МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1986

УДК 531.1

ОБ ОПЕРАТОРНЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

ПАНОВ А. П.

Рассмотрены операторные кинематические уравнения, содержащие абсолютную и относительную (локальную) производные оператора вращения твердого тела. Показано, что общие решения таких уравнений определяют правила сложения конечных вращений соответственно в случаях, когда оси вращений неподвижны в пространстве и фиксированы в теле. Установлено, что матрица абсолютной производной оператора вращения, записанная в неподвижном базисе, равна матрице локальной производной этого же оператора, записанной в связанном с телом подвижном базисе. Приведены примеры применения операторных уравнений и их решений для получения общих решений некоторых векторных кинематических уравнения вращения и соответствующих этим решениям правил сложения вращений твердого тела.

1. Рассмотрим операторные кинематические уравнения вращения твердого тела [1]

$$\mathbf{R}^{\cdot}=\mathbf{\Omega R} \tag{1.1}$$

$$\mathbf{R}^{\cdot T}=-\mathbf{R}^T\mathbf{\Omega} \tag{1.2}$$

$$\mathbf{\Omega}=\mathbf{R}^{\cdot}\mathbf{R}^T=-\mathbf{R}\mathbf{R}^{\cdot T} \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{R}$ — ортогональный оператор вращения твердого тела, $\mathbf{R}^{\cdot}$ — абсолютная производная оператора $\mathbf{R}$, $\mathbf{\Omega}$ — кососимметрический оператор (векторного умножения [2]), соответствующий вектору $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости вращения твердого тела, T — индекс транспонирования. Полагаем, что оператор $\mathbf{R}$ задает непрерывное во времени t преобразование вращения $\mathbf{j}_k=\mathbf{R}\mathbf{i}_k$ ($k=1, 2, 3$) и переводит орты $\mathbf{i}_k$ неподвижного базиса $\mathbf{I}$ в одноименные орты $\mathbf{j}_k$ подвижного базиса $\mathbf{J}$, связанного с телом.

Пусть $\mathbf{x}$ — произвольный вещественный собственный вектор оператора $\mathbf{R}$, именуемый далее вектором вращения [1]. Представив вектор $\mathbf{x}$ в виде $\mathbf{x}=x\mathbf{z}$, где x — модуль, $\mathbf{z}$ — единичный вектор (орт) оси результирующего конечного вращения, задаваемого оператором $\mathbf{R}$, поставим в соответствие вектору $\mathbf{x}$ кососимметрический оператор [2, 3]: $\mathbf{X}=x\mathbf{Z}$, где $\mathbf{Z}$ — кососимметрический оператор, соответствующий орту $\mathbf{z}$. Тогда для ортогонального оператора $\mathbf{R}$ будет справедливо разложение [1]:

$$\mathbf{R}=\mathbf{E}+\alpha\mathbf{X}+\beta\mathbf{X}^2$$
$$\alpha=(\sin\varphi)/x,\quad \beta=(1-\cos\varphi)/x^2 \tag{1.4}$$

Здесь φ — угол результирующего вращения тела вокруг оси, определяемой ортом $\mathbf{z}$, $\mathbf{E}$ — единичный оператор. Разложение (1.4) следует также из экспоненциального представления оператора $\mathbf{R}$ [4]:

$$\mathbf{R}=\exp\mathbf{\Phi},\quad \mathbf{\Phi}=\varphi\mathbf{Z} \tag{1.5}$$

В случае произвольного вращения тела скорость изменения вектора $\mathbf{x}$ относительно неподвижного базиса $\mathbf{I}$ будет характеризоваться абсолютной производной $\mathbf{x}^{\cdot}$, а относительно подвижного (связанного с телом) базиса $\mathbf{J}$ — относительной или локальной производной $\mathbf{x}^*$, которая связана с производной $\mathbf{x}^{\cdot}$ соотношением $\mathbf{x}^{\cdot}=\mathbf{x}^*+\mathbf{\Omega x}$. В пространстве кососимметрических операторов этому векторному соотношению взаимно однозначно [3] соответствует операторное соотношение

$$\mathbf{X}^{\boldsymbol\cdot}=\mathbf{X}^*+[\Omega, \mathbf{X}] \tag{1.6}$$

в котором $\mathbf{X}^{\boldsymbol\cdot}$, $\mathbf{X}^*$ — соответственно абсолютная и относительная (локальная) производные оператора $\mathbf{X}$, $[\Omega, \mathbf{X}]$ — коммутатор операторов Ω, $\mathbf{X}$, соответствующий векторному произведению $\omega\times\mathbf{x}$.

2. Продифференцируем разложение (1.4) по времени и получим

$$\mathbf{R}^{\boldsymbol\cdot}=\alpha^{\boldsymbol\cdot}\mathbf{X}+\alpha\mathbf{X}^{\boldsymbol\cdot}+\beta^{\boldsymbol\cdot}\mathbf{X}^2+\beta(\mathbf{X}\mathbf{X}^{\boldsymbol\cdot}+\mathbf{X}^{\boldsymbol\cdot}\mathbf{X}) \tag{2.1}$$

По аналогии с этим выражением запишем

$$\mathbf{R}^*=\alpha^{\boldsymbol\cdot}\mathbf{X}+\alpha\mathbf{X}^*+\beta^{\boldsymbol\cdot}\mathbf{X}^2+\beta(\mathbf{X}\mathbf{X}^*+\mathbf{X}^*\mathbf{X}) \tag{2.2}$$

и назовем $\mathbf{R}^*$ относительной или локальной производной оператора вращения $\mathbf{R}$. Тогда, подставив соотношение (1.6) в (2.1), получим $\mathbf{R}^{\boldsymbol\cdot}=\mathbf{R}^*+\alpha[\Omega, \mathbf{X}]+\beta(\Omega\mathbf{X}^2+\mathbf{X}^2\Omega)$. Добавляя и вычитая в правой части этого соотношения единичный оператор $\mathbf{E}$, приходим к операторной формуле, аналогичной формуле (1.6):

$$\mathbf{R}^{\boldsymbol\cdot}=\mathbf{R}^*+[\Omega, \mathbf{R}]=\mathbf{R}^*+\Omega\mathbf{R}-\mathbf{R}\Omega \tag{2.3}$$

С помощью исходного операторного уравнения (1.1) получаем из (2.3) операторное кинематическое уравнение, содержащее относительную производную $\mathbf{R}^*$

$$\mathbf{R}^*=\mathbf{R}\Omega \tag{2.4}$$

а также уравнения

$$\mathbf{R}^{*T}=-\Omega\mathbf{R}^T \tag{2.5}$$

$$\Omega=\mathbf{R}^T\mathbf{R}^*=-\mathbf{R}^{*T}\mathbf{R} \tag{2.6}$$

Сравнивая правые части уравнений (1.3), (2.6), устанавливаем, что абсолютная и относительная производные оператора вращения связаны преобразованиями подобия

$$\mathbf{R}^{\boldsymbol\cdot}=\mathbf{R}^T\mathbf{R}^*\mathbf{R}, \quad \mathbf{R}^{\boldsymbol\cdot T}=\mathbf{R}^T\mathbf{R}^{*T}\mathbf{R} \tag{2.7}$$

Покажем, что аналогичными преобразованиями подобия оказываются связаны и производные кососимметрического оператора $\mathbf{X}$. Для этого подставим в преобразование (2.7) выражения (1.4), (2.1), (2.2) и получим разность $\mathbf{R}^{\boldsymbol\cdot}-\mathbf{R}^{\boldsymbol\cdot T}=2\alpha^{\boldsymbol\cdot}\mathbf{X}+2\alpha\mathbf{X}^{\boldsymbol\cdot}=2\alpha^{\boldsymbol\cdot}\mathbf{R}^T\mathbf{X}\mathbf{R}+2\alpha\mathbf{R}^T\mathbf{X}^*\mathbf{R}$.

Из этой разности, учитывая перестановочность операторов $\mathbf{X}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^T$, находим искомое преобразование подобия

$$\mathbf{X}^{\boldsymbol\cdot}=\mathbf{R}^T\mathbf{X}^*\mathbf{R} \tag{2.8}$$

Этому преобразованию отвечает (взаимно однозначно) в векторном пространстве линейное преобразование [1]:

$$\mathbf{x}^{\boldsymbol\cdot}=\mathbf{R}^T\mathbf{x}^* \tag{2.9}$$

3. Рассмотрим решения операторных кинематических уравнений вращения. Пусть произвольный оператор $\Omega(t)$ является непрерывной функцией t на некотором временном интервале (t_0, t). Воспользовавшись методом последовательных приближений, получим частное нормированное решение уравнения (1.1) при $\mathbf{R}(t_0)=\mathbf{E}$ в виде сходящегося ряда, являющегося операторным аналогом матриканта [4]:

$$\mathbf{R}_t=\mathbf{R}(t_0, t)=\mathbf{E}+\int_{t_0}^{t}\Omega(t')\,dt'+\int_{t_0}^{t}\Omega(t')\int_{t_0}^{t'}\Omega(t'')\,dt''\,dt'+\ldots \tag{3.1}$$

Пусть теперь оператор $\Omega(t)$ может быть представлен в окрестности точки t_0 на интервале (t_0, t) равномерно сходящимся рядом Тейлора

$$\Omega(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\Omega^{(k)}\tau^k \tag{3.2}$$

в котором $\Omega^{(k)}$ — производные оператора $\Omega(t)$ по времени в точке t_0; $\tau = t - t_0$. Тогда, подставив ряд (3.2) в решение (3.1), получим после интегрирования частное решение $\mathbf{R}_t$ в виде сходящегося ряда, содержащего производные $\Omega^{(k)}$ [3]:

$$\mathbf{R}_t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \tau^k \mathbf{R}_{(k)} \tag{3.3}$$

$$\mathbf{R}_{(0)} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{R}_{(1)} = \Omega, \quad \mathbf{R}_{(2)} = \Omega^2 + \Omega^{(1)},$$

$$\mathbf{R}_{(3)} = \Omega^3 + \Omega^{(2)} + \Omega\Omega^{(1)} + 2\Omega^{(1)}\Omega, \ldots$$

Аналогичным образом получаем частное решение $\mathbf{R}_{*t} = \mathbf{R}_*(t_0, t)$ уравнения (2.4):

$$\mathbf{R}_{*t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \tau^k \mathbf{R}_{*(k)} \tag{3.4}$$

$$\mathbf{R}_{*(0)} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{R}_{*(1)} = \Omega, \quad \mathbf{R}_{*(2)} = \Omega^2 + \Omega^{(1)}$$

$$\mathbf{R}_{*(3)} = \Omega^3 + \Omega^{(2)} + 2\Omega\Omega^{(1)} + \Omega^{(1)}\Omega, \ldots$$

Имея частные решения $\mathbf{R}_t$, $\mathbf{R}_{*t}$ уравнений (1.1), (2.4), можно общие решения этих уравнений записать соответственно в виде [4]:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_t \mathbf{C} \tag{3.5}$$

$$\mathbf{R}_* = \mathbf{C}_* \mathbf{R}_{*t} \tag{3.6}$$

где $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}_*$ — произвольные постоянные операторы конечных вращений твердого тела.

Будем считать, что уравнения (1.1), (2.4) описывают одно и то же движение твердого тела. Тогда, положив в решениях (3.5), (3.6) $\mathbf{R} = \mathbf{R}_*$, $\mathbf{C} = \mathbf{C}_*$, получим преобразование подобия

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{C} \mathbf{R}_{*t} \mathbf{C}^T \tag{3.7}$$

Выясним, как связаны собственные векторы подобных операторов вращения $\mathbf{R}_t$ и $\mathbf{R}_{*t}$ в (3.7). Представим эти операторы в экспоненциальном виде (1.5): $\mathbf{R}_t = \exp \Phi_t$, $\mathbf{R}_{*t} = \exp \Phi_{*t}$, $\Phi_t = \Phi(t_0, t)$, $\Phi_{*t} = \Phi_*(t_0, t)$.

В соответствии с известным свойством [5] преобразований подобия $\mathbf{R}^{-1} f(\mathbf{X}) \mathbf{R} = f(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{R})$, где $f(\mathbf{X})$ — некоторая функция оператора $\mathbf{X}$, $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$; преобразование (3.7) приводится к виду $\exp \Phi_t = \exp(\mathbf{C}\Phi_{*t}\mathbf{C}^T)$, откуда следует

$$\Phi_t = \mathbf{C} \Phi_{*t} \mathbf{C}^T \tag{3.8}$$

По аналогии с преобразованиями (2.8), (2.9) преобразованию подобия (3.8) в векторном пространстве взаимно однозначно соответствует преобразование вращения $\varphi_t = \mathbf{C}\varphi_{*t}$, в котором φ_t, φ_{*t} — векторы, соответствующие кососимметрическим операторам Φ_t, Φ_{*t}. Вводя в это преобразование замены $\varphi_{*t} = (\varphi_t / x_t) \mathbf{x}_{*t}$, $\varphi_t = (\varphi_t / x_t) \mathbf{x}_t$, приходим к более общему преобразованию

$$\mathbf{x}_t = C \mathbf{x}_{*t} \tag{3.9}$$

которое показывает, что собственный вектор $\mathbf{x}_{*t}$ оператора $\mathbf{R}_{*t}$ переводится с помощью оператора вращения $\mathbf{C}$ в собственный вектор $\mathbf{x}_t$ оператора $\mathbf{R}_t$, т. е. преобразование (3.9) есть преобразование вектора в вектор при вращении базиса $\mathbf{J}$ [6, 7]. Следовательно, вектор $\mathbf{x}_{*t}$ можно рассматривать как вектор, связанный с телом или базисом $\mathbf{J}$, а вектор $\mathbf{x}_t$ — как вектор, неподвижный относительно базиса I. В свою очередь, собственный вектор $\mathbf{x}_c$ оператора $\mathbf{C}$ можно рассматривать при вращении, задаваемом этим оператором, с одной стороны, как вектор вращения, связанный с телом, а с другой — как вектор вращения, неподвижный относительно базиса $\mathbf{I}$. Рассматривая далее векторы вращения $\mathbf{x}_c$ и $\mathbf{x}_t$, $\mathbf{x}_{*t}$ как векторы, задающие последовательные во времени вращения твердого тела, приходим к выводу, что общие решения (3.5), (3.6) определяют две существенно различные операции сложения вращений твердого тела. Решение (3.5) определяет правило сложения последовательных конечных вращений или поворотов твердого тела, задаваемых вокруг осей, положение которых в базисе **I** не зависит от ориентации тела в этом базисе, а решение (3.6) — правило сложения последовательных вращений, оси которых связаны с телом и изменяют свое положение в пространстве (базисе **I**) при вращениях тела.

Заметим, что оператор **R** является оператором рассогласующего вращения базиса **J** (из начального положения, в котором одноименные координатные оси базисов **I** и **J** совпадают [1]). В случае согласующего конечного вращения, задаваемого оператором $\mathbf{R}^T$, решения соответствующих ему операторных уравнений (1.2), (2.5) получаются транспонированием решений (3.3)—(3.6). При этом правила сложения согласующих вращений будут отличаться от соответствующих правил сложения рассогласующих вращений только обратным порядком умножения операторов составляющих вращений.

4. Описание вращений твердого тела с помощью операторов вращений является наиболее простым и в то же время наиболее общим, поскольку операторы вращений и соответствующие им линейные преобразования и кинематические уравнения инвариантны относительно преобразований соответствующих базисов. В конкретных координатных базисах операторным кинематическим уравнениям и их решениям соответствуют матричные представления.

Например, в произвольном неподвижном базисе **I** операторному уравнению (1.1) соответствует матричное уравнение

$$R_I^{\bullet}=(\mathbf{R}^{\bullet})_I=\Omega_I R \tag{4.1}$$

а в произвольном подвижном базисе **J**, связанном с твердым телом, уравнению (2.4) — уравнение вида

$$R_J^*=(\mathbf{R}^*)_J=R\Omega_J \tag{4.2}$$

В уравнениях (4.1), (4.2) через R обозначена матрица вращения — матрица оператора **R**, называемая также матрицей преобразования координат [4] и матрицей направляющих косинусов [7]. Отличительной особенностью оператора вращения **R** является его представление в базисах **I** и **J** одной и той же матрицей вращения [8] $R_I=R_J=R$, определяющей матричное преобразование вращения [7] $r_I=Rr_J$, где r_I, r_J — матрицы-столбцы, составленные из координат в базисах **I**, **J** одного и того же произвольного вектора **r**. Это преобразование отражает так называемую пассивную точку зрения [9] на описание вращений, в отличие от «активной» точки зрения, базирующейся на инвариантной к выбору координатного базиса форме записи преобразования вращения типа $\mathbf{j}_k=\mathbf{R}\mathbf{i}_k$.

Кососимметрические матрицы Ω_I, Ω_J, входящие в уравнения (4.1), (4.2), составлены из координат вектора $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости в базисах **I**, **J** и связаны преобразованием подобия [7]:

$$\Omega_I=R\Omega_J R^T \tag{4.3}$$

которому по аналогии с (2.9) соответствует матричная запись $\omega_I=R\omega_J$. Здесь ω_I, ω_J — матрицы-столбцы, составленные из координат вектора $\boldsymbol{\omega}$ в базисах **I** и **J**.

Из преобразования подобия (4.3) следует равенство $\Omega_I R=R\Omega_J$, подставляя в которое правые части уравнений (4.1), (4.2), получаем тождество $R_I^{\bullet}=R_J^*=R^{\bullet}$.

Итак, установлено, что матрица $R_I^{\bullet}$ оператора $\mathbf{R}^{\bullet}$ в неподвижном базисе **I** равна матрице R_J^* оператора $\mathbf{R}^*$ в подвижном базисе **J**. В результате имеем две основные формы матричных кинематических уравнений Пуассона [7]: $R^{\bullet}=\Omega_I R$, $R^{\bullet}=R\Omega_J$.

В случае согласующего вращения, задаваемого оператором $\mathbf{R}^T$, к этим матричным уравнениям добавляются еще две формы уравнений, получаемые транспонированием этих уравнений [7].

5. С помощью операторных уравнений (1.1), (2.4) и их решений (3.3)–(3.6) можно получить кинематические уравнения с соответствующими решениями для различных собственных векторов $\mathbf{x}$ оператора $\mathbf{R}$. Общий подход к построению таких векторных уравнений вращения рассмотрен в [1], где приведены как известные, так и новые векторные уравнения. Например, приведено новое векторное уравнение с локальной производной вектора $\mathbf{x}=\boldsymbol{\vartheta}=k_\vartheta \operatorname{tg}(\varphi/2)\mathbf{z}$, где k_ϑ – произвольное вещественное положительное число. В случае $k_\vartheta=2$ это уравнение имеет вид (здесь $(\boldsymbol{\vartheta}\cdot\boldsymbol{\omega})$ – скалярное произведение):

$$\boldsymbol{\vartheta}^*=\boldsymbol{\omega}+{}^1/_2\boldsymbol{\vartheta}\times\boldsymbol{\omega}+{}^1/_4(\boldsymbol{\vartheta}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\vartheta} \tag{5.1}$$

и отличается от уравнения, содержащего абсолютную производную $\boldsymbol{\vartheta}^{\cdot}$ [1, 6], только знаком у векторного произведения $\boldsymbol{\vartheta}\times\boldsymbol{\omega}$.

Воспользовавшись разложением (1.4), получим из (3.4) частное (при $\boldsymbol{\vartheta}(t_0)=0$), а из (3.6) – общее решение уравнения (5.1).

При $x=\vartheta=2\operatorname{tg}(\varphi/2)$ разложение (1.4) перепишется в виде

$$\mathbf{R}=\mathbf{E}+\alpha_\vartheta\boldsymbol{\theta}+\beta_\vartheta\boldsymbol{\theta}^2$$
$$\alpha_\vartheta=(1+{}^1/_4(\boldsymbol{\vartheta}\cdot\boldsymbol{\vartheta}))^{-1},\quad \beta_\vartheta={}^1/_2\alpha_\vartheta,\quad \boldsymbol{\theta}=\vartheta\mathbf{Z} \tag{5.2}$$

Из (5.2) находим

$$\alpha_\vartheta\boldsymbol{\theta}={}^1/_2(\mathbf{R}-\mathbf{R}^T) \tag{5.3}$$

Подставив в (5.3) решение в форме (3.4) и воспользовавшись тождествами алгебры кососимметрических операторов [3], получаем ряд

$$\mathbf{S}_{*t}=\mathbf{S}_*(t_0,t)=\alpha_\vartheta\boldsymbol{\theta}_{*t}=\sum_{k=1}^{\infty}\tau^k\mathbf{S}_{*(k)}$$
$$\mathbf{S}_{*(1)}=\boldsymbol{\Omega},\quad \mathbf{S}_{*(2)}={}^1/_2\boldsymbol{\Omega}^{(1)}$$
$$\mathbf{S}_{*(3)}={}^1/_{12}([\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{\Omega}^{(1)}]-2\omega^2\boldsymbol{\Omega}+2\boldsymbol{\Omega}^{(2)}),\ldots,\ \omega^2=(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}) \tag{5.4}$$

Операторному ряду (5.4) взаимно однозначно соответствует в векторном пространстве ряд

$$\mathbf{s}_{*t}=\mathbf{s}_*(t_0,t)=\alpha_\vartheta\boldsymbol{\vartheta}_{*t}=\sum_{k=1}^{\infty}\tau^k\mathbf{s}_{*(k)}$$
$$\mathbf{s}_{*(1)}=\boldsymbol{\omega},\quad \mathbf{s}_{*(2)}={}^1/_2\boldsymbol{\omega}^{(1)}$$
$$\mathbf{s}_{*(3)}={}^1/_{12}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}^{(1)}-2\omega^2\boldsymbol{\omega}+2\boldsymbol{\omega}^{(2)}),\ldots \tag{5.5}$$

Отметим, что модуль $s_{*t}=s_t=(\mathbf{s}_{*t}\cdot\mathbf{s}_{*t})^{1/2}$ вектора $\mathbf{s}_{*t}$ равен $\sin\varphi_t$ [3], а коэффициент [6] $\alpha_\vartheta=\cos^2(\varphi_t/2)$, $\varphi_t=\varphi(t_0,t)=\varphi_*(t_0,t)$. Тогда можно, исходя из ряда (5.5), записать искомое частное решение в виде

$$\boldsymbol{\vartheta}_{*t}=\boldsymbol{\vartheta}_*(t_0,t)=(1-s_\tau^2)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\tau^k\mathbf{s}_{*(k)}=\mathbf{q}(\tau)+\sum_{k=3}^{\infty}\tau^k\boldsymbol{\vartheta}_{*(k)};\qquad s_\tau^2=\sin^2(\varphi_t/2)$$
$$\mathbf{q}(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}\tau^{(k+1)}\boldsymbol{\omega}^{(k)},\qquad \boldsymbol{\vartheta}_{*(3)}={}^1/_{12}(\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\omega}^{(1)}+\omega^2\boldsymbol{\omega}) \tag{5.6}$$
$$\boldsymbol{\vartheta}_{*(4)}={}^1/_{24}(\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\omega}^{(2)}+2(\boldsymbol{\omega}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}+\omega^2\boldsymbol{\omega}^{(1)}),\ldots$$

Для нахождения общего решения уравнения (5.1) воспользуемся решением (3.6) при $\mathbf{C}_*=\mathbf{C}$ и выражением (5.3). Тогда получим выражение $\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_*={}^1/_2\alpha_\vartheta^{-1}(\mathbf{C}\mathbf{R}_{*t}-\mathbf{R}_{*t}^T\mathbf{C}^T)$. Подставив в это выражение разложения вида (5.2) для операторов вращения $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}_{*t}$ и учитывая соответствующие тождества алгебры кососимметрических операторов [3], получаем после преобразований операторное соотношение

$$\theta=\gamma_\vartheta(\theta_c+\theta_{*t}+{}^1/_2[\theta_c,\ \theta_{*t}])$$
$$\gamma_\vartheta=(1-{}^1/_4(\vartheta_c\cdot\vartheta_{*t}))^{-1} \tag{5.7}$$

Здесь θ_c — постоянный кососимметрический оператор, имеющий постоянный собственный вектор ϑ_c; $\theta_{*t}=\theta_*(t_0,\ t)$ — кососимметрический оператор, имеющий собственный вектор $\vartheta_{*t}=\vartheta_*(t_0,\ t)$. Операторному соотношению (5.7) взаимно однозначно соответствует векторное соотношение, представляющее собой общее решение уравнения (5.1)

$$\vartheta=\gamma_\vartheta(\vartheta_c+\vartheta_{*t}+{}^1/_2\vartheta_c\times\vartheta_{*t}) \tag{5.8}$$

Решение (5.8) определяет (подобно решению (3.5)) правило сложения вращений твердого тела, задаваемых вокруг связанных с телом осей, и отличается от соответствующего правила сложения вращений вокруг неподвижных в базисе I осей только знаком у векторного произведения [6].

Решения (5.6), (5.8) представляют практический интерес при построении специализированных методов численного интегрирования [7] уравнения (5.1).

6. С помощью общих решений (3.5), (3.6) можно получить также правила сложения последовательных вращений, заданных векторами, модули которых равны синусам углов составляющих вращений твердого тела. Воспользовавшись разложениями вида [3]:

$$\mathbf{R}=\mathbf{E}+\mathbf{S}+((1-\cos\varphi)/\sin^2\varphi)\mathbf{S}^2$$

где $\mathbf{S}$ — кососимметрический оператор, вещественным собственным вектором которого является вектор $\mathbf{s}=\sin\varphi\mathbf{z}$, получим, например, с помощью решения (3.5) выражение

$$\mathbf{S}=\gamma_1\mathbf{S}_c+\gamma_2\mathbf{S}_t+\gamma_3[\mathbf{S}_t,\ \mathbf{S}_c] \tag{6.1}$$
$$\gamma_1=1-a_c(\mathbf{s}_t\cdot\mathbf{s}_c)/2-s_t^2a_t/2$$
$$\gamma_2=1-a_t(\mathbf{s}_t\cdot\mathbf{s}_c)/2-s_c^2a_c/2$$
$$\gamma_3=(1-a_ca_t(\mathbf{s}_t\cdot\mathbf{s}_c))/2$$
$$a_t=(1-\sqrt{1-s_t^2})/s_t^2;\quad a_c=(1-\sqrt{1-s_c^2})/s_c^2$$

Здесь $\mathbf{S}_c$ — собственный вектор кососимметрического оператора $\mathbf{S}_c^\circ$, $\mathbf{S}_t=\mathbf{S}(t_0,\ t)$ — собственный вектор кососимметрического оператора $\mathbf{S}_t^\circ=\mathbf{S}(t_0,\ t)$, $s_c^2=(\mathbf{S}_c\cdot\mathbf{S}_c)=\sin^2\varphi_c$, $s_t^2=(\mathbf{S}_t\cdot\mathbf{S}_t)=\sin^2\varphi_t$, φ_c, $\varphi_t=\varphi(t_0,\ t)$ — углы вращений, задаваемых соответственно операторами $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}_t$ (см. пп. 3, 5).

Операторному выражению (6.1) взаимно однозначно соответствует векторное выражение

$$\mathbf{s}=\gamma_1\mathbf{S}_c+\gamma_2\mathbf{S}_t+\gamma_3\mathbf{S}_t\times\mathbf{S}_c \tag{6.2}$$

Аналогично приходим с помощью решения (3.6) при $\mathbf{C}=\mathbf{C}_*$ к векторному выражению

$$\mathbf{S}=\gamma_1\mathbf{S}_c+\gamma_2\mathbf{S}_{*t}-\gamma_3\mathbf{S}_{*t}\times\mathbf{S}_c \tag{6.3}$$

Выражения (6.2), (6.3) представляют собой общие решения соответствующих кинематических уравнений вращения [3], содержащих абсолютную и локальную производные вектора $\mathbf{S}$. В этих решениях следует рассматривать вектор $\mathbf{S}_c$ как произвольный постоянный вектор, а векторы $\mathbf{S}_t$, $\mathbf{S}_{*t}$ — как частные решения уравнений при нулевых начальных условиях.

В то же время выражение (6.3) определяет, подобно выражению (5.9), правило сложения последовательных вращений, задаваемых векторами $\mathbf{S}_c$ и $\mathbf{S}_{*t}$, связанными с телом, а выражение (6.2) определяет правило сложения последовательных вращений, задаваемых векторами $\mathbf{S}_c$, $\mathbf{S}_t$, неподвижными в базисе I.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Панов А. П.* Кинематические дифференциальные уравнения для собственных векторов операторов вращения твердого тела.— Изв. АН СССР. МТТ, 1985, № 4, с. 26–32.
2. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 431 с.
3. *Панов А. П.* О тождествах алгебры Ли кососимметрических операторов и их применении в задачах вычислений параметров вращения.— В кн.: Кибернетика и вычислительная техника. Вып. 65. Киев: Наук. думка, 1985, с. 69–75.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
5. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.
6. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
7. *Бранец В. А., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
8. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1970. 400 с.
9. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970. 720 с.

Киев

Поступила в редакцию
18.XII.1984