МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1986

УДК 531.384

О НЕКОТОРЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЭФФЕКТАХ ТВЕРДОГО ТЕЛА НА АБСОЛЮТНО ШЕРОХОВАТОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

ХОЛОСТОВА О. В.

В движении выпуклого твердого тела неправильной формы на горизонтальной плоскости обнаруживается целый ряд интересных эффектов. Так, например, тело может изменять направление своего вращения вокруг вертикали на противоположное; устойчивость его вращения вокруг вертикали зависит от знака угловой скорости. Задача исследования такого движения известна как задача динамики «кельтского камня». Изучению динамических свойств кельтского камня посвящен целый ряд работ, первая из которых [1] была опубликована еще в конце прошлого века. Краткий обзор этих работ дается в [2].

Публикуемая работа ставит своей целью исследовать динамические свойства твердого тела, опирающегося на выпуклую или вогнутую сферическую поверхность. Поверхность сферы считается абсолютно шероховатой. В предположении, что возможно положение равновесия тела на крайней верхней (или крайней нижней) точке выпуклой (или вогнутой) сферической поверхности, определяются условия устойчивости в линейном приближении такого равновесия и проводится качественный анализ нелинейных колебаний и вращений тела вблизи равновесия. Работа является обобщением результатов [2, 3], где рассматривается движение тела в окрестности равновесия на горизонтальной плоскости.

1. Рассмотрим движение тяжелого твердого тела, ограниченного выпуклой поверхностью S, по неподвижной абсолютно шероховатой сферической поверхности S_1 (выпуклой или вогнутой). Будем считать, что в процессе движения тело касается опорной поверхности одной своей точкой.

Введем абсолютную систему координат $Ox_1y_1z_1$, начало которой совпадает с крайней верхней (крайней нижней) точкой выпуклой (вогнутой) сферической поверхности, а ось Oz_1 направлена вертикально вверх. С телом свяжем систему координат $G\xi\eta\zeta$ с началом в центре масс G, оси $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$ которой направлены вдоль главных центральных осей инерции тела.

Пусть форма тела такова, что касательная плоскость к поверхности S тела в точке пересечения последней с осью $G\eta$ при отрицательных значениях координаты η перпендикулярна этой оси. Тогда возможно такое стационарное движение тела, когда ось $G\eta$ направлена вертикально вверх, а тело вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью ω, опираясь при этом на крайнюю верхнюю (крайнюю нижнюю) точку сферической поверхности. В частности, если $\omega=0$, то имеет место равновесие тела на сфере.

Обозначим через M точку касания тела и опорной поверхности. Пусть m — масса тела, A, B, C — главные центральные моменты инерции тела, h — расстояние от точки M до центра тяжести G и r_1, r_2 — главные радиусы кривизны поверхности тела в точке M в положении равновесия. Обозначим через R радиус опорной сферической поверхности, считая, что $R>0$ для выпуклой поверхности и $R<0$ для вогнутой поверхности. Координаты точки M на поверхности S обозначим через ξ, η, ζ (в системе координат $G\xi\eta\zeta$) и на поверхности S_1 — через x_1, y_1, z_1 (в системе координат $Ox_1y_1z_1$).

Уравнение поверхности S в окрестности точки равновесия в системе координат $G\xi\eta\zeta$ записывается в виде $\eta=-h+(l_1\zeta^2+2l\zeta\xi+l_2\xi^2)/(2r_1r_2)+$ $+O_3(\zeta, \xi)$, где $l_1=r_1\sin^2\alpha+r_2\cos^2\alpha$, $l_2=r_1\cos^2\alpha+r_2\sin^2\alpha$, $l=(r_2-r_1)\times$ $\times\sin\alpha\cos\alpha$, α — угол между осью $G\zeta$ и линией кривизны, соответствующей r_1, он отсчитывается от оси $G\zeta$ против часовой стрелки, если смотреть навстречу оси $G\eta$, занимающей в положении равновесия вертикальное положение. Под $O_3(\zeta, \xi)$ здесь и всюду далее будем понимать совокупность членов третьего и более высоких порядков относительно аргументов.

Уравнение поверхности S_1 в системе координат $Ox_1y_1z_1$ в окрестности точки равновесия имеет вид $z_1 = -(x_1^2 + y_1^2)/(2R) + O_3(x_1, y_1)$. Введем на поверхностях S и S_1 гауссовы координаты u, v и u_1, v_1 соответственно, такие, что $\xi = v$, $\zeta = u$ и $x_1 = v_1$, $y_1 = u_1$. Угол между осями $v_1 = \text{const}$ и $u = \text{const}$ в точке M соприкосновения поверхностей S и S_1 в окрестности положения равновесия обозначим через χ.

2. Введем углы Эйлера θ, φ, ψ. В положении равновесия тела на сфере имеем

$$\theta = \pi/2, \quad \varphi = 0, \quad \psi^\cdot = \omega = 0, \quad u_1 = v_1 = 0 \tag{2.1}$$

Пусть x_1, x_2, x_3 — возмущения переменных θ, φ, $\psi^\cdot$ соответственно, за переменными u_1, v_1 оставим прежние обозначения.

Опираясь на уравнения, полученные в [4], можно показать, что уравнения возмущенного движения твердого тела на поверхности сферы вблизи положения равновесия (2.1) имеют вид

$$\begin{gathered}
(A + mh^2)(1 + l_2/R)x_1^{\cdot\cdot} + (A + mh^2)lx_2^{\cdot\cdot}/R - mg(h - l_2)x_1 + \\
+ mglx_2 - mgh(u_1 \sin\chi + v_1 \cos\chi)/R = X_1 \\
(C + mh^2)lx_1^{\cdot\cdot}/R + (C + mh^2)(1 + l_1/R)x_2^{\cdot\cdot} + mglx_1 - \\
- mg(h - l_1)x_2 + mgh(u_1 \cos\chi - v_1 \sin\chi)/R = X_2 \\
Bx_3^\cdot = X_3, \qquad \chi^\cdot = x_3
\end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered}
X_1 = [mhl + (B - C - mh^2)l/R]x_1^\cdot x_3 + [mhl_1 - \\
- (A + C - B + 2mh^2) + (B - C - mh^2)l_1/R]x_2^\cdot x_3 + F_1 \\
X_2 = [-mhl_2 + (A + C - B + 2mh^2) - (B - A - mh^2)l_2/R]x_1^\cdot x_3 - \\
- [mhl + (B - A - mh^2)l/R]x_2^\cdot x_3 + F_2 \\
X_3 = -[mh(l_2x_1^\cdot + lx_2^\cdot) + (B - C - mh^2)x_1^\cdot][lx_1^\cdot/R + (1 + l_1/R)x_2^\cdot] - \\
- [mh(l_2x_1 + lx_2) + (B - C - mh^2)x_1][lx_1^{\cdot\cdot}/R + (1 + l_1/R)x_2^{\cdot\cdot}] + \\
+ [mh(lx_1^\cdot + l_1x_2^\cdot) + (B - A - mh^2)x_2^\cdot][(1 + l_2/R)x_1^\cdot + lx_2^\cdot/R] + \\
+ [mh(lx_1 + l_1x_2) + (B - A - mh^2)x_2][(1 + l_2/R)x_1^{\cdot\cdot} + lx_2^{\cdot\cdot}/R] - \\
- Bx_1^\cdot x_2^\cdot - Bx_1^{\cdot\cdot}x_2 + Bu_1^\cdot v_1^\cdot/R^2 + Bu_1^{\cdot\cdot}v_1/R^2 + \\
+ (C - A)[(1 + l_2/R)x_1^\cdot + lx_2^\cdot/R][lx_1^\cdot/R + (1 + l_1/R)x_2^\cdot] + \\
+ [mh(l_2x_1^\cdot + lx_2^\cdot) - (C + mh^2)x_1^\cdot][lx_1^\cdot/R + (1 + l_1/R)x_2^\cdot] - \\
- [mh(lx_1^\cdot + l_1x_2^\cdot) - (A + mh^2)x_2^\cdot][(1 + l_2/R)x_1^\cdot + lx_2^\cdot/R] + \\
+ mg[(h - l_2)x_1 - lx_2](u_1 \cos\chi - v_1 \sin\chi)/R - \\
- mg[lx_1 - (h - l_1)x_2](u_1 \sin\chi + v_1 \cos\chi)/R
\end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь через F_1 и F_2 обозначены квадратичные формы переменных x_i, $x_i^\cdot$, u_1, v_1 $(i = 1, 2)$. Их явный вид не потребуется. В уравнениях (2.2) отброшены члены выше второго порядка малости относительно возмущений.

Уравнения (2.2) необходимо рассматривать совместно с уравнениями неинтегрируемых связей, выражающих условия отсутствия скольжения [4]. В возмущенном движении уравнения связи могут быть записаны в виде

$$\begin{gathered}
u_1^\cdot = (l_2x_1^\cdot + lx_2^\cdot)\sin\chi - (lx_1^\cdot + l_1x_2^\cdot)\cos\chi + O_2(x_1^\cdot, x_2^\cdot) \\
v_1^\cdot = (l_2x_1^\cdot + lx_2^\cdot)\cos\chi + (lx_1^\cdot + l_1x_2^\cdot)\sin\chi + O_2(x_1^\cdot, x_2^\cdot)
\end{gathered} \tag{2.4}$$

Здесь $O_2(x_1^{\cdot}, x_2^{\cdot})$ — совокупность членов второго порядка и выше относительно аргументов.

Отметим, что в случае движения твердого тела по плоскости мы имеем дело с системой Чаплыгина и уравнения возмущенного движения исследуются независимо от уравнений связи [2].

Для проведения дальнейшего анализа системы (2.2)—(2.4) осуществим следующую замену переменных [5]:

$$u_1=(l_2x_1+lx_2)\sin\chi-(lx_1+l_1x_2)\cos\chi+u_1' \qquad (2.5)$$

$$v_1=(l_2x_1+lx_2)\cos\chi+(lx_1+l_1x_2)\sin\chi+v_1'$$

Система уравнений (2.2)—(2.4) перепишется в виде

$$\begin{gathered}(A+mh^2)(1+l_2/R)x_1^{\cdot\cdot}+(A+mh^2)lx_2^{\cdot\cdot}/R-mg(h-l_2+\\ +hl_2/R)x_1-mg(-l+hl/R)x_2-mgh(u_1'\sin\chi+v_1'\cos\chi)/R=X_1\\ (C+mh^2)lx_1^{\cdot\cdot}/R+(C+mh^2)(1+l_1/R)x_2^{\cdot\cdot}-mg(-l+hl/R)x_1-\\ -mg(h-l_1+hl_1/R)x_2+mgh(u_1'\cos\chi-v_1'\sin\chi)/R=X_2\\ Bx_3^{\cdot}=X_3, \quad \chi^{\cdot}=x_3\end{gathered} \qquad (2.6)$$

$$\begin{gathered}du_1'/dt=-(l_2x_1+lx_2)\cos\chi x_3-(lx_1+l_1x_2)\sin\chi x_3+O_3(x_1, x_2, x_3)\\ dv_1'/dt=(l_2x_1+lx_2)\sin\chi x_3-(lx_1+l_1x_2)\cos\chi x_3+O_3(x_1, x_2, x_3)\end{gathered} \qquad (2.7)$$

3. Характеристическое уравнение линеаризованных уравнений (2.6)—(2.7) имеет вид

$$\lambda^4(a\lambda^4+b\lambda^2+c)=0 \qquad (3.1)$$

$$a=(A+mh^2)(C+mh^2)(R+r_1)(R+r_2)/R^2$$

$$b=mg\{(A+mh^2)[l_1+r_1r_2/R-h(R+r_1)(R+r_2)/R^2]+$$
$$+(C+mh^2)[l_2+r_1r_2/R-h(R+r_1)(R+r_2)/R^2]\}$$

$$c=(mg)^2[h^2(R+r_1)(R+r_2)/R^2-h(r_1+r_2+2r_1r_2/R)+r_1r_2]$$

Уравнение (3.1) имеет четыре нулевых корня, а остальные четыре корня удовлетворяют биквадратному уравнению. Для устойчивости в первом приближении рассматриваемого равновесия тела на сфере необходимо, чтобы биквадратное уравнение имело две пары чисто мнимых корней; обозначим их $\pm i\Omega_j$ ($j=1, 2$). Последнее условие равносильно системе неравенств: $ab>0$, $ac>0$, $b^2-4ac>0$. Анализ этих неравенств дает следующие условия устойчивости в первом приближении:

$$h<Rr_1/(R+r_1), \qquad h<Rr_2/(R+r_2) \qquad (3.2)$$

Неравенства (3.2) накладывают ограничения на положение центра тяжести тела над точкой контакта его со сферой; радиус R берется с соответствующим знаком. Если опорная сферическая поверхность вогнута, то нужно наложить еще ограничения на геометрию тела, так как в этом случае равновесие тела в вогнутой «чаше» (с касанием в одной точке) не всегда возможно. К неравенствам (3.2) добавляются два условия:

$$R+r_1<0, \quad R+r_2<0 \quad (R<0) \qquad (3.3)$$

Полученные условия (3.2), (3.3) устойчивости в первом приближении равновесия твердого тела на сферической поверхности в предельном случае при $R=\infty$ дают условия устойчивости равновесия тела на плоскости [6]: $h<r_1$, $h<r_2$.

4. Будем рассматривать движение тела по сферической поверхности в окрестности положения равновесия, предполагая, что условия (3.2) или

(3.2), (3.3) выполнены. Замена переменных

$$x_1=u_{11}y_1+u_{12}y_2+u_{13}u_1'+u_{14}v_1' \qquad (4.1)$$

$$x_2=u_{21}y_1+u_{22}y_2+u_{23}u_1'+u_{24}v_1', \quad x_3=y_3$$

позволяет исключить из первых двух уравнений системы (2.6) переменные связи u_1' и v_1' и привести эти уравнения к нормальным координатам, т. е. к такому виду, когда их линейные части представляются уравнениями гармонических осцилляторов.

Коэффициенты замены (4.1) имеют следующий вид:

$$u_{1j}=k_j\{mgl-l[(A+mh^2)\Omega_j^2+mgh]/R\}$$

$$u_{2j}=k_j\{(1+l_2/R)[(A+mh^2)\Omega_j^2+mgh]-mgl_2\}$$

$$k_j=\{(A+mh^2)mgl[mgl-l((A+mh^2)\Omega_j^2+mgh)/R]+$$

$$+(C+mh^2)[(1+l_2/R)((A+mh^2)\Omega_j^2+mgh)-$$

$$-mgl_2][(R+r_1)(R+r_2)((A+mh^2)\Omega_j^2+mgh)/R^2- \qquad (4.2)$$

$$-mg(l_2+r_1r_2/R)]\}^{-1/2} \quad (j=1, 2)$$

$$u_{13}=h\{-h\sin\chi/R+(R-h)(l_1\sin\chi+l\cos\chi)/R^2\}/\Delta$$

$$u_{14}=h\{-h\cos\chi/R+(R-h)(l_1\cos\chi-l\sin\chi)/R^2\}/\Delta \qquad (4.3)$$

$$u_{23}=h\{h\cos\chi/R-(R-h)(l_2\cos\chi+l\sin\chi)/R^2\}/\Delta$$

$$u_{24}=h\{-h\sin\chi/R+(R-h)(l_2\sin\chi-l\cos\chi)/R^2\}/\Delta$$

$$\Delta=h^2(R+r_1)(R+r_2)/R^2-h(r_1+r_2+2r_1r_2/R)+r_1r_2$$

Перепишем уравнения (2.6) в новых переменных, проведя соответствующие преобразования в квадратичных функциях X_i $(i=1, 2, 3)$:

$$y_1^{\cdot\cdot}+\Omega_1^2y_1=(a_1y_1^{\cdot}+a_2y_2^{\cdot})y_3+G_1 \qquad (4.4)$$

$$y_2^{\cdot\cdot}+\Omega_2^2y_2=(b_1y_1^{\cdot}+b_2y_2^{\cdot})y_3+G_2, \qquad By_3^{\cdot}=Y_3$$

$$a_1=-(A-C)mhl\Omega_1^2/D, \qquad b_2=(A-C)mhl\Omega_2^2/D$$

$$D=(A+mh^2)(C+mh^2)(\Omega_1^2-\Omega_2^2)(R+r_1)(R+r_2)/R^2$$

Коэффициенты a_1 и b_2 были получены с помощью замены (4.1), проведенной в первых двух уравнениях (2.6). При этом было использовано уравнение частот $a\Omega^4-b\Omega^2+c=0$, где коэффициенты a, b, c даны в (3.1). Выражения для a_2 и b_1 здесь не приводятся, так как в дальнейших исследованиях они не потребуются. Функции G_1 и G_2 представляют собой квадратичные формы относительно y_i, $y_i^{\cdot}$, u_1', v_1' $(i=1, 2)$. Квадратичная функция Y_3 получена путем подстановки в функцию X_3 соотношений (4.1). Из-за громоздкости вид этой функции здесь не приводится. В дальнейшем понадобятся лишь некоторые члены этой функции, которые будут выписаны ниже.

Приведем систему (4.4) к нормальной форме [7]. Процесс нормализации системы предполагает проведение почти тождественного преобразования, позволяющего оставить в нелинейных частях уравнений только резонансные члены, которые определяют качественный характер движения, и отбросить несущественные члены. Если $\Omega_1\neq2\Omega_2$, то структура нормальной формы не зависит от функций G_i $(i=1, 2)$ в (4.4), или, что то же, от функций F_i $(i=1, 2)$ в (2.3). В данной задаче процесс нормализации системы позволяет исключить переменные u_1' и v_1' из третьего уравнения (4.4), что дает возможность рассматривать нормальную форму независимо от уравнений связи (2.7).

Запишем нормализованную систему уравнений возмущенного движения в вещественных полярных координатах ρ_i $(i=1, 2, 3)$, σ_i $(i=1, 2)$, введенных в [2]. Она распадается на две независимые подсистемы

$$\rho_1^{\bullet}=-a\Omega_1^2\rho_1\rho_3,\qquad \rho_2^{\bullet}=a\Omega_2^2\rho_2\rho_3,\qquad B\rho_3^{\bullet}=c_1\rho_1^2+c_2\rho_2^2 \tag{4.5}$$

$$\sigma_1^{\bullet}=\Omega_1,\qquad \sigma_2^{\bullet}=\Omega_2 \tag{4.6}$$

$$a=(A-C)mhl/(2D)$$

$$c_1=mhl(A-C)\Omega_1^4\{(R+r_1)(R+r_2)[(A+mh^2)\Omega_1^2+$$
$$+mgh]/R^2-mg(l_2+r_1r_2/R)\}k_1^2/2 \tag{4.7}$$
$$c_2=mhl(A-C)\Omega_2^4\{(R+r_1)(R+r_2)[(A+mh^2)\Omega_2^2+$$
$$+mgh]/R^2-mg(l_2+r_1r_2/R)\}k_2^2/2$$

Коэффициенты c_1 и c_2 в третьем уравнении (4.5) всегда имеют разные знаки, так как легко проверить, используя (4.7) и уравнения частот, что $c_1c_2=-[mhl^2(A-C)]^2k_1^2k_2^2\Omega_1^4\Omega_2^4(mg)^2(A+mh^2)/[4(C+mh^2)]<0$.

Структура нормальной формы (4.5), (4.6) совпадает со структурой уравнений, полученных при исследовании нелинейных колебаний твердого тела на плоскости вблизи положения равновесия [2]. Анализ системы (4.5), (4.6) проводится так же, как анализ соответствующей системы в [2].

5. В ε-окрестности положения равновесия правые части уравнений (4.5), (4.6) отличаются от правых частей соответствующих им точных уравнений на величины порядка ε^2 и ε^3 соответственно. Решения уравнений (4.5), (4.6) аппроксимируют решения точных уравнений с погрешностью порядка ε^2 для ρ_i ($i=1, 2, 3$) и порядка ε для σ_i ($i=1, 2$) на интервале времени порядка $1/\varepsilon$. Ограничимся этой точностью и будем рассматривать приближенную систему (4.5), (4.6).

Интегрирование системы (4.6) дает $\sigma_i(t)=\Omega_it+\sigma_i(0)$ ($i=1, 2$). Рассмотрим уравнения (4.5). Можно проверить, что система (4.5) имеет два интеграла (μ, ν — произвольные постоянные):

$$\alpha^2p_1^2+\beta^2\rho_2^2+B\rho_3^2=B\mu^2,\qquad \rho_1^{\Omega_1^2}\rho_2^{\Omega_2^2}=\nu^{\Omega_1^2} \tag{5.1}$$

$$\alpha^2=c_1/(a\Omega_1^2)=(A+mh^2)(C+mh^2)\Omega_1^2(\Omega_1^2-\Omega_2^2)\times$$
$$\times(R+r_1)(R+r_2)\{(R+r_1)(R+r_2)[(A+mh^2)\Omega_1^2+$$
$$+mgh]/R^2-mg(l_2+r_1r_2/R)\}k_1^2/R^2>0$$
$$\beta^2=-c_2/(a\Omega_2^2)=-(A+mh^2)(C+mh^2)\Omega_2^2(\Omega_1^2-\Omega_2^2)\times$$
$$\times(R+r_1)(R+r_2)\{(R+r_1)(R+r_2)[(A+mh^2)\Omega_2^2+$$
$$+mgh]/R^2-mg(l_2+r_1r_2/R)\}k_2^2/R^2>0$$

Так же как в [2], изобразим траектории системы (4.5) в пространстве переменных ρ_1, ρ_2 — «амплитуд» высокочастотных и низкочастотных колебаний (с частотами Ω_1 и Ω_2 соответственно) и ρ_3 — угловой скорости вращения тела вокруг вертикали (фигура). Эти траектории представляют собой кривые, являющиеся пересечением эллипсоида

$$(\alpha\rho_1)^2/(\mu^2B)+(\beta\rho_2^2)/(\mu^2B)+\rho_3^2/\mu^2=1 \tag{5.2}$$

и цилиндрической поверхности $\rho_1^{\varkappa}\rho_2=\nu$, $\varkappa=\Omega_2^2/\Omega_1^2$. Если константа μ задана, то величина второй произвольной постоянной ν может находиться в интервале $0\leqslant\nu\leqslant\nu_*$, где $\nu_*=\alpha\{B\mu^2\varkappa/[(\varkappa+1)\alpha^2]\}^{(\varkappa+1)/2}/(\beta\sqrt{\varkappa})$. При $\nu>\nu_*$ движение невозможно. Отмеченные на осях ρ_1 и ρ_2 величины d_1 и d_2 имеют значения $(B\mu^2\Omega_1^2a/c_1)^{1/2}$ и $(B\mu^2\Omega_2^2a/c_2)^{1/2}$.

Изображенное на фигуре движение соответствует случаю $a>0$. При $a<0$ направление движения меняется на противоположное. Штриховкой показана плоскость $\sqrt{c_1}\rho_1=\sqrt{-c_2}\rho_2$, на которой обращается в нуль правая часть третьего уравнения (4.5).

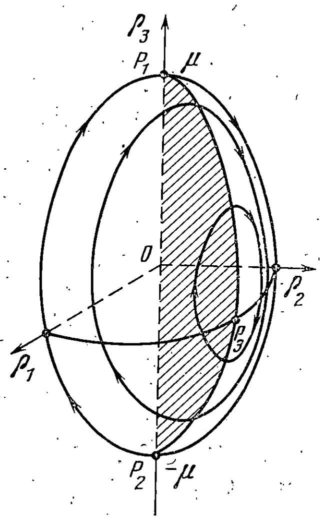
Система (4.5) имеет три равновесные точки: $P_1=(0, 0, \mu)$, $P_2=(0, 0, -\mu)$, отвечающие чистому вращению тела вокруг вертикали со скоростями μ и $-\mu$ соответственно, и $P_3=(\mu[Ba\Omega_1^2\varkappa/(c_1(\varkappa+1))]^{1/2}, \mu[Ba\Omega_2^2/(-c_2(\varkappa+1))]^{1/2}, 0)$, соответствующую условно-периодическому колебанию тела. Точки P_1 и P_2 являются точками неустойчивого равновесия системы, P_3 — точка устойчивого равновесия, что доказывается на основании теоремы Ляпунова об устойчивости, как и в [2].

Двум другим решениям системы (4.5):

$$\rho_1=0, \quad \rho_2(t)=[B\mu^2\Omega_2^2a/(-c_2)]^{1/2}\operatorname{sch}[\delta_1(t+e_1)]$$
$$\rho_3(t)=\mu\operatorname{th}[\delta_1(t+e_1)], \quad \delta_1=-a\mu\Omega_2^2, \quad e_1=\delta_1^{-1}\operatorname{Arth}[\rho_3(0)/\mu] \tag{5.3}$$

$$\rho_2=0, \quad \rho_1(t)=(B\mu^2\Omega_1^2a/c_1)^{1/2}\operatorname{sch}[\delta_2(t+e_2)]$$
$$\rho_3(t)=\mu\operatorname{th}[\delta_2(t+e_2)], \quad \delta_2=a\mu\Omega_1^2, \quad e_2=\delta_2^{-1}\operatorname{Arth}[\rho_3(0)/\mu] \tag{5.4}$$

на фигуре соответствуют траектории, лежащие в плоскостях $\rho_1=0$ и $\rho_2=0$ соответственно. Предельными для этих движений будут точки P_1 и P_2, отвечающие чистому вращению тела. Если в начальный момент времени $\rho_3(0)<0$ для решения (5.3) и $\rho_3(0)>0$ для решения (5.4), то в момент времени $t_*=-e_1$ для (5.3) и $t_*=-e_2$ для (5.4) происходит смена направления вращения тела вокруг вертикали.



В общем случае система (4.5) и интегралы (5.1) дают следующие уравнения для нахождения ρ_1, ρ_2 и ρ_3:

$$d\rho_1/[\rho_1 f(\rho_1)]=\mp a\Omega_1^2dt,$$
$$\rho_2=\nu\rho_1^{-\varkappa}, \quad \rho_3=\pm f(\rho_1) \tag{5.5}$$
$$f(\rho_1)=[B\mu^2\rho_1^{2\varkappa}-\alpha^2\rho_1^{2(\varkappa+1)}(\beta^2\nu^2)^{1/2}/(\sqrt{B}\rho_1^{\varkappa})$$

Явную зависимость $\rho_1(t)$ в общем случае найти невозможно. Качественный характер движения устанавливается непосредственно из системы (4.5). Проиллюстрируем его с помощью фигуры. Так же как в [2], движение носит периодический характер (период можно определить из первого уравнения (5.5)), а его траектории являются замкнутыми кривыми, лежащими на эллипсоиде (5.2). Дважды за период, когда точка на траектории попадает на плоскость $\rho_3=0$, происходит смена направления вращения тела вокруг вертикали (ρ_3 меняет знак), после чего угловая скорость начинает увеличиваться по абсолютной величине от нуля до максимального значения. Оно достигается в тот момент, когда точка пересекает плоскость $\rho_1\sqrt{c_1}=\rho_2\sqrt{-c_2}$. Затем угловая скорость начинает уменьшаться, в плоскости $\rho_3=0$ обращается в нуль и тело снова меняет направление своего вращения вокруг вертикали.

Таким образом, рассмотренные нелинейные колебания твердого тела на сферической опорной поверхности вблизи равновесия качественно такие же, как соответствующие колебания тела на плоскости [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Walker G. T.* On curions dynamical property of celts.— Proc. Cambr. Phil. Soc., 1985, v. 8, pt. 5, p. 305—306.
2. *Маркеев А. П.* О динамике твердого тела на абсолютно шероховатой плоскости.— ПММ, 1983, вып. 4, с. 575—582.
3. *Паскаль М.* Асимптотическое решение уравнений движения кельтского камня.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 2, с. 321—329.
4. *Воронец П. В.* Дифференциальные уравнения движения твердого тела по отношению к среде, имеющей произвольно заданное движение.— В кн.: Сборник статей, посвященных профессору Г. К. Суслову. Киев: Тип. имп. ун-та, 1911, с. 75—114.
5. *Карапетян А. В., Румянцев В. В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем.— В кн.: Итоги науки и техники. Сер. Общая механика. Т. 6. М.: ВИНИТИ, 1983. 130 с.
6. *Румянцев В. В.* Об устойчивости вращения тяжелого гиростата на горизонтальной плоскости.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 4, с. 11—21.
7. *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 255 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.IV.1986