МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1986

УДК 531.36

МЕТОДЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА ЭВМ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ

КЛИМОВ Д. М., ЛЕОНОВ В. В., РУДЕНКО В. М.

Теоретическая и прикладная механика представляют широкое поле для приложений такого мощного инструмента, как системы аналитических вычислений на ЭВМ (САВ), которые сейчас интенсивно развиваются во всем мире. Эти системы обеспечили значительное продвижение в решении многих задач теоретической физики и небесной механики [1]. Они быстро и без ошибок обрабатывают большие объемы аналитической информации, что позволяет переложить на них всю рутинную работу при выполнении сложных и громоздких аналитических преобразований. В публикуемой работе излагается процедура исследования систем нелинейных дифференциальных уравнений при помощи символьных преобразований на ЭВМ. В качестве примера решается задача динамики гироскопа в кардановом подвесе.

1. В ряде работ, например [2–5], решения уравнений движения нелинейных механических систем определяются различными асимптотическими методами механики. При попытке получить более высокие приближения получаются чрезвычайно громоздкие выражения, обработка которых вручную требует много времени и часто приводит к ошибкам. Эти трудности значительно возрастают по мере усложнения систем нелинейных дифференциальных уравнений. Практически невозможно анализировать подобные задачи без применения САВ.

Для исследования поведения сложных механических систем применяется алгоритмизированный на ЭВМ метод осреднения — один из наиболее часто используемых и эффективных способов решения задач нелинейной механики. Его реализация на ЭВМ представляет собой комплекс процедур, написанных на САВ РЕДЬЮС. Эти процедуры позволяют производить осреднение системы нелинейных дифференциальных уравнений в любом заданном приближении.

Исходным объектом исследования данной программы являются нелинейные уравнения движения механической системы (ε — малый параметр):

$$F(x^{\cdot\cdot}, x^{\cdot}, x, t, \varepsilon)=0, \quad F\in R^n, \quad x\in R^n \tag{1.1}$$

Для непосредственного применения метода осреднения эти уравнения необходимо привести к стандартной форме. В основу алгоритма здесь была положена методика, описанная в [6].

Разделение быстрых и медленных движений для уравнений (1.1) представляет собой самостоятельную задачу и по своей сути является задачей частотного анализа линейной части уравнений. Однако в общем случае при $\varepsilon=0$ уравнения (1.1) нелинейные и здесь необходимо сделать дополнительные предположения, которые являются естественными для метода осреднения, исследующего поведение решений вблизи какого-нибудь частного решения. Как правило, частное решение определяется положением равновесия механической системы.

Составим уравнения малых отклонений от частного решения (1.1), удерживая в правой части величины соответствующего порядка малости. Порядок оставляемых величин должен быть равен соответствующему числу итераций метода осреднения. Предполагается, что отклонение от частного решения — порядка ε. Анализируя левую часть полученных уравнений, определяем операционную матрицу, присоединенную матрицу $P(D)$ и характеристический определитель $\Delta(D)$, $D=d/dt$. Замена переменных, приводящая к нормальным координатам, или приводящая (1.1) к стандартной форме, имеет следующий вид [6]:

$$\frac{d^\nu x_j}{dt^\nu}=\sum_{\sigma=1}^{s'} V_{j\sigma}^{(\nu)} y_\sigma+\sum_{h=1}^{s''} N_{jh}^{(\nu)} y_{s'+h}\cos(\psi_h+\gamma_{jh}+\nu\zeta_h) \qquad (j=1, 2, \ldots, n;$$

$$\nu=0, 1, 2, \ldots, m_j) \qquad (1.2)$$

Здесь $V_\sigma^\nu=V_\sigma\varkappa_\sigma$ и V_σ — модальный столбец, соответствующий σ-му действительному корню характеристического определителя, $N_h^{(\nu)}=N_h\rho_h^\nu$, N_h и γ_h, ρ_h и ζ_h — соответственно модуль и аргумент модального столбца комплексного корня $\varepsilon_h+i\omega_h$ с номером h характеристического уравнения $\Delta(D)=0$, s' — количество действительных корней, s'' — количество комплексных корней, y и ψ — новые переменные, m_j — наибольший порядок производной по времени j-й компоненты вектора x.

Если среди корней характеристического уравнения $\Delta(D)=0$ нет кратных, как это чаще всего бывает в приложениях, то величины $N_{j\sigma}$, N_{jh}, γ_{jh} и модальные строки W_σ и W_h можно определить следующим образом.

В случае простых корней хотя бы один из элементов присоединенной матрицы P при подстановке в нее $D=\varkappa_\sigma$ значения действительного корня отличен от нуля. Столбец, содержащий этот элемент, может быть выбран в качестве модального, а модальные строки выбираются из условия $P(\varkappa_\sigma)=V_\sigma W_\sigma$ $(\sigma=1, 2, \ldots, s')$.

Аналогично для комплексных корней уравнения $\Delta(D)=0$.

Дифференциальные уравнения в стандартной форме в новых переменных примут вид

$$\frac{dy_\sigma}{dt}=\varkappa_\sigma y_\sigma+\left(\frac{d}{d\varkappa}\Delta(\varkappa)\,|_{\varkappa_\sigma}\right)^{-1}\sum_{h=1}^{n} W_{h\sigma}FP_h(x, t, \varepsilon)$$

$$\frac{dy_{s'+h}}{dt}=\varepsilon_h y_{s'+h}+2\operatorname{Re}\left[\frac{e^{-i\psi_h}}{\Delta'(\varepsilon_h+i\omega_h)}\sum_{k=1}^{n} W_{k,s'+h}FP_k(x, t, \varepsilon)\right]$$

$$\frac{d\psi_h}{dt}=\omega_h+\frac{2}{y_{s'+h}}\operatorname{Im}\left[\frac{e^{-i\psi_h}}{\Delta'(\varepsilon_h+i\omega_h)}\sum_{k=1}^{n} W_{k,s'+h}FP_k(x, t, \varepsilon)\right]$$

$$(\sigma=1, \ldots, s';\ h=1, \ldots, s'';\ s'+s''=n),\quad \Delta'=d\Delta/dD$$

Здесь $FP_k(x, t, \varepsilon)$ — вектор-функция, полученная из (1.1) разложением в ряд по ε в окрестности частного решения без учета линейной части по ε.

Весь процесс получения замены (1.2) и формирования новой системы уравнений полностью реализован в виде комплекса процедур на РЕДЬЮСе.

Пользователю нужно ввести левые части уравнений (1.1), частное решение, около которого надо производить разложение, и сведения о характеристических корнях. Необходимо указать, сколько из этих корней являются действительными, а сколько — комплексными, или же, если известны их непосредственные значения, просто задать их в программе.

В ходе исследования программой линейной части дифференциальных уравнений, полученных из (1.1), на печать выводится характеристический многочлен системы. В случае нулевых корней выводится диагностическое сообщение о кратности нулевого корня. Несмотря на то что собственные значения системы не определяются, предварительной информации (заданной пользователем) о распределении собственных чисел достаточно для определения замены переменных, приводящей систему к «стандартному» виду. Вообще говоря, разделение собственных значений на действительные и комплексные не является обязательным. Однако это сильно упрощает дальнейшее исследование, тем более, что в реальных условиях исследователь имеет такую информацию, исходя из физических соображений, либо в результате исследования характеристического многочлена.

После этого машиной вводится замена переменных от $(x_1, \ldots, x_n)$ к $(y_1, y_2, \ldots, y_{n-k}, \psi_1, \ldots, \psi_n)$, вычисляются выражения для уравнений (1.1), записанных в новых переменных, и система (1.1) приводится к стандартному виду

$$y^{\cdot}=\varepsilon Y(y, \psi, \varepsilon), \quad \psi^{\cdot}=\omega+\varepsilon G(y, \psi, \varepsilon) \tag{1.3}$$

Здесь $y=(y_1, y_2, \ldots, y_{n-k})$ — медленные переменные, а $\psi=(\psi_1, \ldots, \psi_k)$ — быстрые.

Результатом действия этой части программы является массив, в соответствующих элементах которого содержатся выражения для правых частей (1.3).

Следующая задача — непосредственное применение метода осреднения к системе уравнений вида (1.3). Считается, что на первом этапе получена система уравнений в стандартной форме с одной быстрой переменной, т. е. ψ, ω и G в (1.3) — скаляры, причем ω=const. В качестве переменной ψ может фигурировать обычное время t, в этом случае $\omega=1$, $G=0$.

Для алгоритмизации получения осредненных уравнений с любой заданной степенью точности используется методика, основанная на применении аппарата групп Ли [7].

Согласно этой методике, системе (1.3) ставится в соответствие дифференциальный оператор

$$A(y, \psi)=\varepsilon Y(y, \psi, \varepsilon)\partial/\partial y+(\omega+\varepsilon G(y, \psi, \varepsilon))\partial/\partial\psi \tag{1.4}$$

Задача метода осреднения состоит в нахождении такой замены переменных

$$(y, \psi)\to(u, v) \tag{1.5}$$

которая преобразует дифференциальный оператор (1.4) к более простому виду. Будем считать, что искомые преобразования образуют группу Ли с инфинитезимальным оператором

$$U(y, \psi)=M(y, \psi)\partial/\partial y+N(y, \psi)\partial/\partial\psi \tag{1.6}$$

Тогда из теории групп Ли следует, что новый дифференциальный оператор $A^{\vee}(u, v)=A(y(u, v), \psi(u, v))$ можно вычислить согласно формуле Хаусдорфа (τ — параметр группы):

$$A^{\vee}(u,v)=A(u,v)+\tau[A,U]+\frac{\tau^2}{2!}[[A,U],U]+\ldots \tag{1.7}$$

Неизвестные операторы $A^{\vee}$ и U ищутся в виде ряда по степеням малого параметра

$$A^{\vee}=A_0^{\vee}+\varepsilon A_1^{\vee}+\varepsilon^2 A_2^{\vee}+\ldots \tag{1.8}$$

$$U=U_0+\varepsilon U_1+\varepsilon^2 U_2+\ldots \tag{1.9}$$

Тогда, полагая в (1.7) $\tau=\varepsilon$ и подставляя разложения (1.9) и (1.8), после разделения порядков получаем бесконечную систему уравнений

$$A_0^{\vee}=A_0$$

$$A_1^{\vee}=A_1+[A_0, U_0]$$

$$A_2^{\vee}=A_2+[A_0, U_1]+[A_1, U_0]+1/2![[A_0, U_0], U_0] \tag{1.10}$$

Соотношения (1.10) задают связь между дифференциальным оператором исходной задачи (1.3) и оператором преобразованной задачи при помощи замены (1.5). При этом неизвестный оператор U определяется из условия исключения из преобразованного оператора $A^{\vee}$ быстрой переменной v путем осреднения. Этот процесс последовательно проводится для уравнений системы (1.10), причем на каждом приближении для элементов $M_i(u, v)$ и $N_i(u, v)$ оператора U_i получаются уравнения, которые позволяют получить эти функции в квадратурах.

Таким образом, описанная методика представляет собой замкнутый алгоритм, однозначно позволяющий определять на каждом шаге $A_i^{\vee}$, $U_{i-1}(u;\ v)$. В результате формируется более простая, осредненная система уравнений, которой соответствует дифференциальный оператор $A^{\vee}(u)$. После исследования этой системы осуществляется переход к старым координатам $(y,\ \psi)$.

Этот алгоритм реализуется на ЭВМ комплексом процедур, написанных на САВ РЕДЬЮС. Исходными данными этой части программы являются уравнения системы (1.3), либо известные пользователю заранее, либо полученные им на предыдущем этапе программы. Правые части этих уравнений должны быть присвоены соответствующим элементам массива, так формируется оператор $A(y,\ \psi)$. Одновременно вводится массив, формирующий оператор U.

2. Реализованная на ЭВМ процедура метода осреднения в качестве примера используется для исследования динамики свободного астатического гироскопа в кардановом подвесе на неподвижном основании. Если на астатический гироскоп не действуют силы трения, его движение подчиняется системе дифференциальных уравнений [2]:

$$[A_2+(A+A_1)\cos^2\beta+C_1\sin^2\beta]\,\alpha^{\cdot\cdot}+H\beta^{\cdot}\cos\beta-$$

$$-2(A+A_1-C_1)\,\alpha^{\cdot}\beta^{\cdot}\sin\beta\cdot\cos\beta=0$$

$$(A+B_1)\,\beta^{\cdot\cdot}-H\alpha^{\cdot}\cos\beta+(A+A_1-C_1)\,\alpha^{\cdot 2}\sin\beta\cos\beta=0 \qquad (2.1)$$

Здесь α — угол поворота внешнего кольца подвеса относительно основания, β — угол поворота внутреннего кольца относительно внешнего, A_2 — момент инерции внешнего кольца, A_1, B_1, C_1 — моменты инерции внутреннего кольца, A — момент инерции ротора гироскопа, а H=const — кинетический момент. Задача состоит в исследовании поведения системы вблизи частного решения $\alpha=\alpha_0$, $\beta=\beta_0$, которое с очевидностью удовлетворяет системе (2.1). За начальные условия принимаются следующие:

$$\alpha(0)=\alpha_0,\quad \beta(0)=\beta_0,\quad \alpha^{\cdot}(0)=\alpha_0^{\cdot},\quad \beta^{\cdot}(0)=0 \qquad (2.2)$$

Общее решение ищется в виде малого отклонения от частного решения: $\alpha=\alpha_0+x$, $\beta=\beta_0+z$.

Характеристическое уравнение линейной части (2.1) имеет два нулевых и два чисто мнимых корня, и в линейном приближении движение гироскопа представляет собой малые нутационные колебания внешнего и внутреннего колец карданового подвеса с частотой [2]:

$$\nu=H\cos\beta_0/\sqrt{A_0B_0}.$$

$$A_0=A_2+(A+A_1)\cos^2\beta_0+C_1\sin^2\beta_0,\quad B_0=A+B_1$$

Это позволяет выбрать в качестве малого параметра величину $\mu=\alpha_0^{\cdot}/\nu$ и выразить через него переменные x и z, которые считаются малыми (ξ и η — новые переменные): $x=\mu\xi$, $z=\mu\eta$.

Эта информация вводится в машину в качестве исходной для выполнения первого этапа программы. ЭВМ производит разложение исходных уравнений в ряд по степеням малого параметра около положения равновесия $\alpha=\alpha_0$, $\beta=\beta_0$ с точностью до заданной степени μ (в данном случае равной четырем). Затем, соответствующей вычислительной процедурой вводятся новые переменные a_0; b_0 a и ψ согласно формулам

$$\xi=a_0+a\cos\psi,\quad \eta=b_0+a(A_0/B_0)^{1/2}\sin\psi \qquad (2.3)$$

В новых переменных формируется система четырех уравнений в стандартной форме, к которой можно непосредственно применять метод осреднения. Начальные условия (2.2) на переменные α, β, $\alpha^{\cdot}$, $\beta^{\cdot}$ преобразуются:

$$a_0(0)=0,\qquad b_0(0)=\frac{\alpha_0^{\cdot}}{\nu\mu}\sqrt{\frac{A_0}{B}},\qquad a(0)=-\frac{\alpha_0^{\cdot}}{\nu\mu},\qquad \psi(0)=\frac{\pi}{2} \qquad (2.4)$$

Система уравнений относительно a_0, b_0, a и ψ обрабатывается второй частью программы. В результате определяются три приближения метода осреднения. В итоге получается система осредненных дифференциальных уравнений

$$a^{\cdot\vee}=0$$

$$a_0^{\cdot\vee}=-\mu\frac{Ha^{\vee}\sin\beta_0}{2A_0B_0}(A_2+C_1)+\mu^2\frac{Ha^{\vee 2}b_0^{\vee}}{2B_0A_0^2\cos\beta_0}(A_2+C_1)^2\sin^2\beta_0-$$
$$-A_0(A_2+C_1)(1+2\sin^2\beta_0)+\mu^3\Phi_3(a^{\vee}, b_0^{\vee}, H, \beta_0)$$

$$b_0^{\cdot\vee}=0$$

$$\psi^{\cdot\vee}=\nu-\mu b_0^{\vee}\operatorname{tg}\beta_0\frac{A_2+C_1}{A_0}+\mu^2\frac{\nu}{4B_0A_0^2\cos^2\beta_0}\{a^{\vee 2}[A_0^3(2-5\sin^2\beta_0+$$
$$+A_0^2(A_2+C_1)(7\sin^2\beta_0-3)-3A_0(A_2+C_1)^2\sin^2\beta_0]+$$
$$+b_0^{\vee 2}[A_0B_0(A_2+C_1)(8\sin^2\beta_0-2)-4B_0A_0^2\sin^2\beta_0-2B_0(A_2+C_1)^2\sin^2\beta_0]\}+$$
$$+\mu^3\Psi_3(a^{\vee}, b_0^{\vee}H, \beta_0) \qquad (2.5)$$

Выражения для Φ_3 и Ψ_3 не приводятся здесь из-за громоздкости.

Из первого и третьего уравнений системы (2.5) следует, что $a^{\vee}$ и $b_0^{\vee}$ — величины постоянные. Их значения, которые необходимо в качестве констант подставить в уравнения для $\psi^{\cdot\vee}$ и $a_0^{\cdot\vee}$, находятся из начальных условий (2.4). Из последнего уравнения (2.5) определяется поправка к частоте нутационных колебаний гироскопа ν. И, наконец, постоянная скорость $a_0^{\cdot\vee}$, вытекающая из второго уравнения, соответствует постоянной угловой скорости ухода гироскопа относительно оси внешнего кольца. После подстановки соответствующих значений $a^{\vee}$ и $b_0^{\vee}$ и последующего перехода к исходным переменым α и β из второго уравнения системы (2.5) получается средняя угловая скорость вращения внешнего кольца относительно основания с точностью до четвертой степени $\alpha_0^{\cdot}$

$$\langle\alpha^{\cdot}\rangle=-\frac{\alpha_0^{\cdot 2}\sin\beta_0}{2H\cos^2\beta_0}(A_2+C_1)+\frac{\alpha_0^{\cdot 3}}{2H^2\cos^4\beta_0}\Big[2(A_2+C_1)^2\sin^2\beta_0-$$
$$-A_0(A_2+C_1)(1+3\sin^2\beta_0)\Big]+\frac{\alpha_0^{\cdot 4}}{48H^3\cos^6\beta_0}[(A_2+C_1)^3 87\sin^2\beta_0+$$
$$+(63-230\sin^2\beta_0)A_0(C_1+A_2)^2+(197\sin^2\beta_0-156)A_0^2(A_2+C_1)-$$
$$-84\sin^2\beta_0A_0^3] \qquad (2.6)$$

Первое слагаемое в этой формуле совпадает с известным выражением Магнуса скорости ухода гироскопа в кардановом подвесе [2], а оставшаяся часть (2.6) определяет поправку более высокого порядка малости к этому значению.

Для проверки полученного выражения для $\langle\alpha^{\cdot}\rangle$ проведем сравнение его с точным решением [3] системы (2.1) при следующем ограничении на распределение масс:

$$A+A_1-C_1=0 \qquad (2.7)$$

откуда вытекает, что

$A_0=A_2+C_1$. В этом случае первые интегралы уравнений движения гироскопа позволяют найти точное решение [3] этих уравнений, которое выражается через эллиптические интегралы. Для средней скорости ухода внешнего кольца карданова подвеса справедливо выражение

$$\langle\alpha^{\cdot}\rangle=\frac{\nu_e m}{2(u_1+u_2)}\Big[4\sqrt{(1-u_1^2)(1-u_2^2)}\frac{\Pi(h^2,k)}{K(k)}-$$
$$-(\sqrt{1-u_1^2}+\sqrt{(1-u_2^2)})^2\Big], \qquad \nu_e=H/\sqrt{A_0B_0}$$
$$m=\sqrt{B_0/A_0}, \qquad u_2=\sin\beta_0, \qquad u_2=u_1+2\alpha_0^{\cdot}/(m\nu_e) \qquad (2.8)$$

Здесь $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, $\Pi(h^2, k)$ —

полный эллиптический интеграл третьего рода, h и k зависят от u_1 и u_2 [3, с. 146].

Для сравнения с результатами метода осреднения точное решение раскладывается в ряд по малому параметру $\alpha_0^{\bullet}/\nu_e$, в котором удерживаются члены до $\alpha_0^{\bullet 4}$ включительно. После проведения необходимых преобразований выражение (2.8) приводится к виду

$$\langle\alpha^{\bullet}\rangle = -\frac{\alpha_0^{\bullet 2}\sin\beta_0}{2H\cos^2\beta_0}A_0 - \frac{\alpha_0^{\bullet 3}A_0^2}{2H^2\cos^4\beta_0}(1+\sin^2\beta_0) - \\ - \frac{\alpha_0^{\bullet 4}A_0^3}{16H^3\cos^6\beta_0}\sin\beta_0(31+10\sin^2\beta_0) \tag{2.9}$$

(все расчеты здесь также проводились вычислительной машиной). Эта формула полностью совпадает с выражением (2.6) ухода гироскопа в кардановом подвесе, полученного на ЭВМ методом осреднения при (2.7).

Результаты проведенного исследования показывают, что системы символьных вычислений на ЭВМ предоставляют возможность эффективного использования аналитических методов нелинейной механики. Широкое применение этих систем позволит добиться важных результатов в решении сложных практических задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аналитические вычисления на ЭВМ и их применение в теоретической физике.— Тр. междунар. совещ. по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1985. 420 с.
2. *Климов Д. М., Харламов С. А.* Динамика гироскопа в кардановом подвесе. М.: Наука, 1978. 208 с.
3. *Климов Д. М., Степаненко Н. П.* Об интегрировании уравнений движения гироскопа в кардановом подвесе.— Изв. АН СССР. МТТ, 1967, № 6, с. 143—150.
4. *Брюно А. Д.* О движении гироскопа в кардановом подвесе.— Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 6, с. 3—5.
5. *Валеев К. Г.* О прецессии симметричного гироскопа в кардановом подвесе.— В кн.: Механика твердого тела: Республ. межвед. сб., Киев: Наук. думка, 1974, вып. 7, с. 28—36.
6. *Булгаков Б. В.* Колебания. М.: Гостехиздат, 1954. 892 с.
7. *Журавлев В. Ф.* Метод рядов Ли в проблеме разделения движений в нелинейной механике.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 4, с. 559—565.

Москва

Поступила в редакцию 20.II.1986