

УДК 539.3

АНТИПЛОСКАЯ ЗАДАЧА НЕОДНОРОДНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛОСЫ И ПОЛУПЛОСКОСТИ

ТВАРДОВСКИЙ В. В.

Публикуемая работа предлагает способ построения решений некоторых антиплоских задач неоднородной теории упругости. Искомые функции разлагаются в ряд по малому параметру отличным от изложенного в работах [1-3] образом. Это позволяет проанализировать большие отклонения величин неоднородностей от своих средних значений. Предложен метод решения первой и второй основных задач для полуплоскости и полосы. Описан прием построения решения смешанной задачи. В качестве иллюстрации рассматривается задача о распространении трещины в среде с периодически изменяющимся модулем.

1. Рассмотрим упругое полупространство в условиях продольного сдвига $\tau_{yz} \neq 0$, $\tau_{xz} \neq 0$. Закон Гука

$$\tau_{xz} = G \partial u_z / \partial x, \quad \tau_{yz} = G \partial u_z / \partial y \quad (1.1)$$

в случае зависимости модуля сдвига G среды от единственной координаты x при использовании очевидного тождества $\partial(\tau_{xz}/G)/\partial y = \partial(\tau_{yz}/G)/\partial x$ приводит к уравнению

$$\partial \tau_{xz} / \partial y = \partial \tau_{yz} / \partial x - \tau_{yz} G'(x) / G(x) \quad (1.2)$$

интегрирование которого в совокупности с уравнением равновесия

$$\partial \tau_{xz} / \partial x + \partial \tau_{yz} / \partial y = 0 \quad (1.3)$$

при заданных граничных усилиях дает искомое распределение напряжений в теле. При ненулевых средних напряжениях на бесконечности $\langle \tau_{xz} \rangle$, $\langle \tau_{yz} \rangle$ задача вычитанием «однородного» решения

$$\tau_{xz}^0 = \langle \tau_{xz} \rangle, \quad \tau_{yz}^0 = G(x) \langle \tau_{yz} \rangle / \langle G(x) \rangle \quad (1.4)$$

сводится к задаче с нулевыми средними напряжениями, которая далее рассматривается.

Представим отношение $G'(x)/G(x)$ в виде интеграла Фурье

$$\frac{G'(x)}{G(x)} = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} a(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda \quad (1.5)$$

и применим преобразование Фурье к уравнениям (1.2), (1.3) по координате x . Обозначая

$$\tau(\mu, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_{yz}(x, y) e^{i\mu x} dx \quad (1.6)$$

получаем, учитывая (1.5), интегриродифференциальное уравнение

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \tau(\mu, y)}{\partial y^2} - \mu \tau(\mu, y) = - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} a(\mu - \lambda) \tau(\lambda, y) d\lambda \quad (1.7)$$

и граничные условия

$$\tau(\mu, y)|_{y=0} = \tau(\mu), \quad \tau(\mu, y)|_{y \rightarrow \infty} = 0 \quad (1.8)$$

Решение ищем в виде ряда

$$\tau(\mu, y) = \tau_0(\mu, y) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k(\mu, y) \quad (1.9)$$

Функция $\tau_0(\mu, y) = \tau(\mu) \exp(-|\mu|y)$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \tau_0(\mu, y)}{\partial y^2} - \mu \tau_0(\mu, y) = 0$$

и граничным условиям (1.8), является решением соответствующей задачи для однородной среды и считается известной. Для функции $\tau_n(\mu, y)$, удовлетворяющей нулевым граничным условиям, получаем уравнение

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \tau_n(\mu, y)}{\partial y^2} - \mu \tau_n(\mu, y) = Q_n(\mu, y) \quad (1.10)$$

$$Q_n(\mu, y) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} a(\mu - \lambda) \tau_{n-1}(\lambda, y) d\lambda$$

Решение уравнения (1.10), затухающее на бесконечности, можно представить в виде

$$\tau_n(\mu, y) = D_n(\mu) e^{-|\mu|y} - \mu e^{|\mu|y} \int_y^{\infty} e^{-2|\mu|\xi} d\xi \int_0^{\xi} Q_n(\mu, t) e^{|\mu|t} dt \quad (1.11)$$

Функция

$$D_n(\mu) = \mu \int_0^{\infty} e^{-2|\mu|\xi} d\xi \int_0^{\xi} Q_n(\mu, t) e^{|\mu|t} dt$$

выбирается из условия равенства нулю функции τ_n на границе $y=0$.

Покажем, что $\tau_n \rightarrow 0$, $y \rightarrow \infty$ и оценим область применимости представления (1.9) - (1.11). Для этого введем функцию

$$\Phi(\mu, y, \beta) = (1-\beta)^{-1} \mu^{\beta-1} \{ \Gamma(1-\beta) (2^{\beta-1} - 1) e^{-\mu y} + e^{\mu y} [\Gamma(1-\beta, \mu y) - 2^{\beta-1} \Gamma(1-\beta, 2\mu y)] \}$$

гладкую и положительную при всех $\mu \geq 0$, $y \geq 0$, $0 < \beta < 1$. Здесь $\Gamma(a, x)$ - дополнительная гамма-функция. При $\mu \rightarrow 0$ для фиксированного y и при $y \rightarrow 0$ для фиксированного μ справедливо $\Phi(\mu, y, \beta) = 2\Gamma(1-\beta) (1-2^{\beta-1}) \mu^{\beta} y / (1-\beta) + O(\mu y^{2-\beta})$; при стремлении одного из аргументов к бесконечности, при не равном нулю другом:

$$\Phi(\mu, y, \beta) = (1-\beta)^{-1} \mu^{-1} y^{-\beta} + O(\mu^{-2} y^{-1-\beta}) \quad (1.12)$$

Введем также последовательность β_n ($\beta_{n+1} < \beta_n$), сходящуюся к числу β ($0 < \beta < \beta_0 < 1$). Предположим, что $|\tau_{n-1}| < C_{n-1} \Phi(\mu, y, \beta_{n-1})$ для всех μ, y . Тогда

$$|Q_n(\mu, y)| < C_{n-1} A_n y^{-\beta_n} \quad (1.13)$$

$$A_n = \max_{\mu, y} (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(|\mu - \lambda|, y, \beta_{n-1}) y^{\beta_n} |a(\lambda)| d\lambda$$

В силу свойств функции Φ последний интеграл есть ограниченная функция μ, y , если $a(\lambda) = O(|\lambda|^{-\varepsilon})$, для $|\lambda| \rightarrow \infty$, $\varepsilon > 0$. Подставляя оценку (1.13) в (1.11) и учитывая неравенство

$$\int_0^{\xi} t^{-\beta} e^{\mu t} dt \leq \frac{\xi^{-\beta}}{\mu(1-\beta)} (e^{\mu \xi} - 1)$$

справедливое для $\mu \geq 0$, $0 < \beta < 1$, получаем

$$\mu e^{\mu y} \int_y^{\infty} e^{-2|\mu|\xi} d\xi \int_0^{\xi} |Q_n(\mu, t)| e^{|\mu|t} dt \leq$$

$$\leq \frac{C_{n-1}A_n}{1-\beta_n} e^{\mu y} [\Gamma(1-\beta_n, \mu y) - 2^{\beta_n-1} \Gamma(1-\beta_n, 2\mu y)] \mu^{\beta_n-1}$$

откуда следует $|\tau_n| < C_{n-1}A_n \Phi(\mu, y, \beta_n)$. В силу непрерывной зависимости Φ от β можно получить условие на функцию $a(\lambda)$, выполнение которого гарантирует сходимость ряда (1.9) и справедливость (1.11):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n < 1$$

Далее показано, что для модуля сдвига $G(x)$, изменяющегося по закону

$$G(x) = \langle G \rangle I_0^{-1}(\kappa) \exp(\kappa \cos \lambda_0 x) \quad (1.14)$$

при приложении однородного поля нагрузок, ряд (1.9) сходится для любого $|\kappa| < \infty$.

Когда область является бесконечной полосой ($-h \leq y \leq h$), все уравнения остаются в силе, а (1.11) заменяется на

$$\tau_n(\mu, y) = D_n^1(\mu) e^{-\mu y} + D_n^2(\mu) e^{\mu y} + \mu e^{\mu y} \int_{-h}^h e^{-2\mu \xi} d\xi \int_h^{\xi} Q_n(\mu, t) e^{\mu t} dt$$

Функции $D_n^1(\mu)$ и $D_n^2(\mu)$ находятся из условий на границе: $\tau_n(\mu, \pm h) = 0$.

Рассмотрим вторую основную задачу для полуплоскости, когда на границе заданы значения перемещений $u_z(x, 0) = g(x)$. Перейдем к новой неизвестной функции

$$v(\mu, y) = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_{xz}(x, y) e^{i\mu x} dx \quad (1.15)$$

Используя (1.2), (1.3), (1.5), вновь получаем (1.7):

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 v(\mu, y)}{\partial y^2} - \mu v(\mu, y) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} a(\mu - \lambda) v(\lambda, y) d\lambda$$

и граничные условия

$$v(\mu, y)|_{y=0} = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x} e^{i\mu x} dx, \quad v(\mu, y)|_{y \rightarrow \infty} = 0$$

Таким образом, первая и вторая основные задачи для полуплоскости и полосы в математическом отношении эквивалентны.

2. Дадим оценку погрешности данного метода. Для этого рассмотрим упругое пространство, подверженное равномерному действию средних напряжений $\langle \tau_{yz} \rangle = \tau$ с модулем сдвига, изменяющимся по закону (1.14). Истинное распределение напряжений в таких условиях дается выражениями

$$\tau_{yz} = \tau I_0^{-1}(\kappa) \exp(\kappa \cos \lambda_0 x), \quad \tau_{xz} = 0 \quad (2.1)$$

Решение, согласно (1.9), ищем в виде ряда

$$\tau_{yz}(x, y) = \tau_0(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k(x, y) \quad (2.2)$$

где $\tau_0(x, y) = \tau$ — решение для однородной среды. Фурье-образ $\tau_0(x, y)$ представляется в виде

$$\tau_0(\mu, y) = \tau \sqrt{2\pi} \delta(\mu) \quad (2.3)$$

Для функции $a(\lambda)$ (1.5) получаем

$$a(\lambda) = \kappa \lambda_0 / \sqrt{\pi/2} (\delta(\lambda + \lambda_0) - \delta(\lambda - \lambda_0)) \quad (2.4)$$

Приняв во внимание (2.3), (2.4), получаем при помощи (1.10) фурье-образы функций $\tau_k(\mu, y)$; $k \geq 1$ (Вместо граничных условий используются

условия обращения в нуль средних значений $\tau_k(x, y)$ по периоду.):

$$\begin{aligned}
 Q_1(\mu, y) &= \tau \kappa \lambda_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\delta(\mu + \lambda_0) - \delta(\mu - \lambda_0)) \\
 \tau_1(\mu, y) &= -\mu^{-1} Q_1(\mu, y) \\
 Q_2(\mu, y) &= -\tau \sqrt{2\pi} \left(\frac{\kappa \lambda_0}{2} \right)^2 \left[\frac{\delta(\mu + 2\lambda_0)}{\mu + \lambda_0} + \frac{\delta(\mu - 2\lambda_0)}{\mu - \lambda_0} \right] \\
 \tau_2(\mu, y) &= -\mu^{-1} Q_2(\mu, y)
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

и так далее.

Применив обратное преобразование Фурье к функциям из (2.5), находим $\tau_1(x, y) = \tau \kappa \cos \lambda_0 x$, $\tau_2(x, y) = \tau \kappa^2 (2 \cos^2 \lambda_0 x - 1)/4$, $\tau_3(x, y) = -\tau \kappa^3 (\cos 3\lambda_0 x - 3 \cos \lambda_0 x)/24, \dots$

Сравнивая полученные выражения с (2.1), убеждаемся, что $\tau_n(x, y)$ есть n -й член разложения функции (2.1) в ряд по параметру κ и ряд этот сходится для всех $|\kappa| < \infty$. Оценим погрешность ε_n , связанную с n -м приближением для различных параметров κ . Определим

$$\varepsilon_n^2 = \left\langle \left(I_0^{-1}(\kappa) \exp(\kappa \cos \lambda_0 x) - \tau^{-1} \sum_{k=0}^n \tau_k(x, y) \right)^2 \right\rangle$$

Результаты для некоторых значений κ представлены ниже. Во второй строке расположено отношение максимального и минимального модуля G , соответствующее данному значению κ :

κ	0,1	0,2	0,8	1,0	1,2	1,6
G_{\max}/G_{\min}	1,22	1,49	4,96	7,4	11,05	24,6
ε_1	$1,767 \cdot 10^{-3}$	$7,063 \cdot 10^{-3}$	$1,109 \cdot 10^{-1}$	$1,714 \cdot 10^{-1}$	$2,431 \cdot 10^{-1}$	$4,159 \cdot 10^{-1}$
ε_2	$9,314 \cdot 10^{-5}$	$7,416 \cdot 10^{-4}$	$4,443 \cdot 10^{-2}$	$8,368 \cdot 10^{-2}$	$1,387 \cdot 10^{-1}$	$2,994 \cdot 10^{-1}$
ε_3	$2,945 \cdot 10^{-6}$	$4,743 \cdot 10^{-5}$	$1,189 \cdot 10^{-2}$	$2,867 \cdot 10^{-2}$	$5,847 \cdot 10^{-2}$	$1,771 \cdot 10^{-1}$

3. В п. 1 в наиболее общем виде рассмотрена первая и вторая основные задачи для неоднородного слоя и полуплоскости. В частности, показано ((1.9), (1.11)), что для полуплоскости решения для трансформанты напряжения $\tau_{yz}(x, y)$:

$$\tau(\mu, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_{yz}(x, y) e^{i\mu x} dx$$

и трансформанты «производной смещения» типа (1.15):

$$v(\mu, y) = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) \frac{\partial u_z(x, y)}{\partial x} e^{i\mu x} dx$$

могут быть представлены в виде рядов

$$\tau(\mu, y) = \tau_0(\mu, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(T_0(\mu) | \mu, y) \tag{3.1}$$

$$v(\mu, y) = v_0(\mu, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(W_0(\mu) | \mu, y)$$

где $\Phi_n(f | \mu, y)$ — известный линейный функционал от f , такой, что $\Phi_n(f | \mu, 0) = 0$, а

$$\tau_0(\mu, y) = T_0(\mu) \exp(-|\mu|y), \quad v_0(\mu, y) = W_0(\mu) \exp(-|\mu|y) \tag{3.2}$$

причем

$$T_0(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_{yz}(x, 0) e^{i\mu x} dx$$

$$W_0(\mu) = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) \frac{\partial u_z(x, 0)}{\partial x} e^{i\mu x} dx$$

Когда на границе области ($y=0$) заданы смешанные условия, формулы (3.2), (3.3) не будут являться решениями для однородной полуплоскости, поскольку сами функции $T_0(\mu)$, $W_0(\mu)$ зависят от характера неоднородности. Рассмотрим эту проблему, имея в виду ее важность для приложений. Обобщение на случай полосы не вызывает затруднений.

Пусть l_0 — часть границы тела ($y=0$), на которой задано усилие $f(x)$, а l_1 — часть границы, на которой известны смещения $g(x)$:

$$\tau_{yz}(x, 0) = f(x), \quad x \in l_0; \quad u_z(x, 0) = g(x), \quad x \in l_1 \quad (3.4)$$

Разложим функцию $T_0(\mu)$ в ряд по k :

$$T_0(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{\circ}(\mu) \quad (3.5)$$

при $k=0$ $T_0(\mu) = T_0^{\circ}(\mu)$ и, следовательно, $\tau^{\circ}(\mu, y) = T_0^{\circ}(\mu) \exp(-|\mu|y)$ есть решение данной краевой задачи со смешанными условиями для среды с постоянным модулем сдвига G . Полагаем, что это решение известно. Представим граничные условия (3.4) в виде

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T_n^{\circ}(\mu) e^{-i\mu x} d\mu = f(x), \quad x \in l_0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\mu x}}{\mu} \frac{\partial \tau_{yz}(\mu, 0)}{\partial y} d\mu = i \frac{\partial g(x)}{\partial x} G(x), \quad x \in l_1$$

Учитывая свойства функции $T_0^{\circ}(\mu)$, вместо первого условия получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T_k^{\circ}(\mu) e^{-i\mu x} d\mu = 0, \quad k \geq 1 \quad (3.6)$$

Второе условие

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ T_k^{\circ}(\mu) + \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n'(T_k^{\circ} | \mu, 0) \right\} \frac{|\mu|}{\mu} e^{-i\mu x} d\mu = iG(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x}$$

при $x \in l_1$ с учетом

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} T_0^{\circ}(\mu) \frac{|\mu|}{\mu} e^{-i\mu x} d\mu = iG(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x}$$

преобразуется к виду

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T_k^{\circ}(\mu) \frac{|\mu|}{\mu} e^{-i\mu x} d\mu = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\mu x}}{|\mu|} \sum_{n=1}^k \Phi_n'(T_{k-n}^{\circ} | \mu, 0) d\mu \quad (3.7)$$

Здесь и далее $\Phi_n'(f | \mu, 0) = \partial \Phi_n / \partial y |_{y=0}$.

Уравнения (3.6), (3.7) представляют собой парные интегральные уравнения на функции $T_k^{\circ}(\mu)$ при известных функциях $T_m^{\circ}(\mu)$ для $m < k$. Поскольку $T_0^{\circ}(\mu)$ известно, разрешая тем или иным методом систему (3.6) — (3.7), последовательно находим $T_1^{\circ}(\mu)$, $T_2^{\circ}(\mu)$ и т. д. Решение восстанавливается по формулам (3.5), (3.1). Проблема сводится, таким образом, к исследованию и решению системы (3.6) — (3.7), которая в случае связанного множества l_0 (или l_1) однозначно разрешима.

В качестве примера рассмотрим задачу о трещине в бесконечной

среде с модулем сдвига, изменяющимся по закону (1.14). Трещина лежит на отрезке $(-1, 1)$ оси Ox . На бесконечности приложены средние напряжения $\langle \tau_{yz} \rangle = \tau$. Эта задача в силу симметрии сводится к смешанной задаче для верхней полуплоскости со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} \tau_{yz}(x, 0) &= -\tau G(x) / \langle G \rangle, \quad |x| < 1 \\ u_z(x, 0) = \partial u_z(x, 0) / \partial x &= \tau_{xz}(x, 0) = 0, \quad |x| > 1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

После решения задачи с граничными условиями (3.8) к вычисленным напряжениям необходимо добавить однородное решение $\tau_{yz}^0(x, y) = -\tau G(x) / \langle G \rangle$, $\tau_{xz}^0(x, y) = 0$.

В силу четности $\tau_{yz}(x, y)$ по x и нечетности $\tau_{xz}(x, y)$ система (3.6) — (3.7) может быть записана в виде

$$\int_0^{\infty} T_k^0(\mu) \cos \mu x \, d\mu = 0, \quad |x| < 1 \quad (3.9)$$

$$\int_0^{\infty} T_k^0(\mu) \frac{\cos \mu x}{\mu} \, d\mu = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^k \Phi_n'(T_{k-n}^0 | \mu, 0) \frac{\cos \mu x}{\mu^2} \, d\mu, \quad |x| > 1$$

Осуществляя замену косинуса $\cos \mu x = \sqrt{\pi \mu x} / 2 J_{-\frac{1}{2}}(\mu x)$ функцией Бесселя полуцелого порядка и переходя к новой неизвестной функции $y_k(\mu) = (T_k^0(\mu) - g_k(\mu)) / \sqrt{\mu}$, получаем из (3.9) парные интегральные уравнения, подробно исследованные в [4]:

$$\int_0^{\infty} \mu y_k(\mu) J_{-\frac{1}{2}}(\mu x) \, d\mu = - \int_0^{\infty} \sqrt{\mu} g_k(\mu) J_{-\frac{1}{2}}(\mu x) \, d\mu, \quad |x| < 1$$

$$\int_0^{\infty} y_k(\mu) J_{-\frac{1}{2}}(\mu x) \, d\mu = 0, \quad |x| > 1 \quad (3.10)$$

Решения системы (3.10) определяются формулами [4]:

$$y_k(\mu) = \sqrt{\frac{2\mu}{\pi}} \left\{ J_0(\mu) \int_0^1 \sqrt{1-x^2} s_k(x) \, dx + \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx \int_0^1 s_k(tx) J_1(\mu t) \mu t^2 \, dt \right\} \quad (3.11)$$

$$s_k(x) = - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g_k(\mu) \cos \mu x \, d\mu, \quad g_k(\mu) = \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^k \Phi_n'(T_{k-n}^0 | \mu, 0)$$

которые дают решение поставленной задачи.

Вычислим коэффициент интенсивности напряжений K_{III} в кончике такой трещины. Для этого заметим, что при $\mu \rightarrow \infty$:

$$\int_0^{\infty} \tau_{yz}(x, 0) \cos \mu x \, dx = - \frac{K_{III}}{\sqrt{2\mu}} \sin \left(\mu - \frac{\pi}{4} \right) + O \left(\frac{1}{\mu} \right)$$

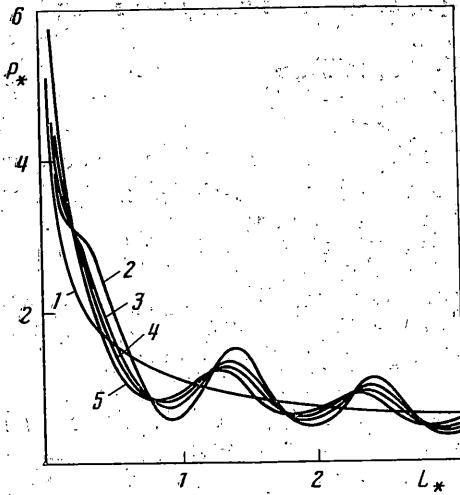
или

$$T_0(\mu) = -K_{III} / \sqrt{\pi \mu} \sin \left(\mu - \pi/4 \right) + O(1/\mu)$$

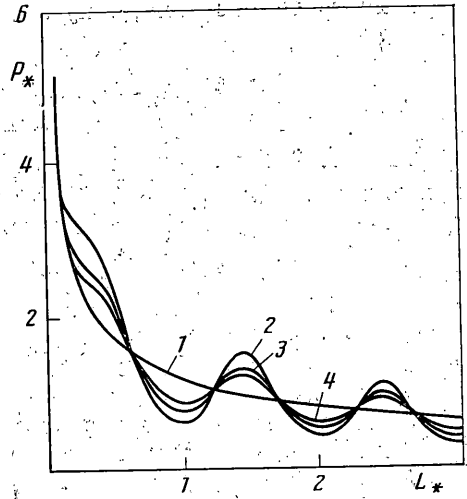
таким образом, оказывается возможным вычислить коэффициент интенсивности напряжений K_{III} по формуле

$$K_{III} = - \lim_{\mu \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi \mu} T_n^0(\mu)}{\sin \left(\mu - \pi/4 \right)} \quad (3.12)$$

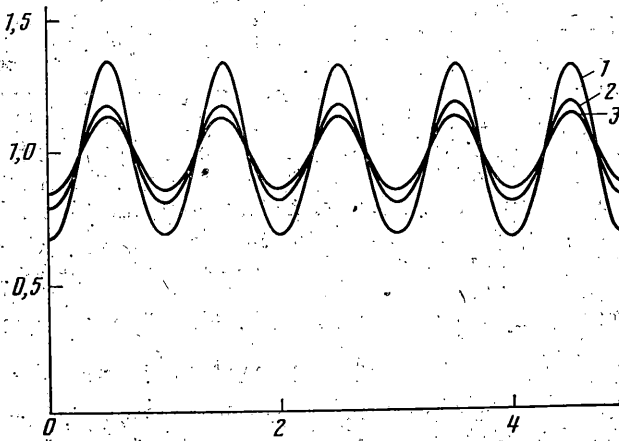
$$T_n^0(\mu) = g_n(\mu) + \sqrt{\mu} y_n(\mu)$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Анализ выражений для $\Phi_n'(T_0|\mu, 0)$ показывает, что $g_h(\mu) = O(\mu^{-1})$ при $\mu \rightarrow \infty$. Исследование выражения (3.11) выявляет зависимость $y_h(\mu)$ при $\mu \rightarrow \infty$:

$$y_h(\mu) = \frac{2}{\pi\mu} \sin\left(\mu - \frac{\pi}{4}\right) \int_0^1 \frac{s_h(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)$$

откуда следует, что формула (3.12) представима в виде

$$K_{III} = K_0 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{s_n(x) dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad K_0 = \frac{2\tau}{\sqrt{\pi \langle G \rangle_0}} \int_0^1 \frac{G(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3.13)$$

где K_0 — коэффициент интенсивности напряжений при данных граничных условиях (3.8) для однородного пространства. Выражение (3.13) с использованием известного тождества

$$\int_0^1 \frac{\cos \mu x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} J_0(\mu)$$

можно представить через функции $g_h(\mu)$:

$$K_{III} = K_0 + \sqrt{2} \sum_{h=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{J_0(\mu)}{\mu} \sum_{n=1}^h \Phi_n'(T_{h-n}^0|\mu, 0) d\mu \quad (3.14)$$

Если трещина имеет длину $2L$, формула (3.13) приобретает вид

$$K_{III} = K_0 - \frac{2}{\sqrt{\pi L}} \sum_{h=1}^{\infty} \int_0^L \frac{s_h(x/L) dx}{\sqrt{L^2 - x^2}} \quad (3.15)$$

На фиг. 1, 2 приведены зависимости безразмерного критического напряжения $p_* = \tau_* \sqrt{\pi} / \sqrt{4\lambda_0 \langle \gamma \rangle \langle G \rangle}$ от длины трещины $L_* = \lambda_0 L / 2\pi$. Критические напряжения $\tau_* = \langle \tau_{yz} \rangle^*$ определяются из уравнения

$$K_{III} = K_{IIIc} = \sqrt{4G(x)\gamma(x)} \quad (3.16)$$

с использованием представления (3.15) для K_{III} , $\gamma(x)$ — поверхностная энергия материала, вообще говоря, меняющаяся от точки к точке. Для нее был принят закон изменения, аналогичный (1.14): $\gamma(x) = \langle \gamma \rangle I_0^{-1}(\omega) \times \text{Хер}(\omega \cos \lambda_0 x)$.

Фиг. 3 иллюстрирует характер изменения модуля $G(x)$. Нумерация кривых N_1 и соответствующие параметры приведены ниже:

N_1	1	2	3	4	5	1	2	3	4	1	2	3
N_2	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3
κ	0	-0,35	-0,35	-0,35	-0,35	0	-0,35	-0,20	-0,15	-0,35	-0,2	-0,15
ω	0	-0,35	-0,15	0,15	0,35	0	-0,35	-0,35	-0,35	-	-	-

Видно, что трещины способны развиваться устойчиво при некоторых значениях длины (N_2 — номер фигур).

Таким образом, предложен метод решения задач неоднородной теории упругости для полосы и полуплоскости в антиплоской постановке. Эффективность метода проиллюстрирована на решении задачи о разрезе в бесконечной неоднородной плоскости при сдвиговых усилиях на бесконечности. Быстрая сходимость метода даже для больших отношений максимального и минимального модулей упругости ($G_{\max}/G_{\min} \sim 50$) дает возможность рассчитывать на применимость его в плоских задачах неоднородной теории упругости.

Автор выражает признательность С. Т. Милейко за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ломакин В. А. Плоская задача теории упругости микронеоднородных сред. — Инж. ж. МТТ, 1966, № 3, с. 72—77.
2. Ломакин В. А. Плоская задача теории упругости для тел с быстро осциллирующими упругими свойствами. — Инж. ж. МТТ, 1966, № 6, с. 68—75.
3. Ломакин В. А., Шейнин В. И. О применимости метода малого параметра для оценки напряжений в неоднородных упругих средах. — Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 3, с. 33—39.
4. Busbridge I. W. Dual Integral Equations. — Proc. London Math. Soc., 1938, Ser. 2, v. 44, p. 115—129.

Москва

Поступила в редакцию
15.X.1984