МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1986

УДК 531.53

К ВОПРОСУ О МАЯТНИКЕ В. Н. ЧЕЛОМЕЯ

КУРБАТОВ А. М., ЧЕЛОМЕЙ С. В., ХРОМУШКИН А. В.

Известно, что центр тяжести механической системы в статике стремится занять такое устойчивое положение, при котором потенциальная энергия этой системы будет минимальной. В динамике этот принцип иногда нарушается. Состояние динамического равновесия некоторых физических систем может требовать не минимума, а максимума потенциальной энергии. Примером тому может служить устойчивое положение «перевернутого» маятника с вибрирующей точкой подвеса [1]. В [2] указанное явление, возникающее, на первый взгляд, вроде бы только в механических системах, обобщено на достаточно широкий класс упругих систем и показано, что высокочастотное воздействие может превратить статически неустойчивый стержень в динамически устойчивую систему.

В 1983 г. была опубликована работа [3], посвященная исследованию влияния высокочастотных воздействий на различные механические и упругие системы. В ней, в частности, рассматривалась механическая колебательная система с двумя степенями свободы, состоящая из прямого стержня и шайбы, надетой на этот стержень с небольшим зазором. Шайба могла свободно перемещаться по стержню. Автором экспериментально и с помощью прямых расчетов на ЭВМ было показано, что воздействие высокочастотных вибраций на шарнирное основание стержня может привести к возникновению устойчивого его «перевернутого» положения, причем шайба будет находиться на оси этого стержня в состоянии динамического равновесия. Стержень при этом совершает малые, практически незаметные колебания относительно вертикали системы. Впервые это явление было открыто и описано в [3] академиком В. Н. Челомеем. Поэтому в дальнейшем эту механическую систему будем называть «маятником Челомея».

Система дифференциальных уравнений, описывающая движение маятника Челомея, имеет вид

$$x^{\cdot\cdot}+nx^{\cdot}/m-x\varphi^{\cdot 2}+(g-ap^2\cos pt)\cos\varphi=0$$

$$(I_0+I_1+mx^2)\varphi^{\cdot\cdot}+k\varphi^{\cdot}+2mxx^{\cdot}\varphi^{\cdot}-(Ml_1+mx)(g-ap^2\cos pt)\sin\varphi=0 \quad (1)$$

где I_0 — момент инерции стержня (без шайбы) относительно оси вращения, I_1+mx^2 — момент инерции шайбы, m — масса шайбы, x — координата шайбы, отсчитываемая вдоль оси стержня, φ — угол поворота стержня при колебаниях, M — масса стержня, l_1 — расстояние от центра массы стержня до его оси вращения, k — коэффициент трения всей системы, n — коэффициент трения шайбы о стержень, p — частота колебаний шарнирной опоры стержня, a — амплитуда вертикальных перемещений шарнирной опоры стержня, g — ускорение земного притяжения, t — время.

Поскольку частота вибраций основания стержня p велика по сравнению с единицей, то можно считать, что в системе одновременно присутствуют два типа времени — медленное t и быстрое pt, а следовательно, два типа движения — медленное и быстрое. Исследование таких систем удобнее всего проводить при помощи методов усреднения [4—6]. Применяя к системе дифференциальных уравнений (1) приближенный асимптотический метод сведения уравнений к уравнениям, содержащим только медленное время [6], получим в первом приближении

$$\xi_1^{\cdot\cdot}+\alpha_1\xi_1^{\cdot}+\alpha_2\cos\xi_2-\xi_1\xi_2^{\cdot 2}-{}^1/_2(\alpha_9+\alpha_{10}\xi_1)\{\xi_1(\alpha_9+\alpha_{10}\xi_1)-\alpha_3+$$

$$+2\alpha_4\xi_1^2[{}^1/_2\alpha_3-\xi_1(\alpha_9+\alpha_{01}\xi_1)]\}\sin^2\xi_2=0 \quad (2)$$

$$\xi_2^{\cdot\cdot}+\alpha_6\xi_2^{\cdot}+\alpha_5\xi_1\xi_1^{\cdot}\xi_2^{\cdot}-(\alpha_7+\alpha_8\xi_1)\sin\xi_2-$$

$$-{}^1/_2\{\alpha_3\alpha_5(\alpha_9+\alpha_{10}\xi_1)\xi_1+\alpha_3\alpha_{10}-(\alpha_9+\alpha_{10}\xi_1)^2+$$
$$+2\alpha_4\xi_1(\alpha_9+\alpha_{10}\xi_1)[{}^1/_2\xi_1(\alpha_9+\alpha_{10}\xi_1)-\alpha_3-\alpha_3\alpha_5\xi_1^2]\}\sin\xi_2\cos\xi_2=0$$

Здесь $\xi_1=\xi_1(t)$ — функция медленного времени для $x=x(t, pt)$, $\xi_2=\xi_2(t)$ — для $\varphi=\varphi(t, pt)$, а коэффициенты α_i $(i=1, 2, \dots, 10)$ определяются выражениями

$$\alpha_1=n/m,\ \alpha_2=g,\ \alpha_3=ap,\ \alpha_4=m/(I_0+I_1)$$
$$\alpha_5=2\alpha_4,\ \alpha_6=k/(I_0+I_1),\ \alpha_7=Ml_1g/(I_0+I_1)$$
$$\alpha_8=mg/(I_0+I_1),\ \alpha_9=Ml_1ap/(I_0+I_1),\ \alpha_{10}=map/(I_0+I_1)$$

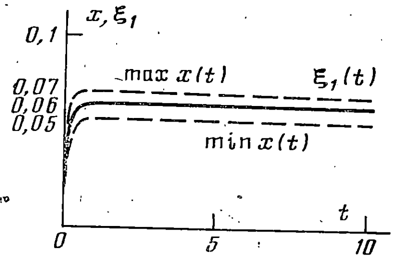
С учетом влияния быстрого времени с точностью до величин порядка $1/p$ переменные x, ξ_1, φ и ξ_2 связаны соотношениями

$$x=\xi_1+\varepsilon u_1,\quad \varphi=\xi_2+\varepsilon u_2 \tag{3}$$
$$u_1=-\alpha_3\cos\tau\cos\xi_2,\ u_2=(\alpha_9+\alpha_{10}\xi_1)\cos\tau\sin\xi_2$$
$$\tau=pt,\quad \varepsilon=1/p$$

Как показали расчеты на ЭВМ, проведенные для систем дифференциальных уравнений (1) и (2), шайба действительно может иметь динамически устойчивую точку на оси стержня в его перевернутом положении.

Результаты расчетов показаны на фигуре для следующих числовых значений параметров системы (x, ξ_1 — в м, t — в с): $M=0{,}4\cdot10^{-4}$ кг, $m=0{,}4\cdot10^{-6}$ кг, $a=0{,}01$ м, $l=0{,}1$ м, $l_1=0{,}05$ м, $I_0=Ml^3/3$, $I_1=0$, $p=2364$ Гц, $k=10^{-6}$ кг·м²/с, $n=300$ кг/с, $g=9{,}8$ м/с², $\xi_1(0)=0{,}0063$ м, $\xi_1^{\boldsymbol{\cdot}}(0)=17$ м/с, $\xi_2(0)=0{,}48\cdot10^{-3}$, $\xi_2^{\boldsymbol{\cdot}}(0)=-0{,}1396$ с⁻¹.

При решении системы дифференциальных уравнений (1) начальные условия пересчитывались по формулам (3). На фигуре не показаны малые высокочастотные вибрации шайбы около ее устойчивого положения, а отмечены пунктиром только их максимальные и минимальные значения. Для сравнения сплошной линией показано приближенное решение ξ_1 для системы дифференциальных уравнений (2), представляющее собой медленное усредненное движение шайбы.



Как видно из приведенных графиков, совпадение решений исходной системы дифференциальных уравнений (1) и системы (2), полученной приближенным методом, весьма хорошее. Аналогичные результаты имеют место и при других значениях параметров системы. Таким образом, система дифференциальных уравнений медленного времени (2) с высокой точностью описывает поведение исходной системы.

Для приведенных числовых значений расчеты на ЭВМ показали, что функция $\xi_2(t)$ имеет гармонический характер с частотой ~40 Гц и амплитудой установившегося движения $\pm0{,}0735$ рад.

Исходя из полученных результатов устойчивые решения для ξ_1 и ξ_2 следует искать в области значений $\xi_1=C=\mathrm{const}$, $\xi_2=A\cos(\omega t+\theta)$, где C, A, ω, θ — неизвестные величины, подлежащие определению, причем $A\ll1$.

Поскольку A мало, то, приближенно полагая $\cos\xi_2\approx1$, $\sin\xi_2\approx\xi_2$ и проводя усреднение по периоду частоты колебаний стержня ω, получим систему двух алгебраических уравнений, позволяющую достаточно просто определить искомые устойчивые значения для ξ_1 и ξ_2. Неизвестные A и θ находятся с помощью начальных условий $\xi_2(0)$ и $\xi_2^{\boldsymbol{\cdot}}(0)$.

Сравнение полученных таким образом результатов с результатами прямого решения на ЭВМ системы дифференциальных уравнений (2) приведено в таблице при различных значениях параметров системы (C, $\xi_1^{\boldsymbol{\cdot}}$ — в м; A, ξ_2 — в град; ω — в с⁻¹).

№	C	A	ω	ξ_1	ξ_2	ω
1	0,0621	4,20	248,76	0,0635	4,18	246,00
2	0,0748	6,62	132,16	0,0784	6,47	128,50
3	0,01263	7,20	84,46	0,01340	7,06	79,05

В первой колонке таблицы дан номер варианта значений параметров, в последующих трех — приведены результаты решения системы алгебраических уравнений устойчивости, в трех последних колонках представлены результаты численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (2).

Таким образом, изложенный метод позволяет с достаточной для любых технических приложений точностью аналитически определять решения для систем типа маятника Челомея. Проведенные расчеты показывают, что шайба на стержне действительно может иметь точки устойчивого динамического равновесия, полученные экспериментально в [3].

Авторы благодарят И. Г. Книжника за помощь при расчетах на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Капица П. Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса.— Ж. эксперим. и теор. физ. (ЖЭТФ), 1951, т. 21, вып. 5, с. 588–597.
2. *Челомей В. Н.* О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибрации.— Докл. АН СССР (ДАН СССР), 1956, т. 110, № 3, с. 345–347.
3. *Челомей В. Н.* Парадоксы в механике, вызываемые вибрациями.— Докл. АН СССР (ДАН СССР), 1983, т. 270, № 1, с. 62–67.
4. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1955. 408 с.
5. *Боголюбов Н. Н. (мл.), Садовников Б. И.* Об одном варианте метода усреднения.— Вестн. МГУ. Сер. 3, Физика, астрономия, № 3, 1961, с. 24–34.
6. *Челомей С. В.* Динамическая устойчивость при высокочастотном параметрическом возбуждении.— Докл. АН СССР (ДАН СССР), 1981, т. 257, № 4, с. 853–858.

Москва

Поступила в редакцию
24.VII.1986