МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1986

УДК 531.38

КВАТЕРНИОННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ МАТЕРИАЛЬНЫХ СИСТЕМ. I

ЧЕЛНОКОВ Ю. Н.

Разрабатываются кватернионные методы исследования относительного движения динамически симметричных материальных систем. В основе методов лежит кватернионный аппарат Гамильтона и кватернионный способ описания движения, которым присуща компактность, геометрическая и кинематическая наглядность проводимых преобразований. Другая их отличительная черта – наличие в кватернионных уравнениях движения симметричных и линейных структур, отсутствие в них тригонометрических функций и связанных с ними особенностей, имеющих место при использовании традиционного способа описания движения в углах Эйлера – Крылова. Это делает кватернионные методы удобными как для аналитического, так и для численного решения ряда задач динамики симметричного твердого тела с одной неподвижной точкой, физического маятника с подвижной точкой опоры [1–3], невозмущаемых гиромаятниковых систем [2–5], симметричного спутника и гиростата [6–9].

В первой части работы при помощи теоремы об изменении момента количеств относительного движения получены кватернионные уравнения движения динамически симметричных материальных систем относительно системы координат, перемещающейся в инерциальном пространстве по произвольному заданному закону. Рассмотрены случаи, в которых кватернионные уравнения относительного движения значительно упрощаются за счет замены переменных, позволяющей исключить из рассмотрения проекцию вектора абсолютной угловой скорости вращения материальной системы на ее ось динамической симметрии. С геометрической точки зрения предложенные замены переменных означают рассмотрение уравнений движения в системе координат, абсолютная угловая скорость вращения которой коллинеарна вектору кинетического момента относительного движения материальной системы. Рассмотрены случаи, в которых кватернионные уравнения приводятся к стандартной форме, не содержащей тригонометрических функций от медленных переменных (к уравнениям в кватернионных оскулирующих элементах).

Применение параметров Родрига – Гамильтона, являющихся компонентами кватернионов, в динамике твердого тела с одной неподвижной точкой, гиромаятниковых систем и гиростата ранее рассматривалось в [4, 10–12], а также в [13–15].

1. Рассмотрим материальную систему Q, состоящую из некоторого несущего тела Q_1 и системы носимых тел Q_2, не связанных неизменно с Q_1. Тело Q_1 имеет относительно своей точки O, называемой точкой подвеса, три степени свободы. Точка подвеса произвольно перемещается в пространстве. Поместим в точку O начала следующих систем координат: $X_1X_2X_3(X)$, перемещающейся относительно инерциальной системы координат $O^*X_1^*X_2^*X_3^*(X^*)$ поступательно; $Z_1Z_2Z_3(Z)$, вращающейся относительно $X(X^*)$ с заданной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}^\circ$; $Y_1Y_2Y_3(Y)$, жестко связанной с телом Q_1.

Движение системы Q будем рассматривать относительно системы координат X. Обозначим через $\mathbf{L}$ главный вектор моментов количеств этого движения системы, вычисленный относительно точки O. Полагая, что вектор $\mathbf{L}$ определен своими проекциями в системе координат Y, запишем теорему об изменении момента количеств относительного движения системы Q:

$$(d\mathbf{L}/dt)_1+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{L}=\mathbf{M}'+\mathbf{M}'' \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{M}'$ – главный момент внешних сил, приложенных к системе Q, вычисленный относительно точки O, $\mathbf{M}''$ – главный момент переносных сил инерции, вычисленный относительно той же точки O, $\boldsymbol{\omega}$ — вектор абсолютной угловой скорости вращения системы координат Y (тела Q_1), $(d/dt)_1$ — символ локального дифференцирования в системе координат Y.

В соответствии со схемой поворотов

$$X \xrightarrow{\mathbf{v},\,\boldsymbol{\omega}^\circ} Z \xrightarrow{\boldsymbol{\varkappa},\,\mathbf{u}} Y \sim X \xrightarrow{\mathbf{s},\,\boldsymbol{\omega}} Y \qquad (1.2)$$

введем кватернионы $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\varkappa}$, $\mathbf{s}$, характеризующие взаимную ориентацию систем координат X, Z, Y. Будем считать, что каждый из кватернионов $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\varkappa}$, $\mathbf{s}$ определен своими компонентами в базисе, преобразуемом этим кватернионом, т. е. является собственным кватернионом [16].

На схеме (1.2) через $\mathbf{u}$ обозначен вектор угловой скорости вращения системы координат Y относительно Z.

Кватернионная форма уравнения (1.1) имеет вид

$$2\mathbf{s}^{\circ\cdot}=\mathbf{s}^\circ\circ\boldsymbol{\omega}_Y+\mathbf{s}\circ(\mathbf{M}_Y'+\mathbf{M}_Y'') \qquad (1.3)$$

$$2\mathbf{s}^\cdot=\mathbf{s}\circ\boldsymbol{\omega}_Y, \qquad \mathbf{s}^\circ={}^1/_2\mathbf{s}\circ\mathbf{L}_Y={}^1/_2\mathbf{L}_X\circ\mathbf{s}$$

Здесь и далее запись вида $\mathbf{r}_\xi$ означает отображение вектора $\mathbf{r}$ на базис ξ ($\xi=X$, Y, Z); точка означает дифференцирование по времени t, а знак $\circ$ — кватернионное умножение.

Будем рассматривать материальные системы, имеющие ось динамической симметрии OY_3, кинетический момент $\mathbf{L}$ которых в движении относительно системы координат X описывается выражением

$$\mathbf{L}_Y=I_1\boldsymbol{\omega}_Y+(I_3-I_1)r\mathbf{i}_3+\mathbf{H}_Y, \qquad \boldsymbol{\omega}_Y=p\mathbf{i}_1+q\mathbf{i}_2+r\mathbf{i}_3 \qquad (1.4)$$

где $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ — орты гиперкомплексного пространства, p, q, r — проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на оси системы координат Y, I_1, I_3 — моменты инерции несущего тела (или материальной системы Q при закрепленных носимых телах Q_2) относительно осей OY_1, OY_3; $\mathbf{H}$ — суммарный кинетический момент носимых тел.

Учитывая выражение (1.4), из уравнений (1.3) получим

$$\mathbf{s}^{\cdot\cdot}-cr\mathbf{s}^\cdot\circ\mathbf{i}_3-{}^1/_2cr^\cdot\mathbf{s}\circ\mathbf{i}_3-{}^1/_2cr^2\mathbf{s}+n\mathbf{s}^\cdot\circ\mathbf{H}_Y+$$

$$+{}^1/_2n\mathbf{s}\circ\mathbf{H}_Y^\cdot=-{}^1/_2(n\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{H}+{}^1/_2\omega^2)\mathbf{s}+{}^1/_2n\mathbf{s}\circ(\mathbf{M}_Y'+\mathbf{M}_Y'') \qquad (1.5)$$

$$\omega^2=4(s_0^{\cdot 2}+s_1^{\cdot 2}+s_2^{\cdot 2}+s_3^{\cdot 2}), \qquad \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{H}=pH_1+qH_2+rH_3$$

$$c=I_1^{-1}(I_1-I_3), \qquad n=I_1^{-1}$$

$$\mathbf{H}_Y=\sum_{i=1}^3 H_i\mathbf{i}_i, \qquad \mathbf{M}_Y'=\sum_{i=1}^3 M_i'\mathbf{i}_i, \qquad \mathbf{M}_Y''=\sum_{i=1}^3 M_i''\mathbf{i}_i, \qquad \mathbf{H}_Y^\cdot=\sum_{i=1}^3 H_i^\cdot\mathbf{i}_i$$

Здесь H_i, M_i', M_i'' — проекции векторов $\mathbf{H}$, $\mathbf{M}'$, $\mathbf{M}''$ на ось OY_i системы координат Y, $p=p(\mathbf{s},\mathbf{s}^\cdot)$, $q=q(\mathbf{s},\mathbf{s}^\cdot)$, $r=r(\mathbf{s},\mathbf{s}^\cdot)$ — известные функции компонент s_j и $s_j^\cdot$ ($j=0$, 1, 2, 3) кватернионов $\mathbf{s}$ и $\mathbf{s}^\cdot$.

Кватернионное уравнение (1.5) описывает собой движение материальной системы Q относительно поступательно перемещающейся системы координат X. Это уравнение, в котором неизвестной величиной является кватернион $\mathbf{s}$, в общем случае необходимо дополнить уравнением для проекции r абсолютной угловой скорости несущего тела Q_1 на ось динамической симметрии и уравнениями для переменных H_i. Надобность в этих уравнениях отпадает, если r и H_i являются известными функциями времени t, а также в некоторых других случаях.

2. Перейдем в уравнении (1.5) к новой кватернионной переменной $\boldsymbol{\varkappa}$, используя равенство

$$\mathbf{s}=\mathbf{v}\circ\boldsymbol{\varkappa} \qquad (2.1)$$

вытекающее из схемы поворотов (1.2). Подставляя равенство (2.1) в уравнение (1.5) и учитывая кинематическое уравнение $2\mathbf{v}^\cdot=\mathbf{v}\circ\boldsymbol{\omega}_Z^\circ$, получим

$$\boldsymbol{\varkappa}^{\cdot\cdot}+\boldsymbol{\omega}_Z^\circ\circ\boldsymbol{\varkappa}^\cdot+\boldsymbol{\varkappa}^\cdot\circ(n\mathbf{H}_Y-cr\mathbf{i}_3)-{}^1/_2c(r^\cdot+r\omega_Z^\circ)\circ\boldsymbol{\varkappa}\circ\mathbf{i}_3+$$

$$+{}^1/_2(-cr^2+\boldsymbol{\omega}_Z{}^{\circ\cdot})\circ\boldsymbol{\varkappa}+{}^1/_2 n\boldsymbol{\omega}_Z{}^\circ\circ\boldsymbol{\varkappa}\circ\mathbf{H}_Y+{}^1/_2 n\boldsymbol{\varkappa}\circ\dot{\mathbf{H}}_Y{}^{\cdot}=$$

$$=-{}^1/_2[n\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{H}+{}^1/_2(\omega^2-\omega^{\circ 2})]\boldsymbol{\varkappa}+{}^1/_2 n\boldsymbol{\varkappa}\circ(\mathbf{M}_Y{}'+\mathbf{M}_Y{}'') \qquad (2.2)$$

$$\boldsymbol{\omega}_Z{}^\circ=p_0\mathbf{i}_1+q_0\mathbf{i}_2+r_0\mathbf{i}_3,\qquad \omega^{\circ 2}=p_0{}^2+q_0{}^2+r_0{}^2$$

где p_0, q_0, r_0 — проекции вектора $\boldsymbol{\omega}^\circ$ на оси системы координат Z, являющиеся известными функциями времени.

Будем считать, что центр масс материальной системы Q лежит на отрицательной части оси динамической симметрии OY_3 и отстоит от точки подвеса O на расстоянии l. Тогда главный момент $\mathbf{M}''$ переносных сил инерции относительно точки O $\mathbf{M}''=-lm\,\mathbf{w}\times\mathbf{y}_3$, где m — масса материальной системы Q, $\mathbf{w}$ — вектор абсолютного ускорения точки O, $\mathbf{y}_3$ — единичный вектор оси OY_3.

Направим ось OZ_3 системы координат Z по геоцентрической вертикали от центра Земли O^*. Предположим, что среди внешних сил, действующих на материальную систему Q, имеются потенциальные силы, главный момент $\mathbf{M}_1{}'$ которых относительно точки O определяется равенством

$$\mathbf{M}_1{}'=dU(\gamma_3)/d\gamma_3\mathbf{y}_3\times\mathbf{z}_3,\qquad \gamma_3=\cos\vartheta \qquad (2.3)$$

где $\mathbf{z}_3$ — единичный вектор оси OZ_3, ϑ — угол между осями OZ_3 и OY_3, $U(\gamma_3)$ — произвольная непрерывная дифференцируемая функция переменной γ_3.

Выражением (2.3) описывается, в частности, момент сил центрального ньютоновского поля тяготения, момент сил светового давления [6, 9]. В ряде случаев момент вида (2.3) может быть создан искусственно.

Сумму моментов всех сил, действующих на систему Q, теперь можно представить в виде

$$\mathbf{M}'+\mathbf{M}''=\mathbf{M}-lm\mathbf{w}\times\mathbf{y}_3-dU(\gamma_3)/d\gamma_3\mathbf{z}_3\times\mathbf{y}_3 \qquad (2.4)$$

где $\mathbf{M}$ — главный момент действующих на систему Q других внешних сил (помимо потенциальных сил с силовой функцией $U(\gamma_3)$), вычисленный относительно точки O.

Уравнение (2.2) с учетом равенства (2.4) принимает вид

$$\boldsymbol{\varkappa}^{\cdot\cdot}+\boldsymbol{\omega}_Z{}^\circ\circ\boldsymbol{\varkappa}^\cdot+\boldsymbol{\varkappa}^\cdot\circ(n\mathbf{H}_Y-cr\mathbf{i}_3)+{}^1/_2[lmn\mathbf{w}_Z-$$

$$-c(r^\cdot+r\boldsymbol{\omega}_Z{}^\circ)]\circ\boldsymbol{\varkappa}\circ\mathbf{i}_3+{}^1/_2(lmnw_3-cr^2+\boldsymbol{\omega}_Z{}^{\circ\cdot})\circ\boldsymbol{\varkappa}+{}^1/_2 n\boldsymbol{\omega}_Z{}^\circ\circ\boldsymbol{\varkappa}\circ\mathbf{H}_Y+$$

$$+{}^1/_2 n\boldsymbol{\varkappa}\circ\mathbf{H}_Y{}^\cdot=-ndU(\gamma_3)/d\gamma_3(\varkappa_1\mathbf{i}_1+\varkappa_2\mathbf{i}_2)+\chi\boldsymbol{\varkappa}+{}^1/_2 n\boldsymbol{\varkappa}\circ\mathbf{M}_Y \qquad (2.5)$$

$$\chi=-{}^1/_2\Big[\,n\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{H}+{}^1/_2(\omega^2-\omega^{\circ 2})+lmn(w_3{}'-w_3)+ \qquad (2.6)$$

$$+n\frac{dU(\gamma_3)}{d\gamma_3}(\gamma_3-1)\Big]=-(\varkappa_0{}^{\cdot 2}+\varkappa_1{}^{\cdot 2}+\varkappa_2{}^{\cdot 2}+\varkappa_3{}^{\cdot 2})-p_0(\varkappa_0\varkappa_1{}^\cdot-$$

$$-\varkappa_1\varkappa_0{}^\cdot+\varkappa_2\varkappa_3{}^\cdot-\varkappa_3\varkappa_2{}^\cdot)-q_0(\varkappa_0\varkappa_2{}^\cdot-\varkappa_2\varkappa_0{}^\cdot-\varkappa_1\varkappa_3{}^\cdot+\varkappa_3\varkappa_1{}^\cdot)-$$

$$-r_0(\varkappa_0\varkappa_3{}^\cdot-\varkappa_3\varkappa_0{}^\cdot+\varkappa_1\varkappa_2{}^\cdot-\varkappa_2\varkappa_1{}^\cdot)-lmn[w_1(\varkappa_0\varkappa_2+\varkappa_1\varkappa_3)+w_2(\varkappa_2\varkappa_3-\varkappa_0\varkappa_1)-$$

$$-w_3(\varkappa_1{}^2+\varkappa_2{}^2)]+n\,dU(\gamma_3)/d\gamma_3(\varkappa_1{}^2+\varkappa_2{}^2)-{}^1/_2 n(pH_1+qH_2+rH_3)$$

$$\boldsymbol{\omega}_Y=p\mathbf{i}_1+q\mathbf{i}_2+r\mathbf{i}_3=\bar{\boldsymbol{\varkappa}}\circ(\boldsymbol{\omega}_Z{}^\circ\circ\boldsymbol{\varkappa}+2\boldsymbol{\varkappa}^\cdot)$$

$$\mathbf{w}_Z=w_1\mathbf{i}_1+w_2\mathbf{i}_2+w_3\mathbf{i}_3,\qquad \boldsymbol{\omega}_Z{}^\circ=p_0\mathbf{i}_1+q_0\mathbf{i}_2+r_0\mathbf{i}_3$$

$$c=(I_1-I_3)I_1{}^{-1},\qquad n=I_1{}^{-1},\qquad \gamma_3=1-2(\varkappa_1{}^2+\varkappa_2{}^2)=2(\varkappa_0{}^2+\varkappa_3{}^2)-1$$

$$\boldsymbol{\varkappa}\circ\mathbf{M}_Y=\mathbf{M}_Z\circ\boldsymbol{\varkappa},\qquad \mathbf{M}_Z=\sum_{i=1}^{3}M_i{}^\circ\mathbf{i}_i$$

Здесь $\varkappa_j$ ($j=0, 1, 2, 3$) — параметры Родрига — Гамильтона (компоненты кватерниона $\boldsymbol{\varkappa}$), характеризующие ориентацию материальной системы Q (системы координат Y) относительно системы координат Z, w_i ($i=1, 2, 3$) — проекции вектора $\mathbf{w}$ на оси системы координат Z, являющиеся, так же как и величины p_0, q_0, r_0, известными функциями времени, w_3' — проекция вектора $\mathbf{w}$ на ось OY_3, M_i° — проекции вектора $\mathbf{M}$ на оси системы координат Z; черта означает сопряженный кватернион.

Кватернионное уравнение (2.5) описывает угловое движение динамически симметричной материальной системы Q, точка подвеса которой перемещается в пространстве с произвольно заданным абсолютным ускорением $\mathbf{w}$, относительно системы координат Z, вращающейся с заданной абсолютной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}^\circ$ таким образом, что ее ось OZ_3 во время движения направлена по геоцентрической вертикали. Это уравнение эквивалентно системе четырех дифференциальных уравнений второго порядка, в которой неизвестными являются параметры Родрига — Гамильтона $\varkappa_j$. В общем случае эту систему уравнений необходимо дополнить уравнением для проекции r: $I_3\dot{r}=M_3$ и уравнениями для проекций H_i кинетического момента несомых тел Q_2. Как отмечалось, необходимость в этих уравнениях отпадает, если r и H_i являются известными функциями времени. В этом случае левая часть уравнения (2.5) является линейной относительно параметров Родрига — Гамильтона $\varkappa_j$ и их производных, причем коэффициенты, стоящие перед $\varkappa_j$ и их производными, являются заданными функциями времени. Нелинейность уравнения (2.5) в этом случае обусловливается (при $\mathbf{M}=0$) силовой функцией $U(\gamma_3)$ и скалярной функцией χ, входящими в правую часть этого уравнения. Функция χ задается формулой (2.6) и представляет собой нелинейную функцию восьми переменных $\varkappa_j$, $\dot{\varkappa}_j$.

Уравнениями (2.5), (2.6) описывается движение следующих материальных систем: тяжелого симметричного гироскопа по Лагранжу [17] (при $\mathbf{H}=0$, $\boldsymbol{\omega}^\circ=0$, $\mathbf{w}=0$), физического маятника с подвижной точкой опоры [1—3] (при $\mathbf{H}=0$), динамически симметричного спутника [6, 9] (при $\mathbf{H}=0$, $l=0$) и гиростата [7—8] (при $l=0$) (для тяжелого гиростата [17] $l\neq0$), невозмущаемых гиромаятниковых систем [2—5, 18, 19] (при $\mathbf{H}=0$ и определенном выборе параметров n, c).

3. Перейдем в уравнении (2.2) к новой кватернионной переменной $\boldsymbol{\lambda}$ в соответствии со схемой поворотов

$$Z \xrightarrow{\boldsymbol{\varkappa},\,\mathbf{u}} Y \xrightarrow{\boldsymbol{\mu},\,\mathbf{u}'} Y' \sim Z \xrightarrow{\boldsymbol{\lambda},\,\boldsymbol{\omega}^*} Y' \tag{3.1}$$

Здесь Y' — система координат, вращающаяся относительно Y вокруг оси $OY_3(OY_3')$ с угловой скоростью $\mathbf{u}'=-cr\mathbf{y}_3$, $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\lambda}$ — кватернионы, характеризующие ориентацию системы координат Y' относительно Y и Z соответственно, $\boldsymbol{\omega}^*=\mathbf{u}+\mathbf{u}'$ — угловая скорость вращения системы координат Y' относительно Z.

Кватернион $\boldsymbol{\mu}$ определяется соотношением

$$\boldsymbol{\mu}=\cos{}^1/_2\,\varepsilon-\mathbf{i}_3\sin{}^1/_2\varepsilon,\qquad \dot{\varepsilon}=cr \tag{3.2}$$

Дифференцируя равенство

$$\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\varkappa}\circ\boldsymbol{\mu} \tag{3.3}$$

вытекающее из схемы (3.1) по времени дважды и учитывая уравнение (2.2) и соотношения

$$\dot{\boldsymbol{\mu}}=-{}^1/_2cr\mathbf{i}_3\circ\boldsymbol{\mu},\qquad \ddot{\boldsymbol{\mu}}=-{}^1/_2c(\dot{r}\mathbf{i}_3+{}^1/_2cr^2)\circ\boldsymbol{\mu} \tag{3.4}$$

получаем

$$\begin{gathered}\ddot{\boldsymbol{\lambda}}+\boldsymbol{\omega}_Z{}^\circ\circ\dot{\boldsymbol{\lambda}}+{}^1/_2\dot{\boldsymbol{\omega}}_Z{}^\circ\circ\boldsymbol{\lambda}+n(\dot{\boldsymbol{\lambda}}+{}^1/_2\boldsymbol{\omega}_Z{}^\circ\circ\boldsymbol{\lambda}+\\ +{}^1/_2cr\boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{i}_3)\circ\mathbf{H}_{Y1}+{}^1/_2n\boldsymbol{\lambda}\circ\dot{\mathbf{H}}_{Y1}=\\ =-{}^1/_2[n\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{H}+{}^1/_2(\Omega^2-\omega^{\circ2})]\boldsymbol{\lambda}+{}^1/_2n\boldsymbol{\lambda}\circ(\mathbf{M}_{Y1}'+\mathbf{M}_{Y1}'')\end{gathered} \tag{3.5}$$

$$\mathbf{H}_{Y1}=\bar{\boldsymbol{\mu}}\circ\mathbf{H}_Y\circ\boldsymbol{\mu},\qquad \dot{\mathbf{H}}_{Y1}=\bar{\boldsymbol{\mu}}\circ\dot{\mathbf{H}}_Y\circ\boldsymbol{\mu} \tag{3.6}$$

$$\boldsymbol{\lambda}\circ(\mathbf{M}_{Y1}'+\mathbf{M}_{Y1}'')=\boldsymbol{\lambda}\circ\bar{\boldsymbol{\mu}}\circ(\mathbf{M}_Y'+\mathbf{M}_Y'')\circ\boldsymbol{\mu}$$

где Ω — модуль вектора $\boldsymbol{\Omega}$ абсолютной угловой скорости вращения системы координат Y'.

Используя равенства (2.4), (3.3), (3.6) и полагая $\mathbf{H}=0$, из (3.5) получаем

$$\lambda^{\cdot\cdot}+\omega_Z{}^\circ\circ\lambda^{\cdot}+{}^1/_2 lmn\mathbf{w}_Z\circ\lambda\circ\mathbf{i}_3+{}^1/_2(lmnw_3+\omega_Z{}^{\circ\cdot})\circ\lambda=$$
$$=-ndU(\gamma_3)/d\gamma_3(\lambda_1\mathbf{i}_1+\lambda_2\mathbf{i}_2)+\chi^*\lambda+{}^1/_2 n\lambda\circ\mathbf{M}_{Y1} \quad (3.7)$$
$$\chi^*=-{}^1/_2[{}^1/_2(\Omega^2-\omega^{\circ 2})+lmn(w_3'-w_3)+n(dU(\gamma_3)/d\gamma_3)(\gamma_3-1)]=$$
$$=-(\lambda_0^{\cdot 2}+\lambda_1^{\cdot 2}+\lambda_2^{\cdot 2}+\lambda_3^{\cdot 2})-p_0(\lambda_0\lambda_1^{\cdot}-\lambda_1\lambda_0^{\cdot}+\lambda_2\lambda_3^{\cdot}-$$
$$-\lambda_3\lambda_2^{\cdot})-q_0(\lambda_0\lambda_2^{\cdot}-\lambda_2\lambda_0^{\cdot}-\lambda_1\lambda_3^{\cdot}+\lambda_3\lambda_1^{\cdot})-$$
$$-r_0(\lambda_0\lambda_3^{\cdot}-\lambda_3\lambda_0^{\cdot}+\lambda_1\lambda_2^{\cdot}-\lambda_2\lambda_1^{\cdot})-lmn[w_1(\lambda_0\lambda_2+$$
$$+\lambda_1\lambda_3)+w_2(\lambda_2\lambda_3-\lambda_0\lambda_1)-w_3(\lambda_1^2+\lambda_2^2)]+ndU(\gamma_3)/d\gamma_3(\lambda_1^2+\lambda_2^2) \quad (3.8)$$
$$\gamma_3=1-2(\lambda_1^2+\lambda_2^2)=2(\lambda_0^2+\lambda_3^2)-1$$
$$\lambda\circ\mathbf{M}_{Y1}=\lambda\circ\bar{\mu}\circ\mathbf{M}_Y\circ\mu=\mathbf{M}_Z\circ\lambda \quad (3.9)$$

Кватернионное уравнение (3.7) и соотношения (3.8), (3.9) являются при $\mathbf{H}=0$ уравнениями относительного движения материальной системы Q в переменных λ_j, являющихся параметрами Родрига — Гамильтона (компонентами кватерниона λ), характеризующими собой ориентацию системы координат Y' относительно Z. Для нахождения параметров $\varkappa_j$, определяющих собой угловое движение материальной системы Q относительно системы координат Z, необходимо воспользоваться соотношением $\varkappa=\lambda\circ\bar{\mu}$ и формулами (3.2).

Левая часть уравнения (3.7) линейная относительно параметров Родрига — Гамильтона λ_j и их производных. Видно, что уравнение (3.7) гораздо проще уравнения, получающегося из (2.5) при $\mathbf{H}=0$, причем это уравнение при $\mathbf{M}_Y=M_3(t)\mathbf{i}_3$, а также в случаях, когда момент $\mathbf{M}$ задан своими проекциями $M_i{}^\circ(t)$ в системе координат Z, не содержит проекции r абсолютной угловой скорости вращения материальной системы на ее ось динамической симметрии.

Таким образом, замена переменных, определяемая соотношениями (3.2), (3.3), позволяет в случаях, когда $\mathbf{H}=0$, существенно упростить уравнения относительного движения материальной системы Q в параметрах Родрига — Гамильтона. Переход к переменным λ_j означает рассмотрение уравнений движения материальной системы Q в системе координат Y', вращающейся с абсолютной угловой скоростью $\mathbf{\Omega}=\boldsymbol{\omega}-cr\mathbf{y}_3=p\mathbf{y}_1+q\mathbf{y}_2+(1-c)r\mathbf{y}_3$, где $\mathbf{y}_i$ — орт оси OY_i (при $\mathbf{H}=0$ $I_1\mathbf{\Omega}=\mathbf{L}$, т. е. векторы $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{L}$ коллинеарны).

Отметим, что уравнение (3.7) и уравнение, получающееся из (2.5) при $\mathbf{H}=0$, $r=0$ (в этом случае будет равна нулю и проекция M_3 момента $\mathbf{M}$ на ось динамической симметрии материальной системы) по форме совпадают. Однако смысл этих уравнений различен, поскольку уравнение (3.7) описывает собой движение материальной системы при $\mathbf{H}=0$ и $r=r(t)\neq 0$ ($M_3=M_3(t)\neq 0$), в силу чего $\mathbf{M}_{Y1}\neq\mathbf{M}_Y$.

4. Получим кватернионные уравнения относительного движения динамически симметричных материальных систем, удобные в ряде случаев для применения методов нелинейной механики.

Перейдем в уравнении (1.5) к новой кватернионной переменной $\mathbf{z}$ в соответствии со схемой поворотов

$$X\xrightarrow{\mathbf{s},\,\boldsymbol{\omega}}Y\xrightarrow{\mu,\,\mathbf{u}'}Y'\sim X\xrightarrow{\mathbf{z},\,\mathbf{\Omega}}Y' \quad (4.1)$$

Здесь $\mathbf{z}$ — кватернион, характеризующий ориентацию введенной в п. 3 системы координат Y' относительно X.

Дифференцируя дважды по времени равенство $\mathbf{z}=\mathbf{s}\circ\mu$, вытекающее из схемы поворотов (4.1), и учитывая уравнение (1.5) и соотношения (2.4), (3.4), получаем

$$\mathbf{z}^{\cdot\cdot}+n(\mathbf{z}^{\cdot}+{}^1/_2 cr\mathbf{z}\circ\mathbf{i}_3)\circ\mathbf{H}_{Y1}+{}^1/_2 n\mathbf{z}\circ\mathbf{H}_{Y1}{}^{\cdot}=$$
$$=-{}^1/_2(n\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{H}+{}^1/_2\Omega^2)\mathbf{z}+{}^1/_2 n\mathbf{z}\circ(\mathbf{M}_{Y1}'+\mathbf{M}_{Y1}'') \quad (4.2)$$

$$^1/_4\Omega^2=z_0^{\cdot 2}+z_1^{\cdot 2}+z_2^{\cdot 2}+z_3^{\cdot 2} \tag{4.3}$$

$$\mathbf{z}\circ(\mathbf{M}_{Y1}'+\mathbf{M}_{Y1}'')=\mathbf{z}\circ\bar{\boldsymbol{\mu}}\circ\mathbf{M}_Y\circ\boldsymbol{\mu}-lm\mathbf{v}\circ\mathbf{w}_Z\circ\bar{\mathbf{v}}\circ\mathbf{z}\circ\mathbf{i}_3-$$

$$-lmw_3'\mathbf{z}-(dU(\gamma_3)/d\gamma_3)(\mathbf{v}\circ\mathbf{i}_3\circ\bar{\mathbf{v}}\circ\mathbf{z}\circ\mathbf{i}_3+\gamma_3\mathbf{z}) \tag{4.4}$$

$$\boldsymbol{\mu}=\cos\frac{\varepsilon}{2}-\mathbf{i}_3\sin\frac{\varepsilon}{2},\quad \varepsilon^{\cdot}=cr=\frac{2c}{1-c}(z_0z_3^{\cdot}-z_3z_0^{\cdot}-z_1z_2^{\cdot}+z_2z_1^{\cdot})$$

$$\mathbf{z}\circ\bar{\boldsymbol{\mu}}\circ\mathbf{M}_Y\circ\boldsymbol{\mu}=\mathbf{z}\circ\mathbf{M}_{Y1}=\mathbf{M}_X\circ\mathbf{z},\qquad \mathbf{M}_X=\sum_{i=1}^{3}M_i^*\mathbf{i}_i$$

$$w_3'=w_3'(t,\ \mathbf{v},\ \mathbf{z}),\quad \gamma_3=\gamma_3(\mathbf{v},\ \mathbf{z}),\quad \boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\Omega}+cr\mathbf{y}_3$$

Здесь $\mathbf{H}_{Y1}$, $\mathbf{H}_{Y1}^{\cdot}$ определены равенствами (3.6), проекция w_3' абсолютного ускорения точки подвеса на ось динамической симметрии является известной функцией времени t, параметров Родрига — Гамильтона ν_j и z_j, а направляющий косинус угла между вертикалью и осью динамической симметрии γ_3 является известной функцией параметров Родрига — Гамильтона ν_j и z_j, M_i^* — проекции момента $\mathbf{M}$ на оси системы координат X. Кватернион $\mathbf{v}$, входящий в (4.4), находится по закону движения точки подвеса O, если он задан, либо интегрированием кинематического уравнения $2\mathbf{v}^{\cdot}=\mathbf{v}\circ\boldsymbol{\omega}_Z^{\circ}$, если заданы как функции времени проекции p_0, q_0, r_0 вектора $\boldsymbol{\omega}^{\circ}$ на оси системы координат Z.

Переход к переменным $\varkappa_j$, характеризующим ориентацию материальной системы Q относительно системы координат Z, производится после нахождения переменных z_j из уравнения (4.2) в соответствии с формулой $\boldsymbol{\varkappa}=\bar{\mathbf{v}}\circ\mathbf{z}\circ\bar{\boldsymbol{\mu}}$.

Рассмотрим случай, когда $\mathbf{H}=0$. Уравнение (4.2) в этом случае принимает вид

$$\mathbf{z}^{\cdot\cdot}+{}^1/_4\Omega^2\mathbf{z}={}^1/_2n\mathbf{z}\circ(\mathbf{M}_{Y1}'+\mathbf{M}_{Y1}'') \tag{4.5}$$

где Ω и кватернион $\mathbf{z}\circ(\mathbf{M}_{Y1}'+\mathbf{M}_{Y1}'')$ по-прежнему определены равенствами (4.3), (4.4).

Уравнение (4.5) не содержит гироскопических членов, кроме того, при $\mathbf{M}_Y=M_3(t)\mathbf{i}_3$, а также в случаях, когда момент $\mathbf{M}$ задан своими проекциями $M_i^*(t)$ в системе координат X, оно не содержит проекции r.

Величина Ω связана с модулем L момента количеств относительного движения системы Q, вычисленного относительно точки O, равенством $I_1\Omega=L$. Эту величину или ее квадрат в ряде случаев целесообразно рассматривать в качестве новой переменной, дополняя кватернионное уравнение (4.5) ее законом изменения, вытекающим из (4.5):

$$d\Omega^2/dt=2n\boldsymbol{\Omega}\cdot(\mathbf{M}'+\mathbf{M}'')=4n\,\mathrm{sqal}\,[\bar{\mathbf{z}}^{\cdot}\circ\mathbf{z}\circ(\mathbf{M}_{Y1}'+\mathbf{M}_{Y1}'')] \tag{4.6}$$

Переходя в (4.5), (4.6) к новой независимой переменной τ (безразмерному времени) по формуле $d\tau=\Omega dt$, получим уравнения

$$\frac{d^2\mathbf{z}}{d\tau^2}+\frac{1}{4}\mathbf{z}=\frac{1}{2\Omega^2}\left[-\frac{d\Omega^2}{d\tau}\frac{d\mathbf{z}}{d\tau}+n\mathbf{z}\circ(\mathbf{M}_{Y1}'+\mathbf{M}_{Y1}'')\right] \tag{4.7}$$

$$d\Omega^2/d\tau=4n\,\mathrm{sqal}\,[d\bar{\mathbf{z}}/d\tau\circ\mathbf{z}\circ(\mathbf{M}_{Y1}'+\mathbf{M}_{Y1}'')]$$

$$dt/d\tau=1/\Omega,\quad \Omega\neq0$$

Если $\mathbf{M}'+\mathbf{M}''=0$, то каждое из уравнений (4.5), (4.7) становится эквивалентным уравнению движения гармонического осциллятора:

$$\mathbf{z}^{\cdot\cdot}+{}^1/_4\Omega^2\mathbf{z}=0,\quad \Omega=\mathrm{const},\quad d^2\mathbf{z}/d\tau^2+{}^1/_4\mathbf{z}=0 \tag{4.8}$$

поскольку в этом случае имеет место интеграл момента количеств движения.

Общее решение уравнений (4.8) имеет вид (α, β — постоянные кватернионы):

$$\mathbf{z}=\alpha\cos{}^1/_2\tau+\beta\sin{}^1/_2\tau,\quad \tau^{\cdot}=\Omega \tag{4.9}$$

Полагая сумму моментов внешних сил и переносных сил инерции $\mathbf{M}'$, M″ отличной от нуля, будем искать решения уравнений (4.7) в виде (4.9), считая α, β, Ω не постоянными, а некоторыми переменными функциями времени. При этом, используя идею вариации произвольных постоянных, потребуем чтобы кватернионы α и β были связаны помимо соотношения (4.9) еще и соотношением

$$\alpha^{\bullet} \cos {}^1\!/_2\tau + \beta^{\bullet} \sin {}^1\!/_2\tau = 0 \qquad (4.10)$$

Рассматривая выражения (4.9), (4.10) как формулы замены переменной $\mathbf{z}$ на новые переменные α, β, вместо уравнений (4.7) получаем систему уравнений относительно новых переменных α, β, Ω и t:

$$\begin{gathered} d\alpha/d\tau = -\mathbf{f} \sin {}^1\!/_2\tau, \quad d\beta/d\tau = \mathbf{f} \cos {}^1\!/_2\tau, \quad dt/d\tau = \Omega^{-1}, \ \Omega \neq 0 \\ d\Omega^2/d\tau = 4n \operatorname{sqal} [d\bar{\mathbf{z}}/d\tau \circ \mathbf{z} \circ (\mathbf{M}_{Y_1}{}' + \mathbf{M}_{Y_1}{}'')] \\ \mathbf{f} = \frac{1}{\Omega^2} \left[-\frac{d\Omega^2}{d\tau} \frac{d\mathbf{z}}{d\tau} + n\mathbf{z} \circ (\mathbf{M}_{Y_1}{}' + \mathbf{M}_{Y_1}{}'') \right] \\ \mathbf{z} = \alpha \cos {}^1\!/_2\tau + \beta \sin {}^1\!/_2\tau, \quad d\mathbf{z}/d\tau = {}^1\!/_2 (-\alpha \sin {}^1\!/_2\tau + \beta \cos {}^1\!/_2\tau) \end{gathered} \qquad (4.11)$$

Здесь кватернион $\mathbf{z} \circ (\mathbf{M}_{Y_1}{}' + \mathbf{M}_{Y_1}{}'')$ определяется соотношениями (4.4).

В ряде случаев, когда сумма моментов внешних сил и переносных сил инерции M′, M″ мала, правые части уравнений (4.11) для переменных α, β, Ω пропорцинальны малому параметру. Поэтому уравнения (4.11) являются в этих случаях кватернионными уравнениями относительного движения динамически симметричных материальных систем в стандартной форме с медленными переменными α, β, Ω и одной вращающейся фазой τ, если моменты M′, M″ не являются периодическими функциями времени t, и с двумя вращающимися фазами τ, t, если моменты M′, M″ — периодические функции времени t. Кроме того, в качестве быстрых переменных наряду с переменными τ, t могут выступать величина ε, имеющая смысл угла поворота системы координат Y' относительно Y, и другие переменные. Уравнения (4.11) в соответствии с принятой терминологией [9] могут быть названы кватернионными уравнениями относительного движения динамически симметричных материальных систем в оскулирующих элементах (α, β, Ω). В отличие от используемых в настоящее время уравнений движения в угловых оскулирующих элементах, они не содержат тригонометрических функций от медленных переменных и не имеют связанных с ними особенностей.

Наличие симметричных и линейных структур в полученных кватернионных уравнениях относительного движения динамически симметричных материальных систем, отсутствие в них тригонометрических функций и связанных с ними особенностей, имеющих место при использовании традиционного способа задания углового движения в углах Эйлера — Крылова, делают кватернионные уравнения удобными для решения ряда задач. В частности, их целесообразно использовать для исследования устойчивости относительного движения материальных систем, для решения задачи синтеза управляющих моментов, придающих системам заранее заданные свойства, в виде функций параметров Родрига — Гамильтона и их производных, для исследования характера движения систем по структуре действующих сил, для численного и аналитического исследования решений с помощью методов нелинейной механики.

Так, уравнения движения в параметрах z_j и в кватернионных оскулирующих элементах целесообразно использовать для исследования методами нелинейной механики движения симметричного твердого тела, близкого к свободному, и симметричного спутника. При этом оказывается полезной имеющая место аналогия уравнений движения твердого тела и спутника в параметрах z_j с уравнениями движения четырехмерного возмущенного осциллятора, совершающего в случае движения тела (спутника) по инерции одночастотные гармонические колебания с частотой, пропорциональной модулю кинетического момента тела (спутника). Уравнения движения в параметрах z_j эффективны в задаче о движении симметричного твердого тела с одной неподвижной точкой в потенциальном силовом поле, создающим относительно точки подвеса тела момент вида (2.3). В этом случае имеет место строгое разделение движения по двум группам переменных z_0, z_3 и z_1, z_2 и задача сводится к разрешимой в квадратурах задаче о движении материальной точки единичной массы в плоском центральном поле сил, силовая функция которого выражается через функцию $U(\gamma_3)$ и зависит лишь от расстояния точки до центра силового поля. При этом оказывается, что частоты колебательных движений тела по переменным z_0, z_3 и z_1, z_2 связаны с энергией тела и являются в случае малости угла нутации постоянными величинами для переменных z_0, z_3 с точностью до величин первого порядка малости включительно, а для переменных z_1, z_2 — с точностью до величин второго порядка малости включительно (частоты постоянны также в случае регулярной прецессии тела). Уравнения в параметрах $\varkappa_j$ целесообразно использовать для исследования устойчивости движения спутника, для решения задачи синтеза управляющих моментов системы управления ориентацией спутника в случае, когда в качестве навигационной системы применяется бесплатформенная инерциальная навигационная система, вырабатывающая параметры $\varkappa_j$ и их производные.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ишлинский А. Ю.* Об относительном равновесии физического маятника с подвижной точкой опоры.— ПММ, 1956, т. 20, вып. 3, с. 297—308.
2. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
3. *Андреев В. Д.* Теория инерциальной навигации. (Автономные системы). М.: Наука, 1966. 579 с.
4. *Кошляков В. Н.* Теория гироскопических компасов. М.: Наука, 1972. 344 с.
5. *Климов Д. М.* Механика невозмущаемых гироскопических систем.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 4, с. 57—65.
6. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
7. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения гиростатов.— ПММ, 1961; т. 25, вып. 1, с. 9—16.
8. *Раушенбах Б. В., Токарь Е. Н.* Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974. 598 с.
9. *Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребенников Е. А. и др.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976. 584 с.
10. *Кошляков В. Н.* К вопросу построения некоторого класса решений гиромаятниковой системы.— Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 2, с. 32—38.
11. *Кошляков В. Н.* Об уравнениях гиростата в параметрах Родрига — Гамильтона.— Укр. мат. журн., 1974, т. 26, вып. 5, с. 657—663.
12. *Кошляков В. Н.* Об уравнениях тяжелого твердого тела, вращающегося около неподвижной точки, в параметрах Родрига — Гамильтона.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 4, с. 16—25.
13. *Жбанов Ю. К.* О точных решениях уравнений движения гирогоризонткомпаса.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 2, с. 11—18.
14. *Челноков Ю. Н.* Об уравнениях движения гиромаятниковых систем в параметрах Родрига — Гамильтона.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 2, с. 20—29.
15. *Челноков Ю. Н.* К теории гирогоризонткомпаса в параметрах Родрига — Гамильтона.— Прикл. механика, 1984, т. 20, № 1, с. 111—116.
16. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
17. *Magnus K. Kreisel.* Theorie und Anwendungen. B.: Springer — Verlag, 1971. 493 s.— Рус. перев.: М.: Мир, 1974. 526 с.
18. *Климов Д. М.* Об условиях невозмущаемости гироскопической рамы.— ПММ, 1964, т. 28, вып. 3, с. 511—513.
19. *Блюмин Г. Д., Чичинадзе М. В.* Условия невозмущаемости однороторного гирокомпаса.— Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 3, с. 71—78.

Саратов

Поступила в редакцию
17.VII.1984