МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1986

УДК 539.3

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

ФРИДМАН Л. И.

Одним из методов решения задач теории упругости для конечных тел является сведение задачи к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений. Известно сведение к бесконечным системам в задачах для конечного цилиндра [1–3]. В публикуемой статье этот метод распространен на задачи динамической теории упругости для тела, ограниченного поверхностями, совпадающими с тремя координатными поверхностями (фиг. 1).

1. Задача о стационарных колебаниях упругого тела в безразмерных цилиндрических координатах ρ, θ, z, отнесенных к радиусу R внешней граничной поверхности, описывается тремя уравнениями Гельмгольца [4]:

$$\nabla^2\Phi_m+\lambda_m^2/c_1^2\Phi_m=0,\quad \nabla^2\Psi_{i,m}+\lambda_m^2/c_2^2\Psi_{i,m}=0\quad (i=1,\ 2) \tag{1.1}$$

Здесь λ_m — безразмерная частота — отнесена к R/c, $c=\sqrt{E/\rho_*}$, E — модуль упругости, ρ_* — удельная плотность, c_1, c_2 — безразмерные скорости распространения волн расширения и волн сдвига, отнесенные к c.

Методом Фурье решение уравнений (1.1) представляется в виде двойных разложений по функциям двух любых координат, образующим семейство собственных функций. Выбор поочередно двух координат из трех, по функциям которых строится разложение, приводит к записи решения уравнений (1.1) в виде трех двойных разложений:

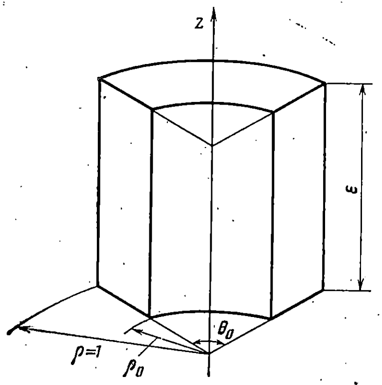
$$\Phi_m=\sum_k\sum_n{}'\varphi_{kn}^{(0)}(\rho)Z_n^{(j)}(z)\Theta_k^{(j)}(\theta)+\sum_k\sum_q V_{kq}^{(0)}(z)\varkappa_{kq}^{(j)}(\rho)\Theta_k^{(j)}(\theta)+$$
$$+\Sigma\Sigma W_{pn}^{(0)}(\theta)R_{pn}^{(j)}(\rho\gamma_n)Z_n^{(j)}(z)$$

$$\Psi_{1,m}=\sum_k\sum_n\varphi_{kn}^{(1)}(\rho)\frac{1}{\alpha_n}\frac{dZ_n^{(j)}}{dz}\Theta_k^{(j)}(\theta)+\sum_k\sum_q V_{kq}^{(1)}(z)\varkappa_{kq}^{(j)}(\rho)\Theta_k^{(j)}(\theta)+$$
$$+\sum_p\sum_n W_{pn}^{(1)}(\theta)R_{pn}^{(j)}(\rho\delta_n)\frac{1}{\alpha_n}\frac{dZ_n^{(j)}}{dz}$$

$$\Psi_{2,m}=\sum_k\sum_n\varphi_{kn}^{(2)}(\rho)Z_n^{(j)}(z)\frac{1}{\beta_k}\frac{d\Theta_k^{(j)}}{d\theta}+\sum_k\sum_q V_{kq}^{(2)}(z)\varkappa_{kq}^{(j)}(\rho)\frac{1}{\beta_k}\frac{d\Theta_k^{(j)}}{d\theta}+$$
$$+\sum_p\sum_n W_{pn}^{(2)}(\theta)R_{pn}^{(j)}(\rho\delta_n)Z_n^{(j)}(z)$$
$$\tag{1.2}$$

Здесь j — индекс варианта решения ($j=1,\ 2$). Первая сумма в (1.2) является разложением по собственным функциям $Z_n^{(j)}(z)$ и $\Theta_k^{(j)}(\theta)$, удовлетворяющим уравнениям

$$(Z_n^{(j)})^{-1}d^2Z_n^{(j)}/dz^2=-\alpha_n^2,\qquad (\Theta_k^{(j)})^{-1}d^2\Theta_k^{(j)}/d\theta^2=-\beta_k^2 \tag{1.3}$$



Фиг. 1

и граничным условиям

$$z=0,\quad z=\varepsilon,\quad dZ_n^{(1)}/dz=0,\quad Z_n^{(2)}=0$$

$$\theta=0,\quad \theta=\theta_0,\quad d\Theta_k^{(1)}/d\theta=0,\quad \Theta_k^{(2)}=0$$

$$\alpha_n=n\pi/\varepsilon,\ \beta_k=k\pi/\theta_0=k'$$

$$(n=0,\ 1,\ 2\ldots,\ k=0,\ 1,\ 2\ldots) \tag{1.4}$$

$$\varphi_{kn}^{(i)}=A_{kn}^{(i)}\,I_{k'}(\rho\gamma_n)+$$

$$+B_{kn}^{(i)}\,K_{k'}(\rho\gamma_n)\quad (i=0,1,2)$$

$$\gamma_n^2=\alpha_n^2-(\lambda_m/c_1)^2,$$

$$\delta_n^2=\alpha_n^2-(\lambda_m/c_2)^2 \tag{1.5}$$

Здесь $I_{k'}(\rho\gamma_n)$, $K_{k'}(\rho\gamma_n)$ — модифицированные функции Бесселя соответственно первого и второго рода порядка k'.

Во второй сумме собственная функция $\Theta_k^{(j)}$ та же, что и в первой сумме, а собственная функция $\varkappa_{kq}^{(j)}$ определяется уравнением

$$d^2\varkappa_{kq}^{(j)}/d\rho^2+\rho^{-1}\,d\varkappa_{kq}^{(j)}/d\rho-[\beta_k^2/\rho^2-(h_{kq}^{(j)})^2]\varkappa_{kq}^{(j)}=0 \tag{1.6}$$

и граничными условиями

$$\rho=\rho_0,\quad \rho=1,\quad d\varkappa_{kq}^{(1)}/d\rho=0,\quad \varkappa_{kq}^{(2)}=0 \tag{1.7}$$

$h_{kq}^{(j)}$ определяется из граничных условий (1.7) как корень соответствующих уравнений [5], q — номер корня

$$V_{kq}^{(i)}=C_{kq}^{(i)}\operatorname{ch}\omega_{kq}z+D_{kq}^{(i)}\operatorname{sh}\omega_{kq}z\quad (i=0,1,2) \tag{1.8}$$

$$\omega_{kq}^2=(h_{kq}^{(j)})^2-(\lambda_m/c_1)^2,\qquad \Omega_{kq}^2=(h_{kq}^{(j)})^2-(\lambda_m/c_2)^2$$

В третьей сумме собственная функция $Z_n^{(j)}$ та же, что и в первой сумме, а собственная функция $R_{pn}^{(j)}$ определяется уравнением

$$d^2R_{pn}^{(j)}/d\rho^2+\rho^{-1}\,dR_{pn}/d\rho+(\nu_{(1)p}^2/\rho^2-\gamma_n^2)R_{pn}^{(j)}=0 \tag{1.10}$$

и граничными условиями

$$\rho=\rho_0,\quad \rho=1,\quad dR_{pn}^{(1)}/d\rho=0,\quad R_{pn}^{(2)}=0 \tag{1.11}$$

При определении $R_{pn}^{(j)}$ для второй и третьей зависимости (1.2) в (1.10) следует γ_n заменить на δ_n, $\nu_{(1)p}$ — на $\nu_{(2)p}$

$$W_{pn}^{(i)}=E_{pn}^{(i)}\operatorname{ch}\nu_{(1)p}\theta+F_{pn}^{(i)}\operatorname{sh}\nu_{(1)p}\theta\quad (i=0,1,2) \tag{1.12}$$

Здесь $A_{kn}^{(i)}$, $B_{kn}^{(i)}$, $C_{kq}^{(i)}$, $D_{kq}^{(i)}$, $E_{pn}^{(i)}$, $F_{pn}^{(i)}$ — последовательности произвольных постоянных. В зависимостях (1.5), (1.8), (1.12) при $i=1$, 2 следует заменить γ_n на δ_n, ω_{kq} — на Ω_{kq}, $\nu_{(1)p}$ — на $\nu_{(2)p}$. Собственные функции $\varkappa_{kq}^{()}$, условие их ортогональности и уравнения для определения собственных значений $h_{kq}^{(j)}$ описаны в [5, 6]. Построение решения уравнений (1.10), определение условий ортогональности функций $R_{pn}^{(j)}$ и определение собственных значений требуют дополнительных исследований, результаты которых приводятся дальше.

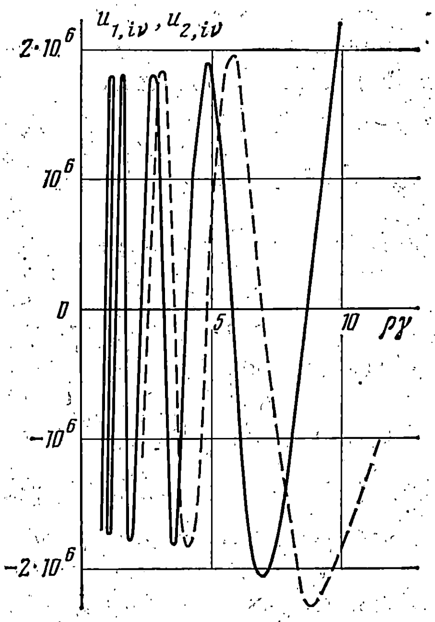
2. Решение уравнения

$$d^2u_\nu/d\rho^2+\rho^{-1}du_\nu/d\rho+(\nu^2/\rho^2-\gamma^2)u_\nu=0 \tag{2.1}$$

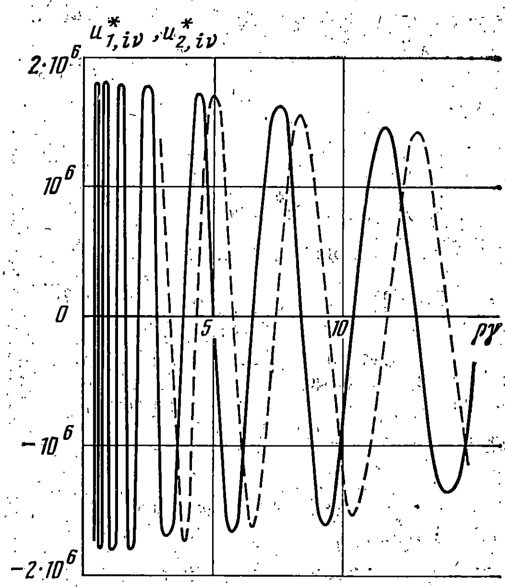
может быть записано в виде

$$u_\nu=C_{1,\nu}u_{1,i\nu}+C_{2,\nu}u_{2,i\nu} \tag{2.2}$$

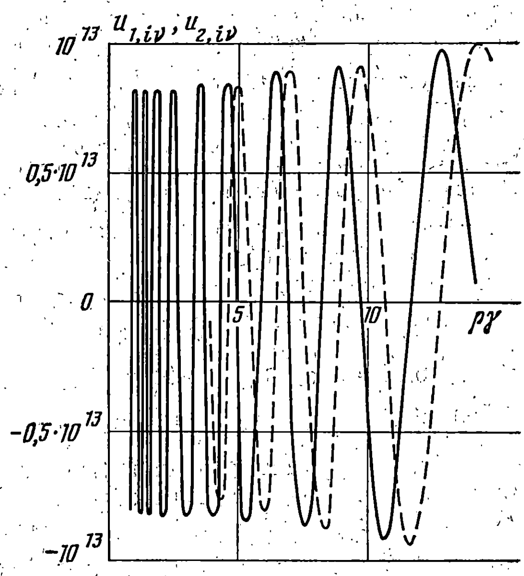
Здесь $u_{1,i\nu}=\operatorname{Re}I_{i\nu}(\rho\gamma)$, $u_{2,i\nu}=\operatorname{Im}I_{i\nu}(\rho\gamma)$, $I_{i\nu}(\rho\gamma)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка $i\nu$ (i — мнимая единица).



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

При однородных граничных условиях

$$\rho=a, \quad \alpha_0 u_\nu+\beta_0 u_\nu'=0 \qquad (2.3)$$
$$\rho=b, \quad \alpha u_\nu+\beta u_\nu'=0$$

справедливо условие ортогональности

$$\int_a^b u_\nu(\rho\gamma)\, u_\mu(\rho\gamma)\, \rho^{-1}\, d\rho=0 \qquad (2.4)$$

Здесь ν и μ — неравные корни уравнений:

$$u_{1,i\nu}'(a\gamma)\, u_{2,i\nu}'(b\gamma)-u_{1,i\nu}'(b\gamma)\, u_{2,i\nu}'(a\gamma)=0 \qquad (2.5)$$

при $\alpha_0=\alpha=0$ в (2.3);

$$u_{1,i\nu}(a\gamma)\, u_{2,i\nu}(b\gamma)-u_{1,i\nu}(b\gamma)\, u_{2,i\nu}(a\gamma)=0 \qquad (2.6)$$

при $\beta_0=\beta=0$ в (2.3).

Вронскиан функций $u_{1,i\nu}$, $u_{2,i\nu}$ может быть получен из вронскиана функций

$I_{i\nu}(\rho\gamma)$, $I_{-i\nu}(\rho\gamma)$ и записан в виде

$$W(u_{1,\,i\nu},\ u_{2,\,i\nu})=\operatorname{sh}\pi\nu/(\pi\rho\gamma) \tag{2.7}$$

При изменении знака перед γ^2 в уравнении (2.1) решение его имеет вид

$$u_\nu^*=\overset{*}{C}_{1\nu}\overset{*}{u}_{1,i\nu}+\overset{*}{C}_{2\nu}\overset{*}{u}_{2,i\nu} \tag{2.8}$$

$$\overset{*}{u}_{1,i\nu}=\operatorname{Re}J_{i\nu}(\rho\gamma),\qquad \overset{*}{u}_{2,i\nu}=\operatorname{Im}J_{i\nu}(\rho\gamma)$$

Для функций $\overset{*}{u}_{1,i\nu}$, $\overset{*}{u}_{2,i\nu}$ справедливы зависимости (2.4), при соответствующих граничных условиях, и (2.7).

Вычисление функций $u_{1,i\nu}$, $u_{2,i\nu}$, $\overset{*}{u}_{1,i\nu}$, $\overset{*}{u}_{2,i\nu}$ и их первых производных проведено по программе, где критерием точности принято равенство (2.7). Отличие левой части равенства (2.7) от правой допускалось не более 0,01%. Вычисляемые функции не имеют предела при $\rho\to 0$ и имеют бесчисленное множество нулей, расстояние между которыми возрастает с ростом ρ. Амплитуда функций $u_{1,\,i\nu}$, $u_{2,\,i\nu}$ с ростом ρ растет, а функций $\overset{*}{u}_{1,i\nu}$, $\overset{*}{u}_{2,i\nu}$ – падает. На фиг. 2, 3 показано изменение функций $u_{1,\,i\nu}$, $u_{2,\,i\nu}$, $\overset{*}{u}_{1,i\nu}$, $\overset{*}{u}_{2,i\nu}$ в зависимости от $\rho\gamma$ при $\nu=10{,}5$. Функции $u_{1,\,i\nu}$, $\overset{*}{u}_{1,i\nu}$ показаны сплошными линиями. На фиг. 4 показаны функции $u_{1,\,i\nu}$, $u_{2,\,i\nu}$ при $\nu=20{,}5$. Ввиду уменьшения расстояния между нулями при малых ρ функции $u_{1,\,i\nu}$, $\overset{*}{u}_{1,i\nu}$ показаны при $\rho\gamma>1$, а функции $u_{2,\,i\nu}$, u_{ν} – при $\rho\gamma>3$. В табл. 1 приведены вычисленные функции и их первые производные в зависимости от ν при $\rho\gamma=8$. В табл. 2 приведены корни ν_n ($n=1, 2, 3\ldots$) уравнений (2.5) (первая пара столбцов), (2.6) (вторая пара столбцов) и аналогичных уравнений для функций $\overset{*}{u}_{1,i\nu}$, $\overset{*}{u}_{2,i\nu}$ (третья и четвертая пара столбцов), подсчитанные для $a=0{,}2$, $b=1$, $\gamma=4$ и $\gamma=20$ до $\nu=30$.

Таким образом, решение уравнений (1.10), совпадающих с уравнением (2.1), строится по функциям (2.2) с учетом граничных условий (1.11). Собственные значения $\nu_{(1)p}$, $\nu_{(2)p}$ определяются из уравнений типа (2.5), (2.6) (p – номер корня).

3. Для тела, ограниченного поверхностями, совпадающими с координатными $\rho=\text{const}$, $\theta=\text{const}$, $z=\text{const}$ и свободными от напряжений, граничные условия записываются в виде (фиг. 1):

$$\rho=\rho_0,\ \rho=1,\ \sigma_\rho=0,\ \tau_{\rho\theta}=0,\ \tau_{\rho z}=0 \tag{3.1}$$

$$z=0,\ z=\varepsilon,\ \sigma_z=0,\ \tau_{\rho z}=0,\ \tau_{\theta z}=0 \tag{3.2}$$

$$\theta=0,\ \theta=\theta_0,\ \sigma_\theta=0,\ \tau_{\rho\theta}=0,\ \tau_{\theta z}=0 \tag{3.3}$$

Рассматривается первый вариант решения ($j=1$, в дальнейшем индекс варианта j опускается). Второе и третье граничные условия (3.2) удовлетворяются точно. Из них исключаются последовательности произвольных постоянных $C_{kq}^{(1)}$, $D_{kq}^{(1)}$, $C_{kq}^{(2)}$, $D_{kq}^{(2)}$. Оставшиеся 14 граничных условий после ортогонализации по соответствующим собственным функциям переходят в бесконечные последовательности линейных однородных алгебраических уравнений. При удержании в рядах (1.2) по каждому индексу суммирования N слагаемых 14 бесконечных последовательностей линейных алгебраических уравнений переходят в 14 N^2 уравнений с таким же числом неизвестных.

Введем обозначения

$$S_{kn}^{(1)}=\sum_{l=1}^{3}\left(a_{i,2l-1,k,n}A_{kn}^{(l-1)}+a_{i,2l,k,n}B_{kn}^{(l-1)}\right)$$

$$S_{kq}^{(2)}=a_{i,7,k,q}C_{kq}^{(0)}+a_{i,8,k,q}D_{kq}^{(0)}$$

$$S_{pn}^{(3)}=\sum_{l=1}^{3}\left(a_{i,2l+7,p,n}E_{pn}^{(l-1)}+a_{i,2l+8,p,n}E_{pn}^{(l-1)}\right)$$

Таблица 1

ν	$u_{1,\,i\nu}$	$u_{2,\,i\nu}$	$\overset{*}{u}_{1,\,i\nu}$	$\overset{*}{u}_{2,\,i\nu}$	$u'_{1,\,i\nu}$	$u'_{2,\,i\nu}$	$(\overset{*}{u}_{1,\,i\nu})'$	$(\overset{*}{u}_{2,\,i\nu})'$
0,5	$0,435\cdot10^{3}$	$-0,106\cdot10^{-3}$	0,232	0,192	$0,406\cdot10^{3}$	$0,112\cdot10^{-3}$	0,308	0,141
3	$0,791\cdot10^{3}$	$-0,169$	$0,142\cdot10^{2}$	$0,540\cdot10$	$0,671\cdot10^{3}$	0,168	$0,655\cdot10$	$0,149\cdot10^{2}$
5,5	$0,385\cdot10^{4}$	$-0,117\cdot10^{3}$	$0,45\cdot10^{3}$	$-0,567\cdot10^{3}$	$0,222\cdot10^{4}$	$0,972\cdot10^{2}$	$0,668\cdot10^{3}$	$0,57\cdot10^{3}$
8	$0,556\cdot10^{5}$	$-0,320\cdot10^{5}$	$-0,321\cdot10^{5}$	$-0,112\cdot10^{5}$	$0,241\cdot10^{5}$	$0,155\cdot10^{5}$	$0,168\cdot10^{5}$	$-0,451\cdot10^{5}$
10,5	$-0,987\cdot10^{6}$	$-0,196\cdot10^{7}$	$0,847\cdot10^{6}$	$0,136\cdot10^{7}$	$0,164\cdot10^{7}$	$-0,101\cdot10^{7}$	$-0,226\cdot10^{7}$	$0,137\cdot10^{7}$
13	$-0,294\cdot10^{8}$	$0,87\cdot10^{8}$	$-0,263\cdot10^{8}$	$-0,707\cdot10^{8}$	$-0,113\cdot10^{9}$	$-0,347\cdot10^{8}$	$0,135\cdot10^{9}$	$-0,490\cdot10^{8}$
15,5	$0,20\cdot10^{10}$	$-0,36\cdot10^{10}$	$0,19\cdot10^{10}$	$0,30\cdot10^{10}$	$0,60\cdot10^{10}$	$0,33\cdot10^{10}$	$-0,66\cdot10^{10}$	$0,41\cdot10^{10}$
18	$-0,44\cdot10^{11}$	$0,18\cdot10^{12}$	$-0,16\cdot10^{12}$	$-0,72\cdot10^{11}$	$-0,37\cdot10^{12}$	$-0,85\cdot10^{11}$	$0,18\cdot10^{12}$	$-0,38\cdot10^{12}$
20,5	$-0,38\cdot10^{13}$	$-0,80\cdot10^{13}$	$0,74\cdot10^{13}$	$-0,36\cdot10^{13}$	$0,19\cdot10^{14}$	$0,90\cdot10^{13}$	$0,98\cdot10^{13}$	$0,20\cdot10^{14}$
23	$0,42\cdot10^{15}$	$0,55\cdot10^{14}$	$0,20\cdot10^{14}$	$0,40\cdot10^{15}$	$-0,15\cdot10^{15}$	$0,11\cdot10^{16}$	$0,12\cdot10^{16}$	$0,58\cdot10^{14}$
25,5	$-0,80\cdot10^{16}$	$0,19\cdot10^{17}$	$-0,19\cdot10^{17}$	$-0,18\cdot10^{16}$	$-0,56\cdot10^{17}$	$-0,24\cdot10^{17}$	$0,60\cdot10^{16}$	$-0,64\cdot10^{17}$
28	$-0,88\cdot10^{18}$	$-0,41\cdot10^{18}$	$0,68\cdot10^{15}$	$-0,93\cdot10^{18}$	$0,14\cdot10^{19}$	$-0,30\cdot10^{19}$	$0,34\cdot10^{19}$	$0,68\cdot10^{16}$
30,5	$0,10\cdot10^{20}$	$-0,46\cdot10^{20}$	$0,43\cdot10^{20}$	$-0,14\cdot10^{20}$	$0,17\cdot10^{21}$	$0,37\cdot10^{20}$	$0,54\cdot10^{20}$	$0,17\cdot10^{21}$

Таблица 2

	1		2		3		4	
	$\gamma=4$	$\gamma=20$	$\gamma=4$	$\gamma=20$	$\gamma=4$	$\gamma=20$	$\gamma=4$	$\gamma=20$
ν_1	3,295	5,767	2,689	7,016	3,258	5,768	1,649	5,364
ν_2	5,453	8,901	4,442	9,353	5,436	8,892	3,224	8,239
ν_3	7,505	11,574	6,244	11,313	7,497	11,564	4,577	10,359
ν_4	9,517	14,035	8,106	13,078	9,512	14,026	6,278	12,212
ν_5	11,509	16,373	10,001	14,718	11,506	16,365	8,119	13,908
ν_6	13,490	18,630	11,914	16,274	13,488	18,624	10,007	15,494
ν_7	15,463	20,831	13,837	17,790	15,462	20,826	11,917	16,978
ν_8	17,432	22,990	15,768	19,317	17,431	22,986	13,839	18,334
ν_9	19,398	25,118	17,703	20,892	19,397	25,115	15,769	19,622
ν_{10}	21,361	27,222	19,642	22,525	21,360	27,218	17,704	21,032
ν_{11}	23,322	29,305	21,583	24,211	23,322	29,302	19,642	22,593
ν_{12}	25,282		23,527	25,940	25,282		21,583	24,249
ν_{13}	27,241		25,47	27,701	27,24		23,526	25,963
ν_{14}	29,198		27,415	29,490	29,198		25,470	27,717
ν_{15}			29,361				27,415	29,501
ν_{16}							29,361	

Граничные условия (3.1) после ортогонализации по Z_n и Θ_k дают уравнения вида

$$S_{kn}^{(1)}+\sum_q S_{kq}^{(2)}+\sum_p S_{pn}^{(3)}=0 \tag{3.4}$$

Для $i=1,\ldots,N^2$ $(\sigma_\rho=0,\ \rho=\rho_0)$:

$$\begin{gathered}
a_{i,1,k,n}=(N_1+\beta_k^2/\rho_0^2)I_{k'}(\rho_0\gamma_n)-\gamma_n\rho_0^{-1}I_{k'}'(\rho_0\gamma_n)\\
a_{i,3,k,n}=\alpha_n[(N_2+\beta_k^2/\rho_0^2)I_{k'}(\rho_0\delta_n)-\delta_n\rho_0^{-1}I_{k'}'(\rho_0\delta_n)]\\
a_{i,5,k,n}=\beta_k[\delta_n\rho_0^{-1}I_{k'}'(\rho_0\delta_n)-\rho_0^{-2}I_{k'}(\rho_0\delta_n)]\\
N_1=\alpha_n^2-{}^1/{}_2\lambda_m^2/c_2^2,\ N_2=\alpha_n^2-\lambda_m^2/c_2^2
\end{gathered} \tag{3.5}$$

$$\begin{gathered}
a_{i,7,k,q}=2\omega_{kq}\varepsilon^{-1}[(-1)^n\operatorname{ch}\omega_{kq}'-1](T_{qn}/Q_{kq}+\beta_k^2X_{qn}/\rho_0^2)\varkappa_{kq}(\rho_0)\\
a_{i,8,k,q}=2\omega_{kq}\varepsilon^{-1}(-1)^n\operatorname{sh}\omega_{kq}'(T_{qn}/Q_{kq}+\beta_k^2X_{qn}/\rho_0^2)\varkappa_{kq}(\rho_0)\\
T_{qn}=(G_{qn}H_{qn})^{-1}[-2\alpha_n^2h_{kq}^2(1-c_2^2/c_1^2)+\\
+H_{qn}(1-2c_2^2/c_1^2)\,{}^1/{}_2\lambda_m^2/c_2^2]\,{}^1/{}_2\lambda_m^2/c_2^2\\
X_{qn}=(G_{qn}H_{qn}Q_{kq})^{-1}[-(h_{kq}^2-\lambda_m^2/c_2^2)(1-2c_2^2/c_1^2)+\alpha_n^2]\,{}^1/{}_2\lambda_m^2/c_2^2\\
G_{qn}=h_{kq}^2+\alpha_n^2-(\lambda_m/c_1)^2\\
H_{qn}=h_{kq}^2+\alpha_n^2-(\lambda_m/c_2)^2,\ Q_{kq}=h_{kq}^2-{}^1/{}_2\lambda_m^2/c_2^2\\
\omega_{kq}'=\omega_{kq}\varepsilon,\qquad a_{i,9,p,n}=(N_1-\nu_{(1)p}^2/\rho_0^2)S_{(1)pk}\\
a_{i,11,p,n}=-\alpha_n(N_2-\nu_{(2)p}^2/\rho_0^2)S_{(2)pk},\qquad a_{i,13,p,n}=-\nu_{(2)p}C_{(2)pk}/\rho_0^2\\
S_{(j)pk}=2\nu_{(j)p}(-1)^k\operatorname{sh}\nu_{(j)p}'/[\theta_0(\beta_k^2+\nu_{(j)p}^2)]\\
C_{(j)pk}=2\nu_{(j)p}[(-1)^k\operatorname{ch}\nu_{(j)p}'-1]/[\theta_0(\beta_k^2+\nu_{(j)p}^2)]\\
\nu_{(j)p}'=\nu_{(j)p}\theta_0\qquad (j=1,2)
\end{gathered} \tag{3.6}$$

Для $i=N^2+1,\ldots 2N^2$ $(\tau_{\rho\theta}=0,\ \rho=\rho_0)$

$$\begin{gathered}
a_{i,1,k,n}=\beta_k\rho_0^{-1}[\gamma_nI_{k'}'(\rho_0\gamma_n)-\rho^{-1}I_{k'}(\rho_0\gamma_n)]\\
a_{i,3,k,n}=-\alpha_n\beta_k\rho_0^{-1}[\delta_nI_{k'}'(\rho_0\delta_n)-\rho_0^{-1}I_{k'}(\rho_0\delta_n)]\\
a_{i,5,k,n}=\rho_0^{-1}\delta_nI_{k'}'(\rho_0\delta_n)-(\beta_k^2/\rho_0^2+{}^1/{}_2N_2)I_{k'}(\rho_0\delta_n)
\end{gathered}$$

$$a_{i,7,k,q}=2\beta_k\omega_{kq}[(-1)^n \operatorname{ch}\omega_{kq}'-1]X_{qn}\varkappa_{kq}(\rho_0)(\rho_0\varepsilon)$$

$$a_{i,8,k,q}=2\beta_k\omega_{kq}(-1)^n \operatorname{sh}\omega_{kq}'X_{qn}\varkappa_{kq}(\rho_0)/(\rho_0\varepsilon)$$

$$a_{i,9,p,n}=-\nu_{(1)p}\rho_0^{-1}C_{(1)pn}R_{pn}(\rho_0\gamma_n)$$

$$a_{i,11,p,n}=-\alpha_n\nu_{(2)p}\rho_0^{-1}C_{(2)pn}R_{pn}(\rho_0\delta_n)$$

$$a_{i,13,p,n}=(\nu_{(2)p}/\rho_0^2-{}^1/_2N_2)S_{(2)pn}R_{pn}(\rho_0\delta_n) \tag{3.7}$$

Для $i=2N^2+1,\dots 3N^2$ $(\tau_{\rho z}=0,\ \rho=\rho_0)$:

$$a_{i,1,k,n}=\alpha_n\gamma_n I_k'{}'(\rho_0\gamma_n),\quad a_{i,3,k,n}=-N_1\delta_n I_k'{}'(\rho_0\delta_n)$$

$$a_{i,5,k,n}=-{}^1/_2\beta_k\alpha_n\rho_0^{-1}I_k(\rho_0\delta_n),\quad a_{i,7,k,q}=a_{i,8,k,q}=0$$

$$a_{i,l,p,n}=0\ (l=9\div12),\quad a_{i,13,p,n}=\alpha_n C_{(2)pn}/\rho_0 \tag{3.8}$$

Коэффициенты уравнений, соответствующие $i=3N^2+1,\dots 6N^2$ $(\sigma\rho=0,$ $\tau_{\rho\theta}=0,\ \tau_{\rho z}=0,\ \rho=1)$, могут быть получены из коэффициентов (3.5)—(3.8) заменой в них ρ_0 на единицу.

Коэффициенты со вторым индексом 10, 12, 14 в зависимостях (3.6)—(3.8) могут быть получены из соответствующих коэффициентов со вторым индексом 9, 11, 13 заменой $C_{(j)pn}$ на $S_{(j)pn}$ или обратной заменой.

Первое граничное условие (3.2) после ортогонализации по Θ_k и $\varkappa_{kq}$ дает уравнения

$$\sum_n S_{kn}^{(1)}+S_{kq}^{(2)}+\sum_p\sum_n S_{pn}^{(3)}=0$$

Для $i=6N^2+1,\dots 7N^2$ $(\sigma_z=0,\ z=\varepsilon)$:

$$a_{i,1,k,n}=-(B_1\lambda_m^2+\alpha_n^2)\frac{\pi\gamma_n}{G_{kq}b_{kq}}[I_k'{}'(\gamma_n)a_{kq}-I_k'{}'(\rho_0\gamma_n)](-1)^n$$

$$a_{i,3,k,n}=\alpha_n N_2\frac{\pi\delta_n}{H_{kq}b_{kq}}[I_k'{}'(\delta_n)a_{kq}-I_k'{}'(\rho_0\delta_n)](-1)^n$$

$$a_{i,5,k,n}=a_{i,6,k,n}=0,\quad B_1=(1-2c_2^2/c_1^2)/(2c_2^2)$$

$$a_{i,7,k,q}=Q_{kq}\operatorname{sh}\omega_{kq}'-Q_{kq}'(\operatorname{ch}\omega_{kq}'\operatorname{ch}\Omega_{kq}'-1)/(Q_{kq}\operatorname{sh}\Omega_{kq}')$$

$$a_{i,8,k,q}=Q_{kq}\operatorname{ch}\omega_{kq}'-Q_{kq}'\operatorname{sh}\omega_{kq}'/(Q_{kq}\operatorname{sh}\Omega_{kq}')\operatorname{ch}\Omega_{kq}'$$

$$Q_{kq}'=h_{kq}^2\omega_{kq}\Omega_{kq}$$

$$a_{i,9,p,n}=-(B_1\lambda_m^2+\alpha_n^2){}^1/_2\pi^2Y(\gamma_n)/b_{kq}S_{(1)pn}(-1)^n$$

$$a_{i,11,p,n}=\alpha_n N_2{}^1/_2\pi^2Y(\delta_n)/b_{kq}S_{(2)pn}(-1)^n$$

$$a_{i,13,p,n}=a_{i,14,p,n}=0$$

$$Y(\gamma_n)=\int_{\rho_0}^1 R_{pn}(\rho\gamma_n)\varkappa_{kq}\rho\,d\rho \tag{3.9}$$

Для $i=7N^2+1,\dots,8N^2$ $(\sigma_z=0,\ z=0)$ $a_{i,1,k,n}\div a_{i,6,k,n}$, $a_{i,9,p,n}\div a_{i,12,p,n}$ определяются формулами (3.9), но без множителя $(-1)^n$

$$a_{i,7,k,q}=\frac{Q_{kq}'}{Q_{kq}}\frac{\operatorname{ch}\Omega_{kq}'-\operatorname{ch}\omega_{kq}'}{\operatorname{sh}\Omega_{kq}'} \tag{3.10}$$

$$a_{i,8,k,q}=Q_{kq}\left(1-\frac{Q_{kq}'}{Q_{kq}}\frac{\operatorname{sh}\omega_{kq}'}{\operatorname{sh}\Omega_{kq}'}\right)$$

$$a_{kq}=J_k'{}'(\rho_0h_{kq})/J_k'{}'(h_{kq})$$

$$b_{kq}=(1-\beta_k^2/h_{kq}^2)a_{kq}^2-[1-\beta_k^2/(\rho_0^2h_{kq}^2)]$$

Первое условие (3.3) после ортогонализации по Z_n и R_{ln} переходит в уравнение

$$\sum_k S_{kn}^{(1)} + \sum_k \sum_q S_{kq}^{(2)} + \sum_p S_{pn}^{(3)} = 0$$

Для $i=8N^2+1, \ldots 9N^2$ ($\sigma_\theta=0$, $\theta=\theta_0$; δ_{pl} — символ Кронекера):

$$a_{i,1,k,n} = [-B_1\lambda_m^2 Y_{l,n}^{(1)}(\gamma_n) + \gamma_n Y_{l,n}^{(2)}(\gamma_n) - \beta_k^2 Y_{l,n}^{(3)}(\gamma_n)](-1)^k / Y_{l,n}$$

$$a_{i,3,k,n} = \alpha_n [\beta_k^2 Y_{l,n}^{(1)}(\delta_n) - \delta_n Y_{l,n}^{(2)}(\delta_n)](-1)^k / Y_{l,n}$$

$$a_{i,5,k,n} = \beta_k [\delta_n Y_{l,n}^{(2)}(\delta_n) - Y_{l,n}^{(3)}(\delta_n)](-1)^k / Y_{l,n} \tag{3.11}$$

$$Y_{l,n}^{(i)}(a) = \int_{\rho_0} I_{k'}(\rho a) R_{ln}(\rho\gamma_n) \frac{1}{\rho^i} d\rho \qquad (i=1, 2, 3)$$

$$\left(Y_{l,n}^{(1)}(\gamma_n) = \frac{\gamma_n}{\beta_k^2+\nu_{(1)p}^2} \frac{\operatorname{sh} \pi\nu_{(1)p}}{\pi} \left[\frac{u'_{1,i\nu}(\rho_0\gamma_n)}{u'_{1,i\nu}(\gamma_n)} I_{k'}'(\gamma_n) - I_{k'}'(\rho_0\gamma_n) \right] \right)$$

$$Y_{l,n} = \int_{\rho_0}^1 R_{ln}^2(\rho\gamma_n) \frac{1}{\rho} d\rho, \qquad a_{i,7,k,q} = M_{kq}(-1)^n \operatorname{sh} \omega_{kq}'$$

$$a_{i,8,kq} = M_{kq}[(-1)^n \operatorname{ch} \omega_{kq}' - 1], \qquad M_{kq} = \frac{2\omega_{kq}}{\varepsilon} \frac{1}{G_{qn} H_{qn} Y_{l,n}} \times$$

$$\times \left[H_{qn} - 2\left(h_{kq}^2 - \frac{\lambda_m^2}{c_2^2} \right)\left(1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \right) \right] \frac{\lambda_m^2}{2c_2^2} \int_{\rho_0}^1 \frac{d^2\varkappa_{kq}}{d\rho^2} R_{ln} \frac{1}{\rho} d\rho$$

$$a_{i,9,p,n} = -\frac{Y_{l,p}^0}{Y_{l,n}} \operatorname{ch} \nu'_{(1)p} - \delta_{pl}(B_1\lambda_m^2 - \gamma_n^2) \operatorname{ch} \nu'_{(1)l}$$

$$a_{i,11,p,n} = \alpha_n [Y_{l,p}^0 - Y'_{l,p}\gamma_n^2] \frac{\operatorname{ch} \nu'_{(2)p}}{Y_{l,n}}, \qquad a_{i,13,p,n} = -\nu_{(2)p} \frac{Y''_{l,p}}{Y_{l,n}} \operatorname{ch} \nu'_{(2)p}$$

$$Y_{l,p}^0 = \int_{\rho_0}^1 \frac{dR_{pn}}{d\rho}(\rho\delta_n) R_{ln}(\rho\gamma_n) \frac{1}{\rho} d\rho, \qquad Y'_{l,p} = \int_{\rho_0}^1 R_{pn}(\rho\delta_n) R_{ln}(\rho\gamma_n) \frac{1}{\rho} d\rho \tag{3.12}$$

$$Y''_{l,p} = \int_{\rho_0}^1 \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{1}{\rho} R_{pn}(\rho\delta_n) + \frac{dR_{pn}}{d\rho}(\rho\delta_n) \right] R_{ln}(\rho\gamma_n) d\rho$$

Для $i=9N^2+1, \ldots 10N^2$ ($\sigma_\theta=0$, $\theta=0$) коэффициенты уравнения могут быть получены из (3.12). В коэффициентах уравнений со вторым индексом $1 \ldots 6$ следует опустить множитель $(-1)^k$, во всех остальных коэффициентах следует θ_0 заменить на нуль.

Во всех записанных уравнениях коэффициенты со вторым индексом 2, 4, 6 могут быть получены из коэффициента со вторым индексом соответственно 1, 3, 5 заменой в них функций $I_{k'}$ и их производных на $K_{k'}$ и их производные. Последние два условия (3.3) дают уравнения вида

$$\sum S_{pn}^{(3)} = 0$$

Для $10N^2+1, \ldots 11N^2$ ($\tau_{p\theta}=0$, $\theta=\theta_0$):

$$a_{i,9,p,n} = \delta_{pl}\nu_{(1)l} \operatorname{sh} \nu_{(1)l} + \nu_{(1)p} \operatorname{sh} \nu'_{(1)p} Y'''_{l,p} / Y_{l,n}$$

$$a_{i,11,p,n} = -\alpha_n (Y'''_{l,p} - Y'_{l,p}) \nu_{(2)p} \operatorname{sh} \nu'_{(2)p} / Y_{l,n}$$

$$a_{i,13,p,n} = [Y_{l,p}^0 + (\nu_{(2)p} - {}^1/_2 N_2) Y'_{l,p}] \operatorname{ch} \nu'_{(2)p} / Y_{l,n} \tag{3.13}$$

$$Y'''_{i,p}=\int\limits_{\rho_0}^{1}\frac{dR_{pn}}{d\rho}(\rho\delta_n)R_{in}(\rho\gamma_n)d\rho$$

Для $i=11N^2+1,\ldots,12N^2$ $(\tau_{\theta z}=0,\ \theta=\theta_0)$:

$$a_{i,9,p,n}=\delta_{pl}\nu_{(1)l}\operatorname{sh}\nu'_{(1)l},\qquad a_{i,11,p,n}=-N_1Y'_{l,p}\nu_{(2)p}\operatorname{sh}\nu'_{(2)p}/Y_{l,n}$$

$$a_{i,13,p,n}=-{}^1/{}_2Y''_{l,p}\operatorname{ch}\nu'_{(2)p}/Y_{l,n}\tag{3.14}$$

Коэффициенты, имеющие второй индекс 10, 12, 14, могут быть получены из коэффициентов со вторым индексом 9, 11, 13 (3.12), (3.13), (3.14) заменой $\operatorname{ch}\nu'_{(i)p}$ на $\operatorname{sh}\nu'_{(i)p}$ и обратной заменой.

Коэффициенты уравнений $i=12N^2+1,\ldots\ldots14N^2$ $(\tau_{\rho\theta}=\tau_{\theta z}=0,\ \theta_0=0)$ могут быть получены из коэффициентов с $i=10N^2+1,\ldots\ldots12N^2$ заменой в них θ_0 на нуль.

Полученная бесконечная система линейных однородных уравнений при удержании в рядах (1.2) N слагаемых по каждому индексу суммирования переходит в усеченную систему порядка $14N^2$. Условие ее разрешимости дает частотное уравнение. В сравнении с круговым цилиндром [2, 3] порядок усеченной системы существенно возрастает.

Две низшие безразмерные частоты, подсчитанные для тела, показанного на фиг. 1 ($\varepsilon=1$, $\rho_0=0{,}5$, $\theta_0=\pi/3$), при $N=2$ равны $\lambda_1=2{,}4545$, $\lambda_2=3{,}9656$, а при $N=3$ $\lambda_1=2{,}4545$, $\lambda_2=3{,}9658$.

При колебаниях в плоскости, перпендикулярной оси z рассматриваемого тела (фиг. 1) ($\varepsilon\ll1$ или $\varepsilon\gg1$), пространственная задача переходит в плоскую. Задача описывается двумя уравнениями Гельмгольца, решение которых имеет вид

$$\Phi_m=\sum_k\varphi_k^{(0)}(\rho)\Theta_k(\theta)+\sum_p W_p^{(0)}(\theta)R_p(\rho\gamma_0)$$

$$\Psi_m=\sum_k\varphi_k^{(1)}(\rho)\frac{1}{\beta_k}\frac{d\Theta_k}{d\theta}+\sum_p W_p^{(1)}(\theta)R_p(\rho\delta_0)$$

Θ_k, $\varphi_k^{(i)}$, R_p, $W_p^{(i)}$ $(i=0,\ 1)$ определяются соответственно зависимостями (1.4), (1.5), (1.10), (1.12) при $\alpha_n=0$.

При удержании в рядах (3.15) N слагаемых порядок усеченной системы, в которую переходят граничные условия ($\rho=\rho_0$, $\rho=1$, $\sigma_\rho=0$, $\tau_{\rho\theta}=0$, $\theta=\theta_0$, $\theta=0$, $\sigma_\theta=0$, $\tau_{\rho\theta}=0$), равны $8N$.

Первые две частоты при $N=2$ равны $\lambda_1=1{,}7085$, $\lambda_2=3{,}9641$ (для $\rho_0=0{,}5$, $\theta_0=\pi/3$), а при $N=3-\lambda_1=1{,}6411$, $\lambda_2=3{,}9635$; переход от $N=2$ к $N=3$ мало меняет результаты вычислений.

4. Подстановкой векторной функции $\boldsymbol{\Psi}=\Psi_1\mathbf{e}_z+\operatorname{rot}(\Psi_{*2}\mathbf{e}_z)$ ($\mathbf{e}_z$ – единичный вектор вдоль оси z) в векторное бигармоническое уравнение (решение Бусинека – Галеркина [7]) статическая задача в цилиндрических координатах сводится к скалярным уравнениям (ν – коэффициент Пуассона):

$$\nabla^2\nabla^2\Psi_1=0,\quad \nabla^2\Psi_2=0\quad (\Psi_2=2(1-\nu)\nabla^2\Psi_{*2})\tag{4.1}$$

Сохраняя обозначения, принятые в формулах (1.5), (1.6), (1.8), (1.9), (1.10), (1.12), и полагая $\lambda_m=0$, решения уравнений (4.1) запишем в виде

$$\Psi_2=\sum_k\left\{A_k{}^*\rho^{k'}+B_k{}^*\frac{1}{\rho^{k'}}+\sum_n\varphi_{kn}^{(2)}\frac{1}{\alpha_n}\frac{dZ_n^{(j)}}{dz}\right\}\frac{1}{\beta_k}\frac{d\Theta_k^{(j)}}{d\theta}+$$

$$+\sum_k\sum_q V_{kq}^{(2)}\varkappa_{kq}^{(j)}\frac{1}{\beta_n}\frac{d\Theta_k^{(j)}}{d\theta}+\sum_p\sum_n W_{pn}^{(2)}R_{pn}^{(j)}\frac{1}{\alpha_n}\frac{dZ_n^{(j)}}{dz}$$

$$\Psi_1=\sum_k\left\{A_k\rho^{k'+2}+B_k\frac{1}{\rho^{k'+2}}+\sum_n\left(\rho\frac{d\varphi_{kn}^{(0)}}{d\rho}+\varphi_{kn}^{(1)}\right)Z_n^{(j)}\right\}\Theta_k^{(j)}+$$

$$+\sum_k \sum_q \left(z \frac{dV_{kq}^{(0)}}{dz} + V_{kq}^{(1)} \right) \varkappa_{kq}^{(j)} \Theta_k^{(j)} +$$

$$+\sum_p \sum_n \left\{ \frac{d}{d\rho} (\rho R_{pn}^{(j)}) W_{pn}^{(0)} + R_{pn}^{(j)} W_{pn}^{(1)} \right\} Z_n^{(j)} \tag{4.2}$$

Поверхностные нагрузки предполагаются заданными в виде разложений по собственным функциям координат, меняющихся на рассматриваемой граничной поверхности. Первый вариант решения ($j=1$) соответствует нагружению граничных поверхностей $z=0$, $z=\varepsilon$ только нормальными усилиями, а второй вариант ($j=2$) — только касательными. В обоих вариантах решения на остальных поверхностях могут быть заданы любые нагрузки. Задача сводится к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений. При численной реализации решения рассматривается усеченная система.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамян Б. Л.* Некоторые задачи равновесия круглого цилиндра.— Докл. АН АрмССР, 1958, т. 26, № 2, с. 65–71.
2. *Фридман Л. И.* Динамическая задача теории упругости для цилиндра конечных размеров.— Прикл. механика, 1981, т. 17, № 3, с. 37–43.
3. *Фридман Л. И.* Два варианта представления решения неосесимметричных динамической и статической задач теории упругости для конечного цилиндра.— В кн.: Аннот. докл. 5-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Алма-Ата: Наука, 1981, с. 345.
4. *Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А.* Дифракция упругих волн. Киев: Наук. думка, 1978. 307 с.
5. *Бабич В. М., Капилевич М. Б., Михлин С. Г. и др.* Линейные уравнения математической физики. М.: Наука, 1964. 368 с.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1965. 294 с.
7. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.

Куйбышев

Поступила в редакцию
2.XII.1983