МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1986

УДК 539.3

ВАРИАЦИОННЫЕ ПОСТАНОВКИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

НИКОЛЬСКИЙ М. Д.

Теория полулинейного материала, развитая в [1, 2], используется для построения разрешающих уравнений геометрически нелинейных задач теории упругости. При этом соотношения закона Гука выполняются для «физических» напряжений в базисе собственной системы координат деформированного состояния и «технических» деформаций, определяемых изменением метрики собственного пространства в актуальном состоянии тела. Рассматривается также теория «квазилинейного» материала, в которой место линейных деформаций в выражении упругого потенциала для среды Гука занимает тензор нелинейных деформаций Коши – Грина. Дана обобщенная формулировка принципа стационарности дополнительной энергии деформации полулинейного материала для случая, когда внешние силы имеют квадратичный потенциал. Показано, что канонические преобразования принципа Лагранжа в случае квазилинейного материала не могут быть выполнены однозначно. Теоретическое исследование иллюстрируется на примере задачи о больших деформациях гибких нитей.

1. Принцип возможных перемещений. Рассматривается изотропное линейно-упругое твердое тело (среда Гука), которое в начальном состоянии занимает объем Ω, ограниченный поверхностью Γ. За материальные координаты принимаются декартовые координаты материальных точек в их начальном состоянии $\xi_i=x_i^0$. Тогда

$$\nabla\mathbf{R}=\mathbf{E}+\nabla\mathbf{u},\quad \mathbf{G}=\nabla\mathbf{R}\cdot(\nabla\mathbf{R})^T,\quad \boldsymbol{\gamma}=\mathbf{G}^{1/2} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{R}$ – радиус-вектор точки деформированного тела, ∇ – набла-оператор в метрике начального состояния, $\mathbf{E}$ – единичный тензор, $\mathbf{u}$ – вектор перемещений, $\mathbf{G}$ – тензор меры деформации Коши – Грина, $\boldsymbol{\gamma}$ – тензор технической меры деформации.

При воздействии на тело потенциальных объемных сил $\mathbf{p}$ и «мертвых» поверхностных сил $\mathbf{p}_n{}^\circ$ на части Γ_2 поверхности Γ принцип возможных перемещений можно представить в виде

$$\delta\Pi=\delta\left[\iiint\limits_{\Omega}(W+V)\,d\Omega-\iint\limits_{\Gamma_2}\mathbf{p}_n{}^\circ\cdot\mathbf{R}\,d\Gamma\right]=0 \tag{1.2}$$

где Π – потенциальная энергия системы есть функционал над вектором $\mathbf{R}$, W – упругий потенциал, V – потенциал внешних объемных сил.

Упругий потенциал W есть некоторая положительная функция инвариантных характеристик деформаций. Для среды Гука при конечных деформациях функция $W(\nabla\mathbf{R})$ определяется в виде

$$W={}^1/_2[\lambda I_1{}^2(\boldsymbol{\varepsilon})+2\mu I_1(\boldsymbol{\varepsilon}^2)] \tag{1.3}$$

где λ, μ – упругие постоянные Ламе, I_1 – первый инвариант соответствующего тензора, а $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор технической деформации [3]:

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\gamma}-\mathbf{E}=(\nabla\mathbf{R}\cdot(\nabla\mathbf{R})^T)^{1/2}-\mathbf{E} \tag{1.4}$$

Если в выражении (1.3) под $\boldsymbol{\varepsilon}$ понимать тензор линейной деформации, то упругий потенциал W определяет классический материал Гука. Если же $\boldsymbol{\varepsilon}'$ есть тензор технической деформации (1.4), то классический закон состояния Гука сохраняет свой вид в метрике деформированного состояния тела

$$\sigma=\partial W/\partial\gamma=\lambda I_1(\varepsilon)E+2\mu\varepsilon \tag{1.5}$$

где σ — напряжения Яумана, определенные в метрике собственной координатной системы в ее конечном (актуальном) состоянии [3]. Закон состояния, определенный во внешней декартовой системе координат, является нелинейным и принимает вид

$$\mathbf{s}=\partial W/\partial(\nabla\mathbf{R})=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\gamma}^{-1}\cdot\nabla\mathbf{R} \tag{1.6}$$

где $\mathbf{s}$ — несимметричный тензор напряжений Пиола, а $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ — нелинейные функции тензора $\nabla\mathbf{R}$. Из (1.5) и (1.6) следует зависимость между тензорами напряжений Пиола и Яумана $\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}^T=\boldsymbol{\sigma}^2$. Закон состояния (1.6) исследован в [1, 2], где он интерпретирован как нелинейный закон, определяющий «полулинейный» материал. Очевидно, что физические соотношения (1.5) для этого материала соответствуют закону Гука.

В приложениях (см. п. 3) в качестве характеристики деформированного состояния используется тензор конечной деформации Коши — Грина

$$\mathbf{e}={}^1/_2(\mathbf{G}-\mathbf{E})={}^1/_2(\boldsymbol{\gamma}^2-\mathbf{E}) \tag{1.7}$$

Для среды Гука при конечных деформациях упругий потенциал определяют в виде $W={}^1/_2[\lambda I_1{}^2(\mathbf{e})+2\mu I_1(\mathbf{e}^2)]$. Однако в этом случае закон состояния в метрике деформированного тела является нелинейным

$$\boldsymbol{\sigma}=\partial W/\partial\boldsymbol{\gamma}=[\lambda I_1(\mathbf{e})\mathbf{E}+2\mu\mathbf{e}]\cdot\boldsymbol{\gamma} \tag{1.8}$$

Форма закона состояния такого квазилинейного материала во внешней системе координат имеет вид (1.6), но тензор напряжений Яумана в (1.6) определяется по (1.8), а не по (1.5). Поскольку тензор деформации Коши — Грина $\mathbf{e}$ (1.7) можно рассматривать как первое приближение в разложении тензора технической деформации ε (1.4) в ряд по степеням тензора $\nabla\mathbf{u}$, то при относительно небольших деформациях теории полулинейного и квазилинейного материалов должны приводить к достаточно согласованным результатам.

Условия стационарности (1.2) функционала Лагранжа П при условии $\mathbf{u}=\mathbf{u}_n{}^0$ на Γ_1 дают разрешающие уравнения теории упругости в координатах Лагранжа $\mathbf{R}$:

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\gamma}^{-1}\cdot\nabla\mathbf{R})-\mathbf{p}=0 \tag{1.9}$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{s}=\mathbf{p}_n{}^0 \text{ на } \Gamma_2 \tag{1.10}$$

и представляют собой уравнения равновесия в области Ω и на части Γ_2 ее границы, записанные в базисе внешней системы координат. Для полулинейного материала (среда Гука) тензор $\boldsymbol{\sigma}$ в (1.9) определяется по (1.5), а для квазилинейного материала — по (1.8).

2. Принцип стационарности дополнительной энергии. При воздействии на тело мертвых объемных сил $\mathbf{p}_0$ имеем

$$V=-\mathbf{p}_0\cdot\mathbf{R},\quad \mathbf{p}=\partial V/\partial\mathbf{R}=-\mathbf{p}_0 \tag{2.1}$$

Принцип стационарности дополнительной энергии для полулинейного материала при условии (2.1) был сформулирован впервые в [4]. Основой для его формулировки служат канонические преобразования [5] вариационной задачи Лагранжа (1.2). При этом предполагается, что определяющие уравнение состояния (1.6) можно однозначно разрешить относительно компонент тензора $\nabla\mathbf{R}$. Поскольку из (1.6) следует

$$\nabla\mathbf{R}=\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{-1}\cdot\mathbf{s} \tag{2.2}$$

то необходимо лишь однозначно определить тензор $\boldsymbol{\gamma}$ через напряжения $\boldsymbol{\sigma}$ или $\mathbf{s}$. Для полулинейного материала Гука из условия (1.5) с учетом (1.4) это определение $\boldsymbol{\gamma}$ через $\boldsymbol{\sigma}$ выполняется однозначно и весьма просто. Для квазилинейного материала из условия (1.8) с учетом (1.7) нельзя однозначно определить тензор $\boldsymbol{\gamma}$ через напряжения Яумана. Действительно, оператор прямого преобразования $\boldsymbol{\gamma}\to\boldsymbol{\sigma}$ вырожден, так как $\boldsymbol{\sigma}=0$

при $\gamma=0$ и $\gamma=\pm E$. Таким образом, обратное соотношение (2.2) не определяется через напряжения однозначно и однозначное определение дополнительной работы деформации невозможно.

Для полулинейного материала производящая функция W^* обратного определяющего соотношения Гука (дополнительный упругий потенциал) имеет вид [1, 4]: $W^*=\mathbf{s}^T\cdot\cdot\nabla\mathbf{R}-W=\bar{W}(\boldsymbol{\sigma})+I_1(\boldsymbol{\sigma})$, $\nabla\mathbf{R}=\partial W^*/\partial\mathbf{s}$. Тогда принцип стационарности дополнительной энергии сводится к вариационному уравнению

$$\delta D=\delta\left[\iiint\limits_{\Omega} W^*\,d\Omega-\iint\limits_{\Gamma_2}\mathbf{n}\cdot\mathbf{s}\cdot\mathbf{u}_n{}^0\,d\Gamma\right]=0 \tag{2.3}$$

где D — функционал над тензором напряжений Пиола, причем варьируемые напряжения $\mathbf{s}$ должны удовлетворять уравнениям равновесия

$$\nabla\cdot\mathbf{s}=\mathbf{p}_0 \text{ в } \Omega \tag{2.4}$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{s}=\mathbf{p}_n{}^0 \text{ на } \Gamma_2 \tag{2.5}$$

Если внешние объемные силы $\mathbf{p}$ не являются мертвыми, а потенцил есть квадратичная функция радиус-вектора $\mathbf{R}$ вида

$$V=-\mathbf{p}_0\cdot\mathbf{R}+{}^1/_2\varkappa\mathbf{R}\cdot\mathbf{R},\quad \mathbf{p}=\partial V/\partial\mathbf{R}=-\mathbf{p}_0+\varkappa\mathbf{R}$$

где $\varkappa(\xi_i)$ — положительная скалярная функция, то соотношение между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{R}$ можно обратить:

$$V^*=\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}-V=(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0)^2/(2\varkappa),\quad \mathbf{R}=\partial V^*/\partial\mathbf{p} \tag{2.6}$$

Тогда, выполняя инволюционные преобразования Фридрихса [5] исходной задачи Лагранжа (1.2), можно сформулировать принцип стационарности дополнительной энергии в виде

$$\delta D^*=\delta\left[\iiint\limits_{\Omega}(W^*+V^*)\,d\Omega-\iint\limits_{\Gamma_1}\mathbf{n}\cdot\mathbf{s}\cdot\mathbf{u}_n{}^0\,d\Gamma\right]=0 \tag{2.7}$$

где D^* — функционал над $\mathbf{s}$, причем предварительное условие (2.4) теперь не является необходимым, так как с учетом (2.4) и (2.6) можно записать

$$V^*=(\nabla\cdot\mathbf{s}+\mathbf{p}_0)^2/(2\varkappa) \tag{2.8}$$

Естественные условия стационарности функционала D^* приводят к разрешающим уравнениям в напряжениях, которые представляют собой условия непрерывности перемещений в Ω и на Γ:

$$\nabla(\varkappa^{-1}(\nabla\cdot\mathbf{s}+\mathbf{p}_0))=\partial W/\partial\mathbf{s} \text{ в } \Omega$$

$$\varkappa^{-1}(\nabla\cdot\mathbf{s}+\mathbf{p}_0)=\mathbf{u}_n{}^0 \text{ на } \Gamma_1$$

Учитывая (2.8), формулировку (2.7) можно рассматривать как результат применения метода штрафных функций [5] к задаче (2.3), (2.4). Тогда штрафная функция имеет вид $1/(2\varkappa)$, а штрафной член в (2.7) интерпретируется как дополнительный потенциал некоторых условных объемных сил.

3. Гибкие нити и мембраны. В качестве примера рассматривается задача об изгибе нити, которая исследуется как одномерный объект. За материальную координату принимается значение параметра ξ, который совпадает с внешней координатой x нити в ее исходном прямолинейном положении. Метрика деформированного состояния нити определяется скалярным параметром $\gamma=d\eta/d\xi=[(d\mathbf{R}/d\xi)\cdot(d\mathbf{R}/d\xi)]^{1/2}$, где $d\eta$ — элемент нити в ее актуальном положении. Упругий потенциал при полулинейной постановке задачи определяется в виде

$$W=\sigma_0(\gamma-1)+{}^1/_2c(\gamma-1)^2 \tag{3.1}$$

где σ_0 — начальное натяжение нити, а c — жесткость ее поперечного сечения, которая считается постоянной. Закон состояния в собственной системе координат, связанной с нитью, представляется линейной зависимостью Гука при одноосном растяжении

$$\sigma=\partial W/\partial\gamma=\sigma_0+c(\gamma-1) \tag{3.2}$$

где усилие Яумана σ есть модуль продольной силы. Усилия Пиола

$$\mathbf{s}=\partial W/\partial(\mathbf{R}')=(\sigma/\gamma)d\mathbf{R}/d\xi,\quad \sigma=(\mathbf{s}\cdot\mathbf{s})^{1/2} \tag{3.3}$$

представляют собой вектор продольной силы в базисе внешней декартовой системы координат (x, y, z).

Разрешающее уравнение (1.9) для задачи о гибкой нити принимает вид

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\sigma}{\gamma}\frac{d\mathbf{R}}{d\xi}\right)-\mathbf{p}=0 \tag{3.4}$$

или с учетом (3.2) в полулинейной постановке

$$\frac{d}{d\xi}\left[\left(\frac{\sigma_0-c}{\gamma}+c\right)\frac{d\mathbf{R}}{d\xi}\right]-\mathbf{p}=0 \tag{3.5}$$

Отсюда следует, что при начальном натяжении нити $\sigma_0=c$ уравнение равновесия (3.5) линейно.

При квазилинейной постановке задачи упругий потенциал имеет вид $W=$ $={}^1/_2\sigma_0(\gamma^2-1)+{}^1/_8c(\gamma^2-1)^2$ и зависимость продольной силы σ от относительной деформации $\varepsilon=d\eta/d\xi-1$ нелинейна

$$\sigma=(\partial W/\partial e)(\partial e/\partial\gamma)=[\sigma_0+{}^1/_2c(\gamma^2-1)]\gamma \tag{3.6}$$

где $e={}^1/_2(\gamma^2-1)$ — деформация Коши — Грина.

Уравнения (3.3) и (3.4) сохраняют свой вид для квазилинейного материала. Однако с учетом (3.6) из (3.4) следует разрешающее уравнение вида

$$\frac{d}{d\xi}\left[\left(\sigma_0+\frac{c}{2}e\right)\frac{d\mathbf{R}}{d\xi}\right]-\mathbf{p}=0 \tag{3.7}$$

В современной расчетной практике [6] уравнение равновесия гибкой нити формулируется в виде (3.7). Однако такая формулировка лишь приближенно может рассматриваться как физически линейная постановка задачи, а ее канонические преобразования не выполняются однозначно.

Дополнительный упругий потенциал W^* с учетом (3.1), (3.2) и (3.3) для полулинейной задачи определяется в виде $W^*=(d\mathbf{R}/d\xi)\cdot\mathbf{s}-W=(\sigma-\sigma_0)^2/(2c)+\sigma$. Принцип стационарности дополнительной энергии при мертвой нагрузке $\mathbf{p}=-\mathbf{p}_0$ сводится к утверждению о стационарности функционала.

$$D(\mathbf{s})=\int\limits_\Omega[{}^1/_2(\sigma-\sigma_0)^2/c+\sigma]d\xi,\qquad \sigma=(\mathbf{s}\cdot\mathbf{s})^{1/2} \tag{3.8}$$

при дополнительных условиях равновесия

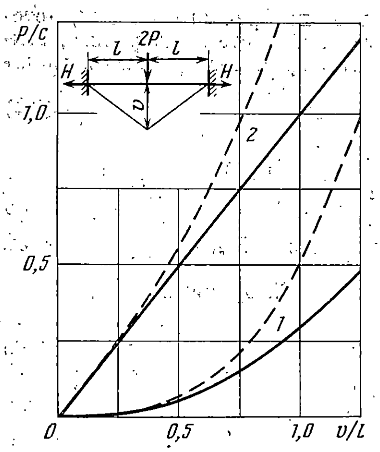
$$d\mathbf{s}/d\xi+\mathbf{p}_0=0 \tag{3.9}$$

Умножая квадратичную невязку уравнений равновесия (3.9) на штрафную функцию вида $1/(2\varkappa)$, можно записать

$$D^*(\mathbf{s})=\int\limits_\Omega\left[\frac{(\sigma-\sigma_0)^2}{2c}+\sigma+\frac{1}{2\varkappa}\left(\frac{d\mathbf{s}}{d\xi}+\mathbf{p}_0\right)^2\right]d\xi$$

Вектор усилий $\mathbf{s}$, сообщающий стационарное значение этому функционалу, будет удовлетворять уравнениям равновесия в предельном случае $\varkappa\to0$. Штрафная функция $\varkappa$ может быть интерпретирована как жесткость некоторого условного распределенного упругого основания нити.

На фиг. 1 приведена зависимость между относительным вертикальным перемещением v/l и относительной силой P/c при плоской деформации нити длиной $2l$, загруженной вертикальной сосредоточенной силой $P_y=2P$ в центре пролета, при $\xi=l$. Пунктирные линии соответствуют расчетам по традиционной квазилинейной теории (уравнение (3.7)), а сплошные линии — расчетам по полулинейной теории (уравнение (3.5)). Кривые *1* получены при отсутствии начального натяжения $\sigma_0=0$, а кривые *2* — для случая $\sigma_0=c$. При относительно малых перемещениях $v/(2l)<0{,}1$ различие в решениях невелико.



При полулинейной постановке возможно решение задачи на основе метода сил. Из решения уравнений равновесия (3.9) следует $s_y=P$, $s_x=H$, где распор H — неизвестная постоянная. Тогда дополнительная энергия D по (3.8) определяется через H и условия стационарности $dD/dH=0$ приводят к уравнениям метода сил.

Подобным образом можно получить разрешающие уравнения для задачи о конечных деформациях гибких мембран. Удельная энергия деформации гибкой мембраны определяется выражением (1.3), где собственное пространство (ξ_1, ξ_2) двумерно, а внешнее пространство (x_1, x_2, x_3) трехмерно. Тогда меры деформации определяются в виде $\gamma=G^{1/2}$, $G_{ij}=(\partial x_k/\partial\xi_i)\cdot(\partial x_k/\partial\xi_j)$ $(i, j=1, 2;\ k=1, 2, 3)$. Физические определяющие соотношения между компонентами технической деформации ε_{ij} и цепными условиями Яумана σ_{ij} определяются соотношениями полулинейного закона состояния для плоской задачи теории упругости. Покомпонентная запись тензора γ для плоской задачи теории упругости полулинейного материала приведена в [1]. Разрешающие уравнения теории гибких мембран в символической тензорной записи имеют вид (1.9), однако их покомпонентная запись весьма громоздка. Существующие теории расчета гибких мембран основаны на квазилинейной постановке задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
2. *Лурье А. И.* Теория упругости для полулинейного материала.— ПММ, 1968, т. 32, вып. 6, с. 1053—1069.
3. *Veubeke F. B. de.* A new variational principle for finite elastic displacements.— Intern. J. Eng. Sci., 1972, v. 10, № 9, p. 745—763.
4. *Зубов Л. М.* Принцип стационарности дополнительной работы в нелинейной теории упругости.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 2, с. 241—245.
5. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. М.— Л.: Гостехиздат, 1951. 476 с.
6. *Шулькин Ю. Б.* Теория упругих стержневых конструкций. М.: Наука, 1984. 271 с.

Ленинград

Поступила в редакцию 18.VI.1985