МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1986

УДК 531.53

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КВАЗИРАВНОВЕСНЫХ ПОЛОЖЕНИЙ МАЯТНИКА В. Н. ЧЕЛОМЕЯ

КИРГЕТОВ А. В.

В 1983 г. опубликована работа [1], в которой описывается ряд парадоксальных явлений, замеченных в экспериментах с системами, содержащими вибрирующие элементы. Одним из таких явлений является зависание шайбы на маятнике, представляющем собой стержень, шарнирно закрепленный на вибрирующем основании, когда маятник принимает вертикальное положение. В [2, 3] получены условия существования и устойчивости подобных положений квазиравновесия, а в [2] дополнительно проведен анализ их расположения. В публикуемой работе предлагается анализ этих условий, полученных другим способом, нежели в [2, 3], а также рассматривается случай наличия нескольких шайб на стержне.

1. Случай одной шайбы (материальной точки). В плоскости Oyz (фиг. 1) рассмотрим абсолютно твердый стержень массы M, один из концов которого шарнирно закреплен в точке O' с координатами (y, z), совершающей колебания в плоскости Oyz по закону $y=y(t)$, $z=z(t)$. При этом предполагается, что $y(t)$, $z(t)$ являются почти-периодическими функциями времени с нулевым средним $\langle y(t)\rangle=\langle z(t)\rangle=0$. Здесь и далее угловыми скобками обозначено усреднение по времени

$$\langle f(t)\rangle=\lim\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)\,dt,\quad T\to\infty$$

Будем считать, что колебания основания маятника являются высокочастотными малой амплитуды, а именно, что $\sup_t|q(t)|\ll 1$, $\sup_t|q^{\cdot}(t)|\sim 1$, $\sup_t|q^{\cdot\cdot}(t)|\gg 1$, где $q(t)=y(t)$, $z(t)$. Пусть по стержню может свободно скользить материальная точка C массы m. Рассмотрим движение такой системы под влиянием силы тяжести, действующей в отрицательном направлении оси Oz.

Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид

$$H={}^1/_2p_\varphi{}^2/(I+mx^2)+{}^1/_2p_x{}^2/m+ \\ +(g+z^{\cdot\cdot})(ML+mx)\cos\varphi+y^{\cdot\cdot}(ML+mx)\sin\varphi \tag{1.1}$$

где p_φ, p_x — обобщенные импульсы, соответствующие координатам φ, x, φ — угол отклонения стержня от вертикали Oz, x — расстояние от точки O' до C, M — масса стержня, m — масса точки C, L — расстояние от точки O' до центра масс стержня, g — ускорение свободного падения.

Для исследования движения данной системы воспользуемся асимптотическим методом Н. Н. Боголюбова. Непосредственно усреднить гамильтониан (1.1) нельзя, поскольку он содержит большие по модулю функции $y^{\cdot\cdot}(t)$, $z^{\cdot\cdot}(t)$. Чтобы избавиться от них, сделаем каноническое преобразование, заданное производящей функцией

$$S=P_\varphi\varphi+P_xx-(ML+mx)(z^{\cdot}\cos\varphi+y^{\cdot}\sin\varphi)$$

Сохраняя для новых переменных старые обозначения, преобразованный гамильтониан запишем в виде

$$H^*={}^1/_2[p_\varphi-(ML+mx)(-z^{\cdot}\sin\varphi+y^{\cdot}\cos\varphi)]^2/(I+mx^2)+ \\ +{}^1/_2[p_x-m(z^{\cdot}\cos\varphi+y^{\cdot}\sin\varphi)]^2/m+g(ML+mx)\cos\varphi$$

В преобразованном гамильтониане все члены порядка единицы, а так как частоты колебаний $y(t)$, $z(t)$ большие, то законно усреднение по явно входящему времени

$$\langle H^*\rangle={}^1/_2 p_\varphi^2/(I+mx^2)+{}^1/_2 p_x^2/m+\Pi^* \tag{1.2}$$

$$\Pi^*=g(ML+mx)\cos\varphi+{}^1/_2(ML+mx)^2(\langle z^{\cdot 2}\rangle\sin^2\varphi+$$
$$+2\langle y^\cdot z^\cdot\rangle\sin\varphi\cos\varphi+\langle y^{\cdot 2}\rangle\cos^2\varphi)/(I+mx^2)+$$
$$+{}^1/_2 m(\langle z^{\cdot 2}\rangle\cos^2\varphi+2\langle y^\cdot z^\cdot\rangle\sin\varphi\cos\varphi+\langle y^{\cdot 2}\rangle\sin^2\varphi)$$

где через Π^* обозначен приведенный потенциал. Заметим, что аналогичный потенциал получен в [3] в предположении, что $y=b\cos(\omega t+\varepsilon)$, $z=a\sin\omega t$.

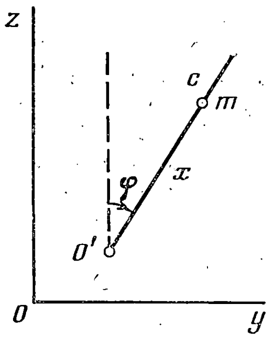
Положения равновесия системы, заданной гамильтонианом (1.2), даются системой уравнений

$$\frac{\partial\Pi^*}{\partial\varphi}=-g(ML+mx)\sin\varphi+$$
$$+\frac{M^2L^2-mL+2MmLx}{I+mx^2}[(\langle z^{\cdot 2}\rangle-\langle y^{\cdot 2}\rangle)\sin\varphi\cos\varphi+\langle y^\cdot z^\cdot\rangle\cos 2\varphi)]=0$$
$$\frac{1}{m}\frac{\partial\Pi^*}{\partial x}=g\cos\varphi-\frac{(ML+mx)(MLx-I)}{(I+mx^2)^2}[\langle z^{\cdot 2}\rangle\sin^2\varphi+ \tag{1.3}$$
$$+2\langle y^\cdot z^\cdot\rangle\sin\varphi\cos\varphi+\langle y^{\cdot 2}\rangle\cos^2\varphi]=0$$

Из выражений (1.3) следует, что $\varphi=0$ будет положением равновесия, если $\langle y^\cdot z^\cdot\rangle=0$ и следующее уравнение имеет решение относительно x:

$$g-(ML+mx)(MLx-I)\langle y^{\cdot 2}\rangle/(I+mx^2)^2=0 \tag{1.4}$$

Соотношение $\langle y^\cdot z^\cdot\rangle=0$ можно заменить условием $M^2L^2-mI+2MmLx=0$. Это положение равновесия неустойчиво, так как для него $\partial^2\Pi^*/\partial\varphi^2<0$.



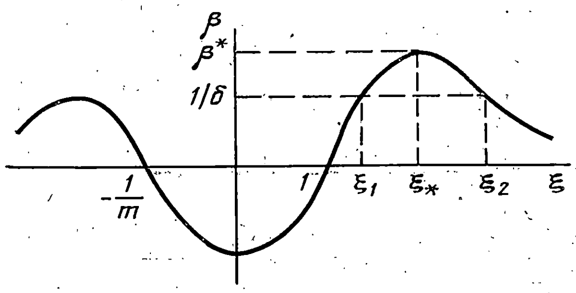
Фиг. 1

Выражение $\langle y^\cdot z^\cdot\rangle=0$ дает ограничение на форму колебаний точки O', которое в дальнейшем будем считать выполненным. Отметим, в частности, что этому ограничению не удовлетворяют прямолинейные колебания точки O', если только $y^\cdot\neq 0$, так как в этом случае $\langle y^\cdot z^\cdot\rangle\neq 0$.

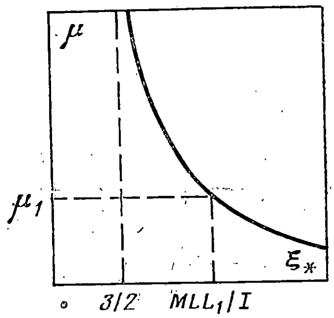
Прежде чем перейти к изучению уравнения (1.4), введем безразмерные параметры $\xi=MLx/I$, $\mu=mI/(M^2L^2)$, $\delta=\langle y^{\cdot 2}\rangle ML/gI$, $\sigma=\langle z^{\cdot 2}\rangle ML/gI$. В этих параметрах уравнение (1.4) имеет вид

$$1-\beta(\xi,\mu)\delta=0,\ \beta(\xi,\mu)=(1+\mu\xi)(\xi-1)/$$
$$/(1+\mu\xi^2)^2 \tag{1.5}$$

Качественный вид графика $\beta=\beta(\xi,\mu)$ при фиксированном μ приведен на фиг. 2. Видно, что если $\delta<1/\beta_*$, то уравнение (1.5) не имеет решений и, следовательно, нет положений равновесия точки C на вертикально стоящем стержне. Когда $\delta=1/\beta_*$, имеется одно положение равновесия $\xi=\xi_*$, а при $\delta>1/\beta_*$ — два положения равновесия ξ_1, ξ_2, причем при δ, стремящемся в бесконечность, одно из положений равновесия стремится к единице, а другое уходит в плюс бесконечность. Для определенности будем считать, что $\xi_1<\xi_*<\xi_2$ и, следовательно, $\beta_\xi'(\xi_1,\mu)>0$, $\beta_\xi'(\xi_2,\mu)<0$. Отметим, в частности, что при чисто вертикальной вибрации стержня $\delta=0$ и, следовательно, положений равновесия нет. Для их существования боковая вибрация должна быть такова, что $\langle y^{\cdot 2}\rangle=gI\delta/ML>gI/ML\beta_*$. Выпишем теперь условия устойчивости положений равновесия $\varphi=0$, $x=I\xi_1/ML$ и $\varphi=0$, $x=I\xi_2/ML$. Поскольку $\partial^2\Pi^*/\partial x\partial\varphi|_{\varphi=0}=0$, то рассматриваемые положения равновесия будут устойчивы, если при $x_i=I\xi_1/ML$ или $x_i=I\xi_2/ML$ выполняются неравенства $\partial^2\Pi^*/\partial x^2|_{\varphi=0,\,x=x_i}>0$, $\partial^2\Pi^*/\partial\varphi^2|_{\varphi=0,\,x=x_i}>0$.



Фиг. 2



Фиг. 3

Эти неравенства могут быть переписаны через безразмерные величины в форме — $\beta_\xi'(\xi_i, \mu)>0$; $-1+\alpha(\xi_i, \mu)(\sigma-\delta)>0$ при $i=1$ или $i=2$, где $\alpha(\xi, \mu)=(1-\mu+2\mu\xi)/[(1+\mu\xi^2)(1+\mu\xi)]$.

Как было отмечено ранее, $\beta_\xi'(\xi_1, \mu)>0$ и, следовательно, положение равновесия $\varphi=0$, $\xi=\xi_1$ неустойчиво. В точке $\xi=\xi_2$ $\beta_\xi'(\xi_2, \mu)<0$ и, кроме того, $\alpha(\xi_2, \mu)>0$, так как $\xi_2>1$, поэтому положение равновесия $\varphi=0$, $\xi=\xi_2$ устойчиво, если

$$\sigma>\delta+1/\alpha(\xi_2, \mu) \tag{1.6}$$

и неустойчиво при нарушении этого неравенства. Через размерные переменные условие (1.6) переписывается в виде

$$\langle z^{\cdot 2}\rangle>\langle y^{\cdot 2}\rangle+g(ML+mx_2)(I+mx_2^2)/(M^2L^2-mI+2MmLx_2)$$

Далее, положение равновесия $\varphi=0$, $\xi=\xi*$ при $\delta=1/\beta_*$ неустойчиво, так как $\beta_{\xi\xi}''(\xi_*, \mu)\neq 0$ и, следовательно, разложение функции Π^* в окрестности точки $x_*=I\xi_*/ML$ начинается с членов третьего порядка.

Таким образом, установлено, что величина $\xi*$ определяет нижнюю границу устойчивых положений равновесия (если, конечно, выполнено условие (1.6), а величина $1/\beta*$ — нижнюю границу δ, при которой появляются положения равновесия. Поскольку ξ_* и β_* являются функциями параметра μ, то целесообразно изучить их изменение в зависимости от этого параметра.

Рассмотрим зависимость $\xi_*=\xi*(\mu)$. Точки экстремума функции $\beta=\beta(\xi, \mu)$ при фиксированном μ даются уравнением

$$\beta_\xi'=[(1+\mu\xi^2)(2\mu\xi+1-\mu)-4\mu\xi(1+\mu\xi)(\xi-1)]/(1+\mu\xi^2)^3=0$$

которое с учетом того, что $1+\mu\xi^2>0$, можно привести к виду

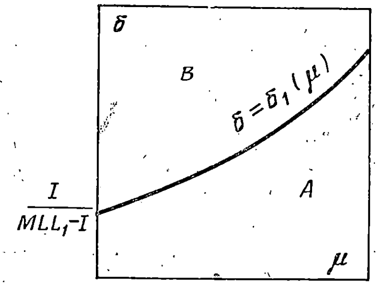
$$\mu^2\xi^2(3+2\xi)-\mu(3\xi^2-6\xi+1)+1=0 \tag{1.7}$$

Величина $\xi*$ является корнем этого уравнения и, поскольку $\xi*>1$, то, исходя из физических соображений, достаточно ограничиться рассмотрением области $\mu>0$, $\xi>1$. В этой области уравнение (1.7) не имеет решений при $\xi<{}^3/_2$ и однозначно разрешимо относительно μ при $\xi>{}^3/_2$. Выражение μ через $\xi*$ дается следующей формулой:

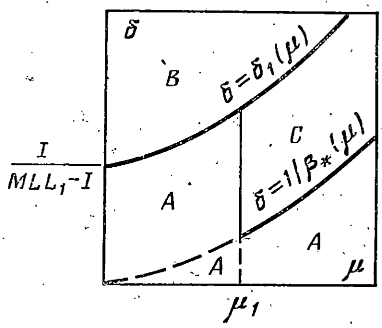
$$\mu=\{3\xi_*^2-6\xi_*+1-[(3\xi_*^2-6\xi_*+1)^2-4\xi_*^2(3-2\xi_*)]^{1/2}\}/[2\xi_*^2(3-2\xi_*)] \tag{1.8}$$

Качественный вид этой зависимости приведен на фиг. 3.

Заметим далее, что для стержня конечной длины L_1, очевидно, должно быть $0\leqslant x\leqslant L_1$ или в эквивалентном виде $0\leqslant\xi\leqslant MLL_1/I$. Вспоминая, что в устойчивом положении равновесия $\xi>\xi*$, можем сделать вывод, что если $MLL_1/I\leqslant{}^3/_2$ или $MLL_1/I>{}^3/_2$, а $\mu<\mu_1$, где значение $\mu_1=\mu(MLL_1/I)$ вычисляется по формуле (1.8), то устойчивых положений равновесия на стержне длины L_1 нет, поскольку в этом случае $\xi_*>MLL_1/I$. Отметим еще тот факт, что если рассматривать однородный стержень, то, так как $L_1=2L$ (L — расстояние от точки O' до центра масс), $I=4ML^2/3$, $MLL_1/I={}^3/_2$ и, следовательно, устойчивых положений равновесия материальной точки C на вертикально стоящем стержне вообще нет.



Фиг. 4



Фиг. 5

Рассмотрим теперь функцию $\beta_*=\beta_*(\mu)$, $\beta_*(\mu)=\beta(\xi_*(\mu),\mu)$, где $\beta(\xi,\mu)$ задается формулой (1.5), а $\xi=\xi_*(\mu)$ является обратной функцией к функции (1.8). Явный вид этой функции весьма сложен, но он поддается довольно простому качественному анализу. Действительно

$$(\beta_*)_\mu'=\beta_\xi'|_{\xi=\xi_*(\mu)}(\xi_*)_\mu'+\beta_\mu'|_{\xi=\xi_*(\mu)}<0$$

поскольку

$$\beta_\xi'|_{\xi=\xi_*(\mu)}=0,\quad \beta_\mu'=\xi(\xi-1)(1-2\xi-\mu\xi^2)/(1+\mu\xi^2)^3<0 \tag{1.9}$$

для любого $\xi>1$ при $\mu>0$. Следовательно, функция $\beta_*=\beta_*(\mu)$ является монотонно убывающей. Кроме того, несложно показать, что $\beta_*(\mu)\to+\infty$ при $\mu\to0$ и $\beta_*(\mu)\to0$ при $\mu\to+\infty$. Отсюда с учетом обозначений для безразмерных величин следует, что при фиксированных ML, I, g минимальный уровень боковой вибрации $\langle y^{\cdot 2}\rangle=gI\delta/ML=gI/ML\beta_*$, при котором появляются устойчивые положения равновесия (если, конечно, выполнено условие (1.6)), монотонно растет вместе с ростом $m=M^2L^2\mu/I$ и стремится в бесконечность, когда $m\to\infty$. Выше определен минимальный уровень $\delta=1/\beta_*$, при котором появляются положения равновесия, но поскольку с ростом δ значение $\xi=\xi_2$, соответствующее устойчивому положению равновесия, монотонно возрастает до бесконечности, то для стержня конечной длины L_1 имеется максимально допустимый уровень $\delta=\delta_1$, при котором в устойчивом положении равновесия значение $\xi_2<MLL_1/I$ находится в пределах стержня. Это значение можно определить из (1.5): $\delta_1=1/\beta(MLL_1/I,\mu)$. Из неравенства (1.9) следует, что $\delta_1=\delta_1(\mu)$ является монотонно возрастающей функцией при $MLL_1/I>1$. Рассматривая аналогично неустойчивое положение $\xi=\xi_1$ при $\mu<\mu_1$, получим, что $\xi_1<MLL_1/I$ при $1/\delta<1/\delta_1$. Если же $\mu>\mu_1$, то $\xi_1<MLL_1/I$ для любого $\delta>1/\beta_*$.

Обобщим теперь все результаты, относящиеся к стержню длины L_1, в виде диаграмм.

В случае $MLL_1/I\leqslant1$ положений равновесия нет, поскольку $\mu_1=\infty$, $\delta_1<0$. Случаи $1<MLL_1/I\leqslant{}^3/_2$, $MLL_1/I>{}^3/_2$ изображены на фиг. 4, 5 соответственно, где область A соответствует отсутствию положений равновесия, B — одному неустойчивому положению равновесия, C — двум положениям равновесия, из которых одно устойчивое и одно неустойчивое при выполнении неравенства (1.6) и два неустойчивых при нарушении этого неравенства. На фиг. 5 μ_1 определяется из (1.8) подстановкой $\xi_*=MLL_1/I$.

Отметим в заключение, что, если в системе присутствуют силы вязкого трения в точке закрепления стержня и между точкой C и стержнем, то расположение положений равновесия усредненной системы не изменится, при этом неустойчивое положение равновесия останется неустойчивым, а устойчивое превратится в асимптотически устойчивое.

2. Случай многих шайб (материальных точек). Рассмотрим теперь более общий случай. Пусть по стержню могут свободно, без трения скользить k точек $C_1,\ldots,C_k$ с массами $m_1,\ldots,m_k$. Гамильтониан такой системы будет иметь вид (суммирование здесь и далее производится по i от 1 до k):

$$H={}^1/_2p_\varphi^2(I+\Sigma m_ix_i^2)^{-1}+\Sigma{}^1/_2p_i^2/m_i+ \tag{2.1}$$
$$+(g+z^{\cdot\cdot})(ML+\Sigma m_ix_i)\cos\varphi+y^{\cdot\cdot}(ML+\Sigma m_ix_i)\sin\varphi$$

где φ — угол отклонения стержня от вертикали Oz, x_i — расстояние от точки O' до C_i. Остальные обозначения те же, что и в п. 1.

Поступая аналогично п. 1, сделаем в гамильтониане (2.1) каноническую замену, заданную производящей функцией $S=P_\varphi\varphi+\Sigma P_i x_i-(z^\bullet\cos\varphi+y^\bullet\sin\varphi)(ML+\Sigma m_i x_i)$, а затем усредним его по времени. В результате (сохраняя для новых переменных старые обозначения) получим

$$\langle H^*\rangle={}^1\!/_2 p_\varphi^2(I+\Sigma m_i x_i)^{-1}+\Sigma{}^1\!/_2 p_i^2/m_i+\Pi^*$$

$$\Pi^*=g(ML+\Sigma m_i x_i)\cos\varphi+{}^1\!/_2(ML+\Sigma m_i x_i)^2(I+\Sigma m_i x_i^2)^{-1}(\langle z^{\bullet 2}\rangle\sin^2\varphi+$$
$$+2\langle y^\bullet z^\bullet\rangle\sin\varphi\cos\varphi+\langle y^{\bullet 2}\rangle\cos^2\varphi)+\Sigma{}^1\!/_2 m_i(\langle z^{\bullet 2}\rangle\cos^2\varphi+$$
$$+2\langle y^\bullet z^\bullet\rangle\sin\varphi\cos\varphi+\langle y^{\bullet 2}\rangle\sin^2\varphi)$$

Положения равновесия системы, заданной гамильтонианом $\langle H^*\rangle$, даются системой уравнений $\partial\Pi^*/\partial\varphi=0$, $\partial\Pi^*/\partial x_s=0$ $(s=1,\ \ldots,\ k)$, где

$$\frac{\partial\Pi^*}{\partial\varphi}=\left[-g(ML+\Sigma m_i x_i)+\left(\frac{(ML+\Sigma m_i x_i)^2}{I+\Sigma m_i x_i^2}-\Sigma m_i\right)(\langle z^{\bullet 2}\rangle-\langle y^{\bullet 2}\rangle)\cos\varphi\right]\sin\varphi+$$
$$+\left(\frac{(ML+\Sigma m_i x_i)^2}{I+\Sigma m_i x_i^2}-\Sigma m_i\right)\langle y^\bullet z^\bullet\rangle(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi)$$

$$\frac{1}{m_s}\frac{\partial\Pi^*}{\partial x_s}=g\cos\varphi+\frac{(ML+\Sigma m_i x_i)(I+\Sigma m_i x_i^2)-x_s(ML+\Sigma m_i x_i)^2}{(I+\Sigma m_i x_i^2)^2}\times$$
$$\times(\langle z^{\bullet 2}\rangle\sin^2\varphi+2\langle y^\bullet z^\bullet\rangle\sin\varphi\cos\varphi+\langle y^{\bullet 2}\rangle\cos^2\varphi)$$

Из этих выражений следует, что $\varphi=0$ будет положением равновесия, если $\langle y^\bullet z^\bullet\rangle=0$, и следующая система уравнений имеет решение относительно $x_1,\ \ldots,\ x_k$:

$$g-\beta_s\langle y^{\bullet 2}\rangle=0\quad(s=1,\ \ldots,\ k)\tag{2.2}$$

$$\beta_s=(ML+\Sigma m_i x_i)[(ML+\Sigma m_i x_i)x_s-(I+\Sigma m_i x_i^2)](I+\Sigma m_i x_i^2)^{-2}$$

Покажем, что если система уравнений $\beta_s=C$, $s=1,\ \ldots,\ k$ имеет решение $x_1^\circ,\ \ldots,\ x_k^\circ$, то $x_1^\circ=\ldots=x_k^\circ$. Действительно, пусть система уравнений $\beta_s=C$, $s=1,\ \ldots,\ k$ имеет решение $x_1^\circ,\ \ldots,\ x_k^\circ$. Тогда корнями уравнения

$$(ML+\Sigma m_i x_i^\circ)[x(ML+\Sigma m_i x_i^\circ)-(I+\Sigma m_i x_i^{\circ 2})](I+\Sigma m_i x_i^{\circ 2})^{-1}=C$$

будут все числа $x=\{x_1^\circ,\ \ldots,\ x_k^\circ\}$, поскольку при подстановке в это уравнение вместо x числа x_s° получим уравнение $\beta_s(x_0)=C$, которое удовлетворяется по условию. Но выписанное уравнение линейно по x и, так как $ML+\Sigma m_i x_i^\circ\neq 0$, имеет единственный корень. Следовательно, $x_1^\circ=\ldots=x_k^\circ$.

Из доказанного утверждения следует, что k материальных точек могут находиться на вертикально стоящем стержне в состоянии равновесия лишь в случае, когда их координаты совпадают. При этом, учитывая, что $\beta_s=\beta_r$, $s,\ r=1,\ \ldots,\ k$, если $x_1=\ldots=x_k=x$, условия равновесия (2.2) могут быть переписаны в виде одного уравнения

$$g-\beta(x)\langle y^{\bullet 2}\rangle=0$$

$$\beta(x)=(ML+x\Sigma m_i)(MLx-I)(I+x^2\Sigma m_i)^{-2}$$

которое совпадает с условием равновесия одной материальной точки с массой $m=\Sigma m_i$.

Анализ, проведенный для одной точки, показывает, что при достаточно большой величине $\langle y^{\bullet 2}\rangle$ имеется два положения равновесия $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$. Выпишем достаточные условия устойчивости положений равновесия $\varphi=0$, $x_1=\ldots=x_k=x^{(1)}$ и $\varphi=0$, $x_1=\ldots=x_k=x^{(2)}$. Поскольку $\partial^2\Pi^*/\partial\varphi\partial x|_{\varphi=0}=0$, то ими будут неравенство

$$\left.\frac{\partial^2\Pi^*}{\partial\varphi^2}\right|_{\varphi=0,x_1=\ldots=x_k=x}=-g(ML+x\Sigma m_i)+\left[\frac{(ML+x\Sigma m_i)^2}{I+x^2\Sigma m_i}-\Sigma m_i\right](\langle z^{\bullet 2}\rangle-\langle y^{\bullet 2}\rangle)>0\tag{2.3}$$

и положительная определенность матрицы

$$\|\partial^2\Pi^*/\partial x_r\partial x_s|_{\varphi=0,\ x_1=\ldots=x_k=x}\|\tag{2.4}$$

где

$$\left.\frac{1}{\langle y^{\bullet 2}\rangle m_s}\frac{\partial^2\Pi^*}{\partial x_s^2}\right|_{\varphi=0,x_1=\ldots=x_k=x}=\frac{m_s(I-MLx)-(ML+x\Sigma m_i)(ML+x\Sigma_{i\neq s}m_i)}{(I+x^2\Sigma m_i)^2}-$$
$$-\frac{4m_s x(I-MLx)(ML+x\Sigma m_i)}{(I+x^2\Sigma m_i)^3}\tag{2.5}$$

$$\frac{1}{\langle y^{\bullet 2}\rangle m_r m_s}\frac{\partial^2\Pi^*}{\partial x_r\,\partial x_s}\Bigg|_{\varphi=0;x_1=\ldots=x_k=x}=\frac{(I+x^2\Sigma m_i)^2-4x(I-MLx)(ML+x\Sigma m_i)}{(I+x^2\Sigma m_i)^3}$$

В выражениях (2.3), (2.5) x принимает значение $x^{(1)}$ или $x^{(2)}$.

Отметим, что условия (2.3), (2.4) являются условиями устойчивости равновесия в случае безударности движения, т. е. когда материальным точкам $C_1, \ldots, C_k$ разрешено свободно проходить друг через друга. Покажем, что при выполнении указанных условий положение равновесия будет устойчивым и в случае, если точкам запрещено проходить друг через друга, т. е. рассматривать движение со столкновениями.

Теорема. Рассмотрим консервативную механическую систему с n степенями свободы. Пусть: 1) $q=0$ – изолированное положение равновесия; 2) потенциальная энергия П имеет минимум в точке $q=0$ и $\Pi(0)=0$; 3) на область возможного движения наложены дополнительные ограничения в виде неравенств $f_i(q_1, \ldots, q_n)\geqslant 0$ $(i=1, \ldots, p)$, такие, что $q=0$ удовлетворяет этим неравенствам, а при ударе системы о границу области возможного движения с учетом наложенных неравенств полная механическая энергия $H=T+\Pi$ не возрастает. Тогда положение равновесия $q=0$ устойчиво.

Доказательство. Введем обозначения: $x=(q_1, \ldots, q_n, q_1^\bullet, \ldots, q_n^\bullet)\in R^{2n}$, B_ε – шар радиуса ε с центром в точке $x=0$ в R^{2n}, ∂B_ε – граница шара B_ε, $\|\ \|$ – стандартная норма в R^{2n}. Рассмотрим любое $\varepsilon>0$. Поскольку $H(x)$ положительно определена в нуле, а ∂B_ε компактна, то существует H_0, такое, что $H_0=\min_{x\in\partial B_\varepsilon}H(x)$. Кроме того, так как $H(x)$ непрерывна и $H(0)=0$, то существует $\delta>0$, такое, что для $x\in B_\delta$ $H(x)<H_0$. Рассмотрим траекторию системы $x=x(t, x_0)$ с начальным условием $x_0\in B_\delta$. Поскольку при наложении и снятии связей $f_i(q)=0$ $(i=1, \ldots, p)$ полная механическая энергия H не возрастает, а во все остальное время система консервативна, то $H(x(t, x_0))\leqslant H(x_0)<H_0$. Отсюда следует, что траектория не выходит на ∂B_ε и, следовательно, во все время движения $\|x(t, x_0)\|<\varepsilon$. Отсюда заключаем, что положение равновесия $x=0$ устойчиво.

В заключение автор приносит глубокую благодарность В. В. Румянцеву, под руководством которого выполнена эта работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Челомей В. Н.* Парадоксы в механике, вызванные вибрацией.– Докл. АН СССР, 1983, т. 270, № 1, с. 62–67.
2. *Меняйлов А. И., Мовчан А. В.* О стабилизации системы маятник – кольцо в условиях вибрации основания.– Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 6, с. 35–40.
3. *Блехман И. И., Молохова О. З.* О квазиравновесных положениях маятника Челомея.– Докл. АН СССР, 1986, т. 287, № 2, с. 290–294.

Москва

Поступила в редакцию
8.VII.1986