] dx_0 = \\ = \frac{2y}{\pi \gamma^2} \int_{-\sqrt{\gamma^2 t^2 - y^2}}^{\sqrt{\gamma^2 t^2 - y^2}} v_{,x}(x - x_0) dx_0 \int_{\gamma r_0}^t \frac{\sqrt{\tau^2 - \gamma^2 r_0^2}}{r_0^2} g(t - \tau) d\tau \\ \sigma = -\frac{1}{\pi} \int_0^t g_{,t}(t - \tau) d\tau \int_{(x-1)\tau^{-1}}^{(x+1)\tau^{-1}} \frac{Q(c) v_{,x}(x - c\tau)}{c^3 \sqrt{1 - c^2}} dc, \quad r_0^2 = x_0^2 + y^2$$

Здесь и далее интегралы понимаются в смысле Римана или как несобственные или как особые в смысле Коши. Область интегрирования в первой из формул (2.10), показанная на фиг. 1, испытывает срезку при  $|x_j| < \xi = \sqrt{t^2 - y^2}$  ( $x_1 = x - 1$ ,  $x_2 = -x - 1$ ) вследствие финитности функции  $v(x)$  (в формулах (2.10) это явно не указано). Аналогичный вид имеет область интегрирования при вычислении функции  $\psi$ .

3. При исследовании решения (2.10) главное внимание будет уделено прифронтовым асимптотикам. Картина излученных фронтов волн показана на фиг. 2. При  $y \rightarrow t - 0$  попадаем в прифронтовую зону плоской продольной волны  $EA$ , а при  $y \rightarrow \gamma^{-1}t - 0$  — за фронт поперечной волны  $FB$ . Зона интегрирования в (2.10) локализуется:  $0 \leq x_0 \leq \sqrt{2t(t-y)}$ ,  $y \leq \tau \leq t$  для  $\varphi$  и при выделении главной части можно использовать формулу Тейлора  $v(x + x_0) + v(x - x_0) = 2v(x) + v_{,xx}(x)x_0^2 + \dots$ ,  $g(\tau) = b\tau + \dots$

Окончательно получим

$$\varphi = {}^{1/2} b (t-y)^2 [v(x) (1 + O(\varepsilon_1)) + O(\varepsilon_1 v_{,xx}(x))] \quad (3.1)$$

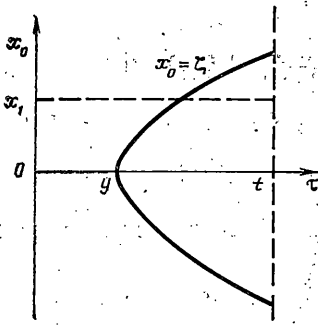
$$\sigma_y \sim \gamma^2 b v(x), \quad \tau_{xy} \sim -2v_{,x}(x) b (t-y) \quad (y \rightarrow t - 0)$$

$$\psi = {}^{1/3} b (t\gamma^{-1} - y)^3 [v_{,x}(x) (1 + O(\varepsilon_2)) + O(\varepsilon_2 v_{,xxx}(x))] \quad (3.2)$$

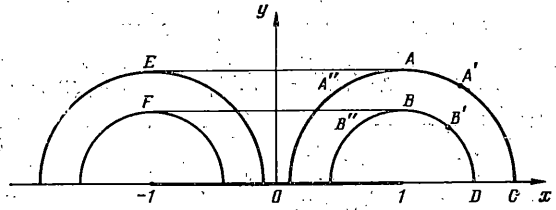
$$\Delta^\circ \sigma_y \sim 2b v_{,xx}(x) (t\gamma^{-1} - y)^2, \quad \Delta^\circ \tau_{xy} \sim 2b v_{,x}(x) (t\gamma^{-1} - y) \quad (y \rightarrow t\gamma^{-1} - 0)$$

$$\varepsilon_1 = 1 - y/t, \quad \varepsilon_2 = 1 - \gamma y/t$$

где  $\Delta^\circ \sigma_y$ ,  $\Delta^\circ \tau_{xy}$  — приращения напряжений от поперечной части поля.



Фиг. 1



Фиг. 2

Напряжение  $\sigma_y$  на фронте  $EA$  такое же, как и в начальный момент времени на берегу разреза, и соответствует скачку скорости частиц, равному  $bv(x)$ . Касательное напряжение за фронтом  $EA$  и  $FB$  нарастает по линейному закону, если изменяемость функции  $v^\circ(x)$  не равна нулю ( $v_{,x}^\circ, v_{,xx}^\circ \neq 0$ ); при  $v^\circ = \text{const}$  плоская поперечная волна исчезает.

Для изучения поведения решения за цилиндрическим фронтом продольной волны  $AC$  и в окрестности точки  $A$  положим  $\rho = t - r_1 \rightarrow 0$ ,  $r_1^2 = x_1^2 + y^2$  ( $t$  фиксируем). Носитель подынтегральной функции в свертках (2.10), определяющих функцию  $\varphi$ , задается системой неравенств  $x_1 < x_0 < x_2$ ,  $-\sqrt{t^2 - y^2} < x_0 < \sqrt{t^2 - y^2}$ ,  $r_0 < \tau < t$  и при  $x_1 > -\sqrt{t^2 - y^2}$  выражение для потенциала приводится к виду

$$\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{x_1}^t \left\{ v_{,x}(x-x_0) \int_0^{t-r_0} \frac{2x_0 g(\tau)}{\gamma^2 r_0^2} \sqrt{(t-\tau)^2 - r_0^2} d\tau + \int_0^{t-r_0} \frac{g(\tau) d\tau}{\sqrt{(t-\tau)^2 - r_0^2}} v(x-x_0) d\tau \right\} dx_0 = I_1 + I_2$$

Имеем  $0 \leq t - r_0 \leq \rho$ , если  $x_1 \geq 0$ , и  $0 \leq t - r_0 \leq t - y$ , если  $x_1 < 0$ . Таким образом, если  $x_1 > 0$  или  $x_1 < 0$  и  $t - y \ll 1$ , то внутренние интегралы можно приближенно взять используя малость величины  $t - r_0$  (область интегрирования на фиг. 2 срезана прямой  $x_0 = x_1$ ).

$$I_1 \sim \frac{8\sqrt{2}b}{15\pi\gamma^2 t^{3/2}} \int_0^{z_0} (z+x_1) (t-r_0)^{5/2} v_{,x}(1-z) dz$$

$$I_2 \sim \frac{4b}{3\pi\sqrt{2}t} \int_0^{z_0} (t-r_0)^{3/2} v(1-z) dz \quad (3.2)$$

$$z_0 = \sqrt{t^2 - y^2} - x_1 = \sqrt{x_1^2 + 2\rho r_1 + \rho^2} - x_1 \sim \sqrt{\rho t \kappa} (\Delta_*), \quad 0 \leq |\Delta_*| \leq 1$$

$$z_0 \sim (\cos \theta)^{-1} \rho, \quad \Delta_* \rightarrow \infty; \quad \Delta_* = \sqrt{t/\rho} \cos \theta, \quad \cos \theta = x_1/r_1$$

$$\kappa = \sqrt{2 + \Delta_*^2} - \Delta_*, \quad (t-r_0) \sim \rho - z \cos \theta^{-1} / {}_2r_1^{-1} z^2 = \rho(1-q)(1 + {}_1/{}_2 \kappa^2 q),$$

$$q = z/z_0$$

У подынтегральных функций в (3.2) отброшен множитель  $1 + O(t - r_0) + O((t - r_0)/t)$  и считается, что  $\sqrt{\rho}/t \ll 1$  или  $t^{-1}(t - y) \ll 1$ .

На участке цилиндрического фронта  $A'C$ , где  $\cos^2 \theta \gg \rho t$ , асимптотические выражения для потенциала  $\varphi$  и его второй производной по  $r_1$  определены формулами

$$\varphi \sim \frac{2\sqrt{2}bM}{3\pi} \frac{(1 - 2\gamma^{-2} \cos^2 \theta)}{t^{1/2} (\cos \theta)^{1+\alpha}} \rho^{\alpha+1/2} C_1(\alpha) \quad (3.3)$$

$$\partial^2 \varphi / \partial r_1^2 \sim bM \rho^{\alpha+1/2} (1-2\gamma^{-2} \cos^2 \theta) C(\alpha) / [\pi \sqrt{2t} (\cos \theta)^{1+\alpha}]$$

$$\sigma_\theta \sim (\gamma^2 - 2) \partial^2 \varphi / \partial r_1^2, \quad \sigma_{r_1} \sim \gamma^2 \partial^2 \varphi / \partial r_1^2, \quad \tau_{r,\theta} \sim O(\sigma_\theta)$$

При выводе (3.3) из (3.2) использованы малость величины  $z_0$ , асимптотика (2.5) и равенство

$$C_1 = \int_0^1 (1-q)^{1/2} q^\alpha dq = \frac{3}{4} \frac{C}{(5/2+\alpha)(3/2+\alpha)}, \quad C = \int_0^1 \frac{q^\alpha dq}{(1-q)^{1/2}} = \begin{cases} \pi/2, & \alpha = 1/2 \\ 4/3, & \alpha = 1 \end{cases} \quad (3.4)$$

которое можно доказать при помощи дифференцирования по параметру.

В окрестности точки присоединения плоского и цилиндрического фронтов продольных волн за дугой  $A''A'$  в области  $0 \leq \rho \leq 1$ ,  $|\Delta_*| \leq 1$  главная часть поля определяется вкладом интеграла  $I_2$ . При дополнительном условии  $\sqrt{t\rho} \ll 1$  можно снова воспользоваться асимптотикой (2.5) и получить выражения, аналогичные (3.2):

$$\varphi \sim \frac{4bM}{3\sqrt{2}\pi} \kappa^{\alpha+1} t^{\alpha/2} \rho^{2+\alpha/2} \int_0^1 q^\alpha (1-q)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{2} \kappa^2 q\right)^{1/2} dq \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r_1^2} \sim \frac{bM}{\sqrt{2}\pi} \kappa^{1+\alpha} (t\rho)^{\alpha/2} \int_0^1 \frac{q^\alpha dq}{(1-q)^{1/2} (1+1/2 \kappa^2 q)^{1/2}}$$

$$\frac{1}{r_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r_1 \partial \theta} = O\left(\sqrt{\frac{\rho}{t}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r_1^2}\right), \quad \frac{1}{r_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = O\left(\frac{\rho}{t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r_1^2}\right)$$

При больших временах ( $\sqrt{t\rho} \geq 1$ ) в указанной окрестности точки  $A$  следует пользоваться исходными формулами (3.2).

За цилиндрическим фронтом поперечной волны  $B''D$  общее выражение для асимптотики потенциала  $\psi$  определяется однократным интегралом

$$\psi \sim \frac{8b \sin \theta}{15\pi} \sqrt{\frac{2}{t_*}} \int_0^{z_0} \left(\rho - z \cos \theta - \frac{z^2}{2r_1}\right)^{1/2} v_{,x}(1-z) dz \quad (3.6)$$

где в формулах для  $\rho$ ,  $z_0$ ,  $\kappa$  (3.2) следует заменить  $t$  на  $t_* = t/\gamma$ .

Приведем также асимптотики, справедливые за участком фронта  $B'D$  и в окрестности точки присоединения фронтов поперечных волн  $B$ :

$$\psi \sim -\frac{4bM \sin \theta}{3\pi (\cos \theta)^\alpha} \sqrt{\frac{2}{t_*}} C_1 \rho^{5/2+\alpha}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r_1^2} \sim -\frac{bM \sin \theta}{\pi (\cos \theta)^\alpha} \sqrt{\frac{2}{t_*}} C \rho^{1/2+\alpha} \quad (3.7)$$

( $\cos^2 \theta \gg \rho/t_*$ )

$$\psi \sim -\frac{8\alpha b M \sqrt{2}}{15\pi t_*^{1/2-\alpha/2}} \kappa^\alpha \rho^{5/2+\alpha/2} \int_0^1 (1-q)^{1/2} \left(1 + \frac{\kappa^2 q}{2}\right)^{1/2} q^{\alpha-1} dq$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r_1^2} \sim -\frac{2\sqrt{2} \alpha b M}{\pi t_*^{1/2-\alpha/2}} \kappa^\alpha \rho^{1/2+\alpha/2} \int_0^1 (1-q)^{1/2} \left(1 + \frac{\kappa^2 q}{2}\right)^{1/2} q^{\alpha-1} dq$$

$$(|\Delta_*| \leq 1, \sqrt{t\rho} \ll 1)$$

При выводе (3.7) из (3.6) привлекались асимптотика (2.5) и равенство (3.4). Главная часть приращения напряжения  $\tau_{r,\theta}$  за фронтом  $B''D$  есть  $-\psi_{,r_1}$ , приращения остальных напряжений на порядок  $\sqrt{\rho/t_*}$  слабее. Отметим, что на оси  $y=0$  потенциал  $\psi$  и его производные по  $x$  обращаются в нуль.

Формулы для описания поведения функций за фронтами волн, исходящих из точки  $x=-1$ ,  $y=0$ , получаются из формул (3.2)–(3.7) заменой

$x_1$  на  $x_2 = -x - 1$ . В работах [3, 4] прифронтные асимптотики не вычислялись.

Обсудим полученные результаты. Особенность в формулах для асимптотик (3.3), (3.5), (3.7) явно выделена. Видно, что показатель особенности зависит от  $\alpha$  — волны дифракционного типа несут информацию об особенности напряженно-деформированного квазистатического состояния в вершине трещины. Напряжения непрерывны на фронтах таких волн, и в классическом случае идеально хрупкого тела ( $\alpha = 1/2$ ) главные из них нарастают по линейному закону за дугами  $A'C$  и  $B'D$ . Если коэффициент интенсивности напряжений равен нулю (так подобрана нагрузка или существуют силы сцепления между берегами, делающие сход поверхностей трещины гладким), то  $\alpha = 3/2$  и по линейному закону растут производные от напряжений по  $r_1$ . При анализе формул, определяющих асимптотики в окрестностях точек присоединения, следует иметь в виду, что в этих областях функция  $\kappa = O(1)$ . Тщательная регистрация сигнала и его последующая расшифровка на основании формул (2.10) могут в принципе дать более полную информацию о функции  $v(x)$ , чем анализ ее локальных свойств, исходя из (3.2) — (3.7).

Выполним некоторые предельные переходы для напряжения  $\sigma(x, t)$ , определенного в (2.10). Поскольку: 1) функция  $p/sD(p/s, s)$  аналитична в точке  $s = \infty$ ; 2) функция  $g_{,i}$  ограничена; 3) существуют преобразования  $g_{,ii}$  и  $g_{,i}(t)$  при  $t \rightarrow +0$ , то в силу предельной теоремы [7] из (2.7) следует

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \Sigma(p, s) = \gamma b V(p) \Rightarrow \sigma(x, +0) = \gamma b v^o(x) H(1 - x^2)$$

Другими словами, напряжения в зоне трещины в начальный момент времени те же, что и за плоским фронтом  $EA$ . Оценим поведение функции  $\sigma(x, t)$  при  $t \rightarrow \infty$ , полагая  $\varepsilon \sim t^{-1}$ ,  $T = \varepsilon t \sim 1$ ,  $T_0 = \varepsilon t$  и записывая свертку из (2.10) в виде

$$\sigma = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v_{,x}(x_0)}{x - x_0} \int_0^{T_*} \frac{Q(c_0) g_{,x}(T_0)}{c_0^2 (1 - c_0^2)^{1/2}} dT_0 \quad (3.8)$$

$$T_* = T - \varepsilon \gamma |x - x_0|, \quad c_0 = (x - x_0)/(t - \tau)$$

Введем функцию  $\eta(t) > 0$ , такую, что  $\eta(t) \rightarrow 0$ ,  $t\eta(t) \sim \eta(t)/\varepsilon \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow \infty$ ).

Разобьем внутренний интеграл в (3.8) на сумму двух слагаемых

$$\int_0^{T_*} = \int_0^{T_* - \eta} + \int_{T_* - \eta}^{T_*} = J_1 + J_2$$

Интеграл  $J_2$  оценивается величиной  $O(\eta)$ , а под знаком интеграла  $J_1$  имеем  $|c_0| = O(\varepsilon/\eta)$ ,  $c_0^{-2}(1 - c_0^2)^{-1/2} Q(c_0) = 2(\gamma^2 - 1) + O(c_0^2)$ . В результате получим

$$\sigma \rightarrow \frac{2(1 - \gamma^2)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v_{,x}(x_0) dx_0}{x - x_0} g(t) \quad (3.9)$$

Множитель при  $g(t)$  в (3.9) суть точное решение статической задачи для полуплоскости, на границе которой заданы нормальное смещение и нулевое касательное напряжение. Тем самым на примере функции  $\sigma(x, t)$  показано, что в фиксированной точке наблюдения и при  $t \rightarrow \infty$  решение выходит на квазистатический режим. Можно выделить прифронтные асимптотики  $\sigma(x, t)$  и убедиться, что они согласуются с (3.3), (3.7).

Проследим этапы движения тела с разрезом под действием периодической нагрузки  $g = -\sin(\varepsilon t)$ . В течение периода  $T_0 = 2\pi/\varepsilon$  некоторое время тело находится в квазистатическом состоянии с раскрытой трещиной ( $t_0 < t < 0$  — целое число периодов вычтем). При  $t = 0$  берега сомкнутся, а к моменту времени раскрытия разреза  $t_1 = t_0 + T_0$  волны уйдут и в окрестности разреза восстановится прежнее квазистатическое состояние; далее процесс повторится. Раскрытие произойдет «плавно», без образования разрывов у напряжений, поскольку условие отрыва  $\sigma(x, t_1) = 0$ ,  $g_{,i}(t_1) \geq 0$

согласуется с краевыми условиями квазистатической задачи и нет необходимости в эти моменты времени прибегать к полному динамическому описанию процесса.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.
2. Флитман Л. М. Об одной краевой задаче для упругого полупространства.— Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1958, № 1, с. 105, 106.
3. Лобысев В. Л., Яковлев Ю. С. Поля напряжений при движении поршня с жестким фланцем на границе с идеально упругой средой.— Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 4, с. 65—69.
4. Флитман Л. М. Динамическая задача о штампе на упругой полуплоскости.— ПММ, 1959, т. 23, вып. 4, с. 697—705.
5. Слепян Л. И. Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 374 с.
6. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959. 470 с.
7. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 524 с.

Москва

Поступила в редакцию  
6.VI.1985