МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1986

УДК 539.3

СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ НА УПРУГИЙ НЕСЖИМАЕМЫЙ КЛИН

ЕФИМОВ А. Б., ЕФИМОВ Д. Г.

Задачи о сосредоточенных воздействиях в теории упругости имеют значение не только потому, что их решения используются в интегральных представлениях решений более общих задач, но и вследствие того, что они определяют тип особенностей в случаях нерегулярных границ или нагрузок. За редким исключением, решения эти строятся в рядах для некоторых специальных областей. Задача для пространственного упругого клина исследована в [1–5]. В [2] рассматривается четверть пространства при жесткой заделке одной грани и заданных нормальных и касательных нагрузках на другой. Задача сведена к интегральному уравнению, которое исследовано асимптотически и численно. В [3] рассмотрен случай, когда одна грань свободна, а другая – нагружена нормальной нагрузкой. При этом задача для нормальной сосредоточенной силы сведена к системе двух интегральных уравнений второго рода относительно нормальных перемещений к соответствующим граням. В [4] пространственная задача для четверти пространства исследована численно, а в [5] предложен довольно общий подход к исследованию некоторых классов пространственных задач теории упругости, позволяющий свести многие из них к интегральным уравнениям. В частности, для четверти пространства с помощью преобразования Фурье задача о нормально действующей нагрузке сводится к двум интегральным уравнениям.

В публикуемой статье метод интегрального преобразования Канторовича – Лебедева распространяется на случай упругого несжимаемого клина с прямым двугранным углом (упругую четверть пространства). Затем предельным переходом решается задача о сосредоточенной нагрузке на ребре упругого клина, причем удается распространить решение на случай любой величины двугранного угла.

1. Действие сосредоточенной нормальной силы на грань упругой несжимаемой четверти пространства. Рассмотрим упругую несжимаемую четверть пространства. Введем наряду с декартовыми координатами (x, y, z) систему цилиндрических координат (r, θ, z), направив ось z по ребру и совместив грани четверти пространства с плоскостями $\theta=0$ (плоскость xz), $\theta=\pi/2$ (плоскость yz), при этом $0\leqslant r<+\infty$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$, $-\infty<z<+\infty$. Пусть на грани $\theta=0$ в произвольной точке $r=a$, $\theta=0$, $z=0$ действует нормально к поверхности сосредоточенная сила P.

Воспользуемся выражениями для перемещений u, v, w в направлении осей цилиндрических координат r, θ, z через гармонические функции Папковича – Нейбера [1, 7]:

$$2Gu=-\partial F/\partial r+4(1-\nu)(\Phi_1\cos\theta+\Phi_2\sin\theta)$$

$$2Gv=-r^{-1}\partial F/\partial\theta+4(1-\nu)(\Phi_2\cos\theta-\Phi_1\sin\theta)$$

$$2Gw=-\partial F/\partial z+4(1-\nu)\Phi_3 \tag{1.1}$$

$$F=\Phi_0+x\Phi_1+y\Phi_2+z\Phi_3,\quad \Delta\Phi_i=0\quad (i=0,1,2,3)$$

где G – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона (в данном случае $\nu={}^1/_2$), Φ_i $(i=0, 1, 2, 3)$ – гармонические функции, одна из которых может быть выбрана произвольно.

Таким образом, задача сводится к нахождению трех гармонических функций при граничных условиях $\theta=0$: $\sigma_{\theta\theta}=P\delta(r-a)\delta(z)$, $\sigma_{r\theta}=\sigma_{\theta z}=0$; $\theta=\pi/2$: $\sigma_{\theta\theta}=\sigma_{r\theta}=\sigma_{\theta z}=0$, когда $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{\theta z}$ выражаются через функции Φ_i координат r, θ, z.

Кроме граничных условий непосредственно на гранях клина, гармонические функции Φ_i должны определенным образом вести себя на бесконечности (при $R=\sqrt{r^2+z^2}\to\infty$). Будем, как обычно, считать, что упругие перемещения при $R\to\infty$ должны иметь порядок $1/R$, а напряжения — порядок $1/R^2$. Можно видеть, что эти условия будут выполнены, если потребовать, чтобы функции $|\mathrm{grad}\,\Phi_0|$, Φ_1, Φ_2, Φ_3 на бесконечности были бы порядка $1/R$, а их производные по x, y и z — порядка $1/R^2$. Так как одна из четырех гармонических функций Φ_i ($i=0$, 1, 2, 3) может быть выбрана произвольно, то в данной задаче удобно положить $\Phi_3=0$.

Из граничных условий получаем $\Phi_0=0$, а оставшиеся приводят к следующей смешанной краевой задаче для функций Φ_1 и Φ_2:

$$\Delta\Phi_1=0,\quad \Delta\Phi_2=0$$

$$\theta=0: -\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta}=P\delta(r-a)\delta(z),\qquad \frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta}=0$$

$$\theta=\frac{\pi}{2}: -\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\theta^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta}=0,\qquad \frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta}=0 \tag{1.2}$$

Если, следуя [1], представить Φ_1 и Φ_2 в виде двойных интегральных разложений

$$\Phi_{1,2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}[A_{1,2}(\sigma,\tau)e^{\theta\tau}+B_{1,2}(\sigma,\tau)e^{-\theta\tau}]e^{-i\sigma z}K_{i\tau}(|\sigma|r)\,d\sigma\,d\tau \tag{1.3}$$

то для четырех неизвестных функций A_1, A_2, B_1, B_2 после применения к правым частям (1.2) формул Фурье и Канторовича — Лебедева получим следующую систему четырех линейных алгебраических уравнений:

$$-\tau^2A_1-\tau^2B_1+\tau A_2-\tau B_2=\frac{2\tau\,\mathrm{sh}\,\pi\tau}{\pi^2\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}rP\delta(r-a)\delta(z)e^{i\sigma z}K_{i\tau}(|\sigma|r)r^{-1}\,dr\,dz=$$

$$=2\tau\,\mathrm{sh}\,\pi\tau(\pi^2\sqrt{2\pi})^{-1}PK_{i\tau}(|\sigma|a),$$

$$\tau A_1-\tau B_1=0, \tag{1.4}$$

$$-\tau^2A_2e^{\pi\tau/2}-\tau^2B_2e^{-\pi\tau/2}-\tau A_1e^{\pi\tau/2}+\tau B_1e^{-\pi\tau/2}=0,$$

$$\tau A_2e^{\pi\tau/2}-\tau B_2e^{-\pi\tau/2}=0$$

Решив систему уравнений (1.4), получаем

$$A_1=B_1=4\tau\,\mathrm{sh}\,\pi\tau PQ,\quad A_2=2\,\mathrm{sh}\,\pi\tau(e^{-\pi\tau}-1)PQ \tag{1.5}$$

$$B_2=2\,\mathrm{sh}\,\tau\pi(1-e^{\pi\tau})PQ,\quad Q=K_{i\tau}(|\sigma|a)/(\pi^2\sqrt{2\pi}(e^{\pi\tau}+e^{-\pi\tau}-4\tau^2-2))$$

Подставляя выражения для A_1, A_2, B_1, B_2 из (1.5) в (1.3) и воспользовавшись интегральным представлением для произведения двух функций Макдональда, получаем искомые функции Φ_1 и Φ_2 в виде двойных интегралов:

$$\Phi_1=(2P/\pi^2)\int_0^\infty\int_0^\infty(e^{\theta\tau}+e^{-\theta\tau})\tau\,\mathrm{sh}\,\pi\tau\cos\tau sQ\,ds\,d\tau \tag{1.6}$$

$$\Phi_2=(P/\pi^2)\int_0^\infty\int_0^\infty[(e^{-\pi\tau}-1)e^{\theta\tau}+(1-e^{\pi\tau})e^{-\theta\tau}]\mathrm{sh}\,\pi\tau\cos\tau sQ\,ds\,d\tau$$

$$Q=[(e^{\pi\tau}+e^{-\pi\tau}-4\tau^2-2)\sqrt{r^2+a^2+z^2+2ar\,\mathrm{ch}\,s}]^{-1}$$

Устремим точку приложения сосредоточенной силы к ребру ($a\to0$). Получим задачу о действии сосредоточенной нормальной силы на ребро упругой несжимаемой четверти пространства. При $a\to0$ формально (не обосновывая допустимости предельного перехода) получаем формулы

(1.6), в которых величина Q определяется равенством

$$Q=[(e^{\pi\tau}+e^{-\pi\tau}-4\tau^2-2)\sqrt{r^2+z^2}]^{-1} \tag{1.7}$$

Соответствующие интегралы можно вычислить с помощью аппарата обобщенных функций. Для более общего случая непосредственной проверкой ниже будет показано, что полученные выражения дают решение, удовлетворяющее уравнениям равновесия и граничным условиям.

Интегралы в (1.6), где Q имеет вид (1.7), берутся последовательно. Взяв сначала интеграл по s и воспользовавшись выражением

$$\int\limits_0^\infty \cos\tau s\, ds=(^1/_2)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{is\tau}\, ds=\pi\delta(\tau)$$

окончательно получим

$$\begin{gathered}\Phi_1=K_1/\sqrt{r^2+z^2}, \quad \Phi_2=K_2/\sqrt{r^2+z^2}\\ K_1=2P/(\pi^2-4), \quad K_2=P\pi/(4-\pi^2)\end{gathered} \tag{1.8}$$

Подставляя (1.8) в (1.1), получаем решение задачи о действии нормальной сосредоточенной силы на ребро упругой несжимаемой четверти пространства.

2. Действие сосредоточенной силы, нормальной к ребру упругого несжимаемого клина с произвольным двугранным углом. Пусть дан трехмерный упругий несжимаемый клин с двугранным углом α. Как и ранее, наряду с декартовой системой координат введем цилиндрическую систему (r, θ, z), направив ось z по ребру и совместив грань клина с плоскостью $\theta=0$ (плоскость xz). При этом $0\leqslant r<+\infty$, $0\leqslant\theta\leqslant\alpha$, $-\infty<z<+\infty$. В точке $r=0$, $z=0$ на ребро клина действует сосредоточенная сила P, перпендикулярная к ребру. Проекция силы P на оси x и y обозначим соответственно P_x и P_y. Воспользуемся выражениями (1.1) для перемещений u, v, w через гармонические функции Папковича — Нейбера и искомые гармонические функции Φ_i будем по аналогии с (1.8) искать в виде $\Phi_0=\Phi_3=0$, $\Phi_1=C_1/\sqrt{r^2+z^2}$, $\Phi_2=C_2/\sqrt{r^2+z^2}$, где C_1, C_2 — неизвестные константы.

Покажем, что неизвестные константы C_1 и C_2 можно подобрать так, чтобы удовлетворить граничным условиям. Граница клина состоит из двух граней и ребра. Поэтому для удовлетворения граничным условиям необходимо потребовать, чтобы: на гранях клина $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{\theta r}$ и $\sigma_{\theta z}$ равнялись нулю, а интеграл от проекции напряжения по площадке ds на ось действия сосредоточенной силы, взятый по окружающей ребро клина цилиндрической поверхности некоторого радиуса ρ, равнялся величине приложенной сосредоточенной нагрузки.

Таким образом, необходимо удовлетворить следующим двум уравнениям:

$$\rho\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^\alpha \sigma_{rr}|_{r=\rho}\sin\theta\, dz\, d\theta=P_y, \qquad \rho\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^\alpha \sigma_{rr}|_{r=\rho}\cos\theta\, dz\, d\theta=P_x \tag{2.1}$$

Выражения напряжений через перемещения, необходимые для проверки граничных условий, в цилиндрических координатах имеют известный вид (см., например, [6]). Выразив напряжения через неизвестные функции Φ_1 и Φ_2, получаем $\sigma_{\theta r}=\sigma_{\theta z}=0$.

Из граничного условия $\sigma_{\theta\theta}=0$ получаем величину гидростатического давления $H=\cos\theta\partial\Phi_1/\partial r+\sin\theta\partial\Phi_2/\partial r$.

Из (2.1) получаем следующую систему алгебраических уравнений для нахождения неизвестных констант C_1 и C_2:

$$\begin{gathered}-2C_1\sin^2\alpha-2C_2(\alpha-\sin 2\alpha/2)=P_y\\ -2C_1(\sin 2\alpha/2+\alpha)-2C_2\sin^2\alpha=P_x\end{gathered}$$

Отсюда будем иметь

$$C_1=[P_x(2\alpha-\sin 2\alpha)-2P_y\sin^2\alpha]/D$$

$$C_2=[P_y(\sin 2\alpha+2\alpha)-2P_x \sin^2 \alpha]/D$$

$$D=4 \sin^4 \alpha+\sin^2 2\alpha-4\alpha^2 \qquad (2.2)$$

Окончательно получаем решение поставленной задачи (C_1 и C_2 даются формулами (2.2)):

$$2Gu=\Phi_1 \cos \theta+\Phi_2 \sin \theta-r \cos \theta\partial\Phi_1/\partial r-r \sin \theta\partial\Phi_2/\partial r$$

$$2Gv=\Phi_2 \cos \theta-\Phi_1 \sin \theta \qquad (2.3)$$

$$2Gw=-r \cos \theta\partial\Phi_1/\partial z-r \sin \theta\partial\Phi_2/\partial z$$

$$H=\cos \theta\partial\Phi_1/\partial r+\sin \theta\partial\Phi_2/\partial r$$

$$\Phi_1=C_1/\sqrt{r^2+z^2}, \quad \Phi_2=C_2/\sqrt{r^2+z^2}$$

Замечания 1. В случае $\alpha=\pi/2$, $P_y=P$ полученное решение совпадает с результатами п. 1, а в случае $\alpha=\pi$, $P_y=P$ — с решением задачи Буссинеска (при $\nu=1/2$) о сосредоточенной силе, нормальной к границе полупространства.

2. Предположение о несжимаемости материала представляется существенным. При $\nu\neq1/2$ не удается получить решение (1.6) в виде двойных интегралов и простое решение (2.3) для силы, приложенной к ребру клина.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1968. 401 с.
2. *Копасенко В. В., Лебедев В. К.* Смешанная задача теории упругости для четверти пространства.— Изв. Сев.-Кавк. науч. центра высш. шк., Естеств. науки, 1977, № 3, с. 30—31.
3. *Копасенко В. В., Краснобородько А. А., Лебедев В. К.* Решение задач теории упругости для четверти пространства.— В кн.: Тез. докл. Всесоюз. конф. по теории упругости. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1979, с. 189—190.
4. *Hetenyi M.* A general solution for the elastic quater space.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1970, v. 37, № 1, p. 70—76.
5. *Попов Г. Я.* Об одном способе решения краевых задач теории упругости.— В кн.: Тез. докл. 2-й Всесоюз. конф. по теории упругости. Тбилиси: Мецниереба, 1984, с. 232—234.
6. *Рекач В. Г.* Руководство к решению задач по теории упругости. М.: Высш. шк., 1966. 227 с.
7. *Уфлянд Я. С.* Некоторые пространственные задачи теории упругости для клина.— В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М.: Наука, 1972, с. 549—554.

Москва

Поступила в редакцию
14.X.1985