МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1986

УДК 539.3

К ДИНАМИКЕ УПРУГОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

ЖУРАВЛЕВ В. Ф.

В работе рассматривается пространственный вариант установленного ранее [1] эффекта инертности упругих волн в симметричных твердых телах. Предполагается, что упругое тело обладает сферической симметрией и под действием внешних сил вращается с произвольно меняющейся во времени и в пространстве угловой скоростью. Показано, что изменение пространственной картины упругих колебаний тела может быть описано следующим образом. Для каждой собственной формы колебаний существует такая система координат, в которой можно наблюдать стоячую волну, соответствующую данной форме. Получено уравнение Пуассона, определяющее положение этой системы координат относительно тела, показывающее, что компоненты угловой скорости упомянутой стоячей волны относительно тела в проекциях на связанные с ним оси пропорциональны компонентам угловой скорости тела относительно пространства в проекциях на оси тела. Этот результат был получен исходя из принципа Даламбера – Лагранжа, записанного для упругого твердого тела. Обобщенные координаты Лагранжа были выбраны при помощи введения в конфигурационном пространстве задачи базиса из полной ортонормированной системы собственных функций соответствующей задачи о свободных колебаниях невращающегося тела. Далее, уравнения, записанные в собственных трехмерных подпространствах, преобразовывались при помощи ортогональных, зависящих от времени преобразований к самосопряженной форме. Показано, что матрица, определяющая такое приведение, всегда существует и находится единственным образом. Рассмотрен пример тонкой сферической оболочки, для которой приведены числовые данные.

1. Явление прецессии стоячих волн в тонком упругом кольце, вращающемся с постоянной угловой скоростью ω, впервые обсуждалось в [2], где было показано, что система координат, в которой может наблюдаться стоячая волна упругих колебаний, вращается с постоянной угловой скоростью Ω относительно абсолютного пространства (k — номер формы колебаний):

$$\Omega=(k^2-1)\omega/(k^2+1) \tag{1.1}$$

В [3] были опубликованы результаты эксперимента с тонкой полусферической оболочкой. В первоначально неподвижной оболочке возбуждалась стоячая волна упругих колебаний, соответствующая основной форме с четырьмя узлами на окружности. Затем оболочка вокруг оси симметрии поворачивалась на угол 90° и останавливалась. Было отмечено, что стоячая волна также поворачивалась, не изменяя своей формы (как твердое тело), и останавливалась. При этом угол поворота волны относительно неподвижного основания составлял ~63°. В качестве теоретического объяснения наблюдаемого эффекта автор [3] ссылается на результат из [2].

Однако описанные два эффекта имеют слабое отношение друг к другу. В теоретической модели [2] кольцо вращается с постоянной угловой скоростью и прецессия волны (1.1) описывается в рамках спектральной теории линейных систем с постоянными коэффициентами. В [3] скорость вращения оболочки существенно переменна и наблюдаемый эффект представляет собой качественно новый факт в свойствах упругих колебаний симметричных тел, который объяснить ссылкой на [2] принципиально невозможно.

Первое теоретическое объяснение и описание этого эксперимента дано в [1]. В частности, было показано, что результат [2] допускает широкое обобщение: формула (1.1) является точной в рамках рассматриваемой модели не только для постоянной угловой скорости ω, но и для угловой скорости, зависящей произвольным образом от времени

$$\Omega(t)=(k^2-1)\,\omega(t)/(k^2+1) \tag{1.2}$$

Если обе части этого соотношения проинтегрировать, то получается аналогичное соотношение для углов поворота тела и волны, что и дает объяснение эксперимента [3]. В [4] этот же факт был теоретически установлен для тонкой полусферической оболочки.

Продифференцировав (2.1), получим, что угловое ускорение волны пропорционально угловому ускорению кольца. Момент сил, ускоряющих кольцо, вызывает и ускорение волны, что и позволяет говорить об инертных свойствах волн в симметричных упругих системах.

И в случае кольца, и в случае оболочки эффект инертности упругих волн имеет одномерный характер: угловая скорость $\omega(t)$ есть скаляр, характеризующий вращение упругого твердого тела вокруг неподвижной в пространстве оси. Ниже рассматривается обобщение этого эффекта на произвольный пространственный случай.

2. Рассмотрим упругое сферически симметричное твердое тело со свободной границей, на которое действуют массовые силы плотности $\mathbf{f}$. Главный вектор сил, действующих на тело $\int\limits_V \mathbf{f}\,dm$ без ограничения общности будем полагать равным нулю. Под действием главного момента $\int\limits_V \mathbf{r}\times\mathbf{f}\,dm$ тело меняет свою ориентацию в пространстве ($\mathbf{r}$ — радиус-вектор произвольной точки тела, dm — элемент массы, V — область, занятая телом).

Для описания упругих деформаций тела введем систему координат $x_1x_2x_3$, связанную с телом так, чтобы выполнялись условия

$$\int\limits_V \mathbf{x}\,dm=0,\qquad \int\limits_V \mathbf{r}\times\mathbf{x}\,dm=0 \tag{2.1}$$

где $\mathbf{x}=(x_1x_2x_3)$ — упругое смещение точки, в недеформированном состоянии занимавшей положение $\mathbf{r}$. Условия (2.1) характеризуют координатный трехгранник, относительно которого тело в среднем (по всем частицам) не перемещается и не поворачивается.

Ставится следующая задача: зная абсолютную угловую скорость трехгранника $x_1x_2x_3$ в проекциях на его же оси — $\boldsymbol{\omega}(t)$, определить, как ведут себя волны упругих деформаций.

3. Запишем принцип Даламбера — Лагранжа для рассматриваемого тела

$$\int\limits_V\left[\mathbf{x}^{\cdot\cdot}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{r}+\mathbf{x}))+\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\times(\mathbf{r}+\mathbf{x})+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{x}^{\cdot}+\frac{1}{\rho}\nabla\Pi-\mathbf{f}\right]^{\bullet}\delta\mathbf{x}\,dm=0 \tag{3.1}$$

Здесь ρ — плотность, зависящая лишь от $|\mathbf{r}|$, $\nabla\Pi$ — градиент квадратичного функционала линейной теории упругости.

Координаты, определяющие угловое положение тела как целого, не варьируются, предполагается, что угловая скорость $\boldsymbol{\omega}(t)$ — известная функция времени.

Для выбора обобщенных координат рассмотрим случай $\boldsymbol{\omega}=0$. В [5] показано, что спектр собственных колебаний свободного твердого тела при условиях (2.1) дискретен. Это означает, что возрастающая последовательность частот собственных колебаний $\nu_1\leqslant\nu_2\leqslant\ldots$ неограничена, а собственные элементы $\mathbf{h}_1(\mathbf{r})$, $\mathbf{h}_2(\mathbf{r}),\ldots$, соответствующие этим частотам, образуют ортонормированную систему функций, полную в конфигурационном пространстве задачи:

$$\int\limits_V \mathbf{h}_n(\mathbf{r})\,\mathbf{h}_l(\mathbf{r})\,dm=\delta_n{}^l \tag{3.2}$$

Это позволяет ввести независимые лагранжевы координаты, описывающие все степени свободы при деформировании тела, в общем случае $\omega(t)\neq 0$ следующим образом:

$$\mathbf{x}=\sum_{n=1}^{\infty} q_n \mathbf{h}_n(\mathbf{r}) \tag{3.3}$$

Задача о собственных колебаниях сферически симметричного свободного тела допускает группу SO(3), поэтому спектр собственных частот вырожден и состоит из последовательности, по крайней мере, трехкратных частот: $\nu_1=\nu_2=\nu_3\leqslant\nu_4=\nu_5=\nu_6\leqslant\ldots$. Конфигурационное пространство при этом представляет собой прямое произведение трехмерных собственных подпространств: $\{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3\}\times\{\mathbf{h}_4, \mathbf{h}_5, \mathbf{h}_6\}\times\ldots$. Фиксируем номер m произвольного собственного подпространства и введем обозначения для соответствующих обобщенных координат: $q_{3m-2}=u$, $q_{3m-1}=v$, $q_{3m}=w$ ($m=1, 2, \ldots$). Подставляя (3.3), а также $\delta\mathbf{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\delta q_n\mathbf{h}_n(\mathbf{r})$ в (3.1) и приравнивая нулю коэффициенты при независимых вариациях δq_n, получаем бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно q_n:

$$\begin{gathered}
u^{\cdot\cdot}+au+bv+cw-v(\omega^{\cdot}, \varkappa_3)+w(\omega^{\cdot}, \varkappa_2)-2v^{\cdot}(\omega, \varkappa_3)+2w^{\cdot}(\omega, \varkappa_2)+F_1+L_1=0\\
v^{\cdot\cdot}+bu+dv+ew+u(\omega^{\cdot}, \varkappa_3)-w(\omega^{\cdot}, \varkappa_1)+2u^{\cdot}(\omega, \varkappa_3)-2w^{\cdot}(\omega, \varkappa_1)+F_2+L_2=0\\
w^{\cdot\cdot}+cu+ev+fw-u(\omega^{\cdot}, \varkappa_2)+v(\omega^{\cdot}, \varkappa_1)-2u^{\cdot}(\omega, \varkappa_2)+2v^{\cdot}(\omega, \varkappa_1)+F_3+L_3=0
\end{gathered} \tag{3.4}$$

где L_1, L_2, L_3 представляют собой линейные функции обобщенных координат, соответствующих другим собственным подпространствам, а скалярные коэффициенты имеют вид

$$a=\int_V(\mathbf{h}_{3m-2}, \omega)^2dm-\omega^2, \qquad b=\int_V(\mathbf{h}_{3m-2}, \omega)(\mathbf{h}_{3m-1}, \omega)\,dm,$$

$$c=\int_V(\mathbf{h}_{3m-2}, \omega)(\mathbf{h}_{3m}, \omega)\,dm$$

$$d=\int_V(\mathbf{h}_{3m-1}, \omega)^2\,dm-\omega^2, \qquad e=\int_V(\mathbf{h}_{3m-1}, \omega)(\mathbf{h}_{3m}, \omega)\,dm,$$

$$f=\int_V(\mathbf{h}_{3m}, \omega)^2\,dm-\omega^2$$

$$F_1=\int_V(\nabla\Pi, \mathbf{h}_{3m-2})\,dV, \qquad F_2=\int_V(\nabla\Pi, \mathbf{h}_{3m-1})\,dV, \qquad F_3=\int_V(\nabla\Pi, \mathbf{h}_{3m})\,dV$$

Присутствие L_1, L_2, L_3 характеризует тот факт, что системы типа (3.4) для различных подпространств не являются независимыми друг от друга.

При получении уравнений (3.4) было предположено для простоты, что массовые силы ортогональны всем собственным функциям: $\int_V \mathbf{f}\cdot\mathbf{h}_n(r)\,dm=0$. Это означает, что в $\mathbf{f}$ присутствует лишь постоянная составляющая $\left(\int_V \mathbf{r}\times\mathbf{f}\,dm\neq 0\right)$, обеспечивающая вращение тела со скоростью $\omega(t)$.

Векторные коэффициенты имеют вид

$$\varkappa_1=\int_V \mathbf{h}_{3m-1}\times\mathbf{h}_{3m}\,dm, \qquad \varkappa_2=\int_V \mathbf{h}_{3m}\times\mathbf{h}_{3m-2}\,dm, \qquad \varkappa_3=\int_V \mathbf{h}_{3m-2}\times\mathbf{h}_{3m-1}\,dm$$

В силу сферической симметрии выбор собственных векторов ($\mathbf{h}_{3m-2}$, $\mathbf{h}_{3m-1}$, $\mathbf{h}_{3m}$) можно осуществить так, чтобы

$$\varkappa_1=\varkappa\cdot(1, 0, 0), \quad \varkappa_2=\varkappa\cdot(0, 1, 0), \quad \varkappa_3=\varkappa\cdot(0, 0, 1)$$

$$\varkappa=\pm|\varkappa_1|=\pm|\varkappa_2|=\pm|\varkappa_3|=\pm\left|\int\limits_V \mathbf{h}_{3m-1}\times\mathbf{h}_{3m}\,dm\right| \qquad (3.5)$$

Используя неравенство Коши-Буняковского для (3.5), получим $0\leqslant|\varkappa|\leqslant 1$.

Если ввести обозначения

$$\mathbf{z}=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\omega}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix},\quad \mathbf{L}=\begin{pmatrix}L_1\\L_2\\L_3\end{pmatrix},\quad G=\begin{pmatrix}0&-r&q\\r&0&-p\\-q&p&0\end{pmatrix}$$

то уравнения (3.4) можно переписать в векторной форме

$$\mathbf{z}^{\cdot\cdot}+A\mathbf{z}+\varkappa G^{\cdot}\mathbf{z}+2\varkappa G\mathbf{z}^{\cdot}+\mathbf{L}=0 \qquad (3.6)$$

где A — симметрическая матрица позиционных сил, состоящая из коэффициентов упругих сил F_1, F_2, F_3 и коэффициентов a, b, c, d, e, f.

4. Уравнение (3.6) определяет эволюцию m-й формы колебаний свободного твердого тела, вызванную наличием вращения. Эта эволюция определяется двумя обстоятельствами. Во-первых, сама форма колебаний непосредственно реагирует на вращение тела, что определяется наличием в уравнении (3.6) членов с G и $G^{\cdot}$. Во-вторых, рассматриваемая форма подвергается воздействию со стороны других форм. Сразу заметим, что это воздействие является незначительным, поскольку, к примеру, при решении уравнений (3.6) методом осреднения все члены, определяемые $\mathbf{L}$, в первом приближении исчезают.

Имеет место следующий факт. Существует такая система координат $\mathbf{z}\to\mathbf{y}$: $\mathbf{z}=M\mathbf{y}$, где M — зависящая от времени ортогональная матрица преобразования координат, в которой уравнение (3.6) при $\mathbf{L}=0$ имеет самосопряженную форму. В этой системе координат уравнение (3.6) допускает решение типа стоячей волны.

Покажем это. Подставляя $\mathbf{z}=M\mathbf{y}$ в (3.6), найдем

$$\mathbf{y}^{\cdot\cdot}+2M'(M^{\cdot}+\varkappa GM)\mathbf{y}^{\cdot}+M'(M^{\cdot\cdot}+2\varkappa GM^{\cdot}+\varkappa G^{\cdot}M+AM)\mathbf{y}=0 \qquad (4.1)$$

Потребуем

$$M^{\cdot}=-\varkappa GM \qquad (4.2)$$

Получим $M^{\cdot\cdot}=-\varkappa G^{\cdot}M+\varkappa^2G^2M$ и, подставляя в (4.1), найдем $\mathbf{y}^{\cdot\cdot}+$ $+M'(A-\varkappa^2G^2)M\mathbf{y}=0$.

Таким образом, если в неподвижном теле возбудить стоячую волну колебаний с каким-нибудь чистым тоном и после этого привести тело во вращение с произвольной угловой скоростью, то стоячая волна будет поворачиваться относительно тела по закону (4.2). Уравнение (4.2) есть уравнение Пуассона. Сравним его с уравнением Пуассона для самого твердого тела $N^{\cdot}=-GN$, в котором ортогональная матрица N определяет положение твердого тела в инерциальном пространстве. Отсюда видно, что угловая скорость стоячей волны относительно тела пропорциональна угловой скорости тела относительно пространства: $\boldsymbol{\Omega}_0(t)=-\varkappa\boldsymbol{\omega}(t)$, или для скорости волны относительно пространства имеем

$$\boldsymbol{\Omega}(t)=(1-\varkappa)\boldsymbol{\omega}(t) \qquad (4.3)$$

Соотношение (4.3) и представляет собой обобщение скалярного соотношения типа (1.2) на пространственный случай.

5. Вычисление коэффициента $\varkappa$ осуществляется при конкретных предположениях относительно распределения плотности по радиусу $\rho(\mathbf{r})$. Ниже рассматривается случай тонкой сферической оболочки. В проекциях на традиционно принимаемые в теории оболочек оси u, v, w, направленные соответственно по меридиану, параллели и нормали к поверхности, собственные векторы имеют вид [6]:

$$\mathbf{U}_1=\begin{pmatrix}A_n dP_n^k/d\theta\cos k\varphi\\-A_nk\sin^{-1}\theta P_n^k\sin k\varphi\\P_n^k\cos k\varphi\end{pmatrix},\quad \mathbf{U}_2=\begin{pmatrix}A_n dP_n^k/d\theta\sin k\varphi\\A_nk\sin^{-1}\theta P_n^k\cos k\varphi\\P_n^k\sin k\varphi\end{pmatrix} \qquad (5.1)$$

где P_n^k — присоединенные функции Лежандра, φ, θ — сферические координаты, A_n — коэффициент, зависящий от числа волн по меридиану и от частоты колебаний ν. Для A_n и ν в приближении Лэмба имеем соотношения (μ — коэффициент Пуассона):

$$A_n=[-2(1+\mu)+(1-\mu)\nu^2/2][(1+\mu)n(n+1)]^{-1} \tag{5.2}$$

$$(1-\mu)\nu^4-2\nu^2(1+3\mu+n(n+1))+4(1+\mu)(n^2+n-2)=0$$

Векторы (5.1) представляют собой два собственных вектора из трех, определяющих трехмерное собственное подпространство (при фиксированных n и k). Третий может быть получен из выписанных посредством преобразования осей, однако для вычисления коэффициента $\varkappa$ в этом уже нет необходимости.

Переход от переменных u, v, w к принятым в настоящей работе переменным x_1, x_2, x_3 выражается формулой

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\sin\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

откуда

$$\mathbf{h}_1=\frac{1}{\|\mathbf{U}_1\|}\begin{Bmatrix} A_n\dfrac{dP_n^k}{d\theta}\cos k\varphi\cos\theta\cos\varphi-\dfrac{A_nk}{\sin\theta}P_n^k\cos k\varphi\cos\theta\sin\varphi+P_n^k\cos k\varphi\sin\theta \\ -A_n\dfrac{dP_n^k}{d\theta}\cos k\varphi\sin\varphi-A_n\dfrac{k}{\sin\theta}P_n^k\sin k\varphi\cos\varphi \\ -A_n\dfrac{dP_n^k}{d\theta}\cos k\varphi\sin\theta\cos\varphi+\dfrac{A_nk}{\sin\theta}P_n^k\sin k\varphi\sin\theta\sin\varphi+ \\ +P_n^k\cos k\varphi\cos\theta \end{Bmatrix}$$

Аналогичное выражение можно получить и для второго собственного вектора $\mathbf{h}_2$, после чего вычисляем

$$\varkappa=\left|\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathbf{h}_1\times\mathbf{h}_2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\right|=$$

$$=\frac{2\pi kA_n}{\|\mathbf{U}_1\|^2}\left|\left\{\int_0^{\pi}\frac{dP_n^k}{d\theta}P_n^k\sin\theta\,d\theta,\ 0,\ \int_0^{\pi}\frac{dP_n^k}{d\theta}P_n^k\cos\theta\,d\theta\right\}\right|$$

Интеграл, определяющий первую компоненту написанного вектора, равен нулю. Для второго интеграла получим

$$\int_0^{\pi}\frac{dP_n^k}{d\theta}P_n^k\cos\theta\,d\theta=-\frac{(n+k)!}{(2n+1)[(n-k)!]}$$

Учитывая, что норма $\mathbf{U}_1$ имеет вид

$$\|\mathbf{U}_1\|^2=\frac{2\pi}{2n+1}[1+n(n+1)A_n^2]\frac{(n+k)!}{(n-k)!}\qquad(k\neq 0)$$

окончательно находим $\varkappa=kA_n^2[1+n(n+1)A_n^2]^{-1}$.

Рассмотрим в качестве примера случай, когда $k=n=2$, $\mu=0$. По формулам (5.2), имеем $\nu^2=7+\sqrt{33}$, $A_n=(7+\sqrt{33})/12-1/3$, откуда $\varkappa\simeq 0{,}25$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Волновой твердотельный гироскоп., М.: Наука, 1985. 126 с.
2. *Bryan G. H.* On the beats in the vibrations of a revolving cylinder or bell.— Proc. Cambridge Philos. Soc. Math. Phys. Sci., 1890, v. 7, p. 101—111.
3. *Scott W. B.* Delco makes low-cost gyro prototype.— Aviat. Week, 1982, v. 117, p. 64—72.
4. *Журавлев В. Ф., Попов Л. Л.* О прецессии собственной формы колебаний сферической оболочки при ее вращении.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 5, с. 17—23.
5. *Weil H.* Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenschwingungen eines beliebig gestalteten elastischen Körpors. Rend. Arcolo mat. Palermo, 1915. 39 p.
6. *Чернина В. С.* Свободные колебания тонкой замкнутой сферической оболочки.— В кн.: Теория оболочек и пластин. М.: Наука, 1973.

Москва

Поступила в редакцию
4.II.1986