

КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ НА ДЕФОРМИРУЕМОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ДЕЙСТВИИ ДВИЖУЩЕЙСЯ ИНЕРЦИОННОЙ НАГРУЗКИ

КАПЛУНОВ Ю. Д.

При решении ряда динамических задач о воздействии подвижной нагрузки на бесконечно протяженные деформируемые системы рассматривается установившийся режим в системе координат, связанной с нагрузкой. Получаемые при этом стационарные решения не зависят от инерции нагрузки (см., например, [1]). Однако инерционные свойства оказывают влияние на характер переходного процесса и в некоторых случаях установившийся режим может не наступать.

В публикуемой работе вопрос о влиянии инерционных свойств подвижной нагрузки на характер переходного процесса изучается применительно к крутильным колебаниям стержня, контактирующего с вязкоупругим основанием. Такая задача возникает при динамических расчетах туннелей, а также при проектировании испытательных стендов для высокоскоростных объектов. В [2] было показано, что при действии на рассматриваемую систему безынерционной нагрузки установившийся режим существует.

Рассмотрим крутильные колебания бесконечно стержня, контактирующего с вязкоупругой средой, при действии движущегося с постоянной скоростью v груза. Будем считать, что взаимодействие стержня и груза сводится к моменту $M(t)$, вектор которого направлен вдоль оси стержня, угол поворота груза совпадает с углом поворота сечения стержня под грузом. Пусть на груз действует постоянный активный момент M_0 , возникающий, например, из-за эксцентриситета приложенных к грузу усилий. Предположим, что нагрузка прилагается мгновенно, т. е. воздействие на стержень до начала движения отсутствует.

Запишем уравнение вращения груза вокруг центральной оси, параллельной продольной оси стержня

$$J d^2 \theta_1 / dt^2 = M_0 - M(t) \quad (1)$$

где $\theta_1(t)$ — угол поворота груза относительно продольной оси стержня, J — момент инерции груза.

Уравнение крутильных колебаний стержня, опирающегося на вязкоупругое основание, при действии равномерно движущейся нагрузки имеет вид

$$J_m \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - GJ_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + k\theta + \gamma \frac{\partial \theta}{\partial t} = M(t) \delta(x-vt) \quad (2)$$

где $\theta(x, t)$ — угол поворота сечения стержня, J_m — погонный момент инерции, GJ_p — крутильная жесткость, k и γ — упругий и вязкий параметры основания.

Будем использовать безразмерные переменные $\tau = t(k/J_m)^{1/2}$, $\xi = x(k/(GJ_p))^{1/2}$. При этом уравнения (1) и (2) примут вид

$$(Jk/J_m) d^2 \theta_1 / d\tau^2 = M_0 - M(\tau) \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \theta + \gamma_1 \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{1}{\gamma k G J_p} M(\tau) \delta(\xi - v_1 \tau) \quad (4)$$

$$\gamma_1 = 1/2 \gamma / \sqrt{k J_m}, \quad v_1 = v \sqrt{J_m / (G J_p)} \quad (\gamma_1, v_1 < 1)$$

Будем рассматривать движение со скоростью, меньшей, чем скорость распространения волны сдвига в материале стержня ($v_1 < 1$). При $v_1 > 1$ угол поворота сечения стержня в точке приложения нагрузки равен нулю, поэтому $M(\tau) = M_0$. Движение со скоростью $v_1 = 1$ не рассматривается в рамках линейной теории, так как в этом случае имеет место разрыв углов поворота θ в точке приложения нагрузки [2].

Определим неизвестный крутящий момент $M(\tau)$. Исходя из (3) запишем

$$\theta_1 = \frac{J_m}{Jk} \int_0^\tau [M_0 - M(\tau_1)] (\tau - \tau_1) d\tau_1 \quad (5)$$

Далее, следуя [3], определим из уравнения (4) угол поворота сечения стержня в точке приложения нагрузки $\theta(v_1\tau, \tau)$. На основе принципа суперпозиции

$$\theta(v_1\tau, \tau) = \frac{1}{\sqrt{kGJ_p}} \int_0^\tau \theta_0[v_1(\tau - \tau_1), \tau - \tau_1] M(\tau_1) d\tau_1 \quad (6)$$

где $\theta_0(\xi, \tau)$ — решение (4) с правой частью $\delta(\xi)\delta(\tau)$ (мгновенный сосредоточенный импульс).

Функция $\theta_0(\xi, \tau)$ может быть представлена в виде [4]:

$$\theta_0(\xi, \tau) = 1/2 e^{-\gamma_1\tau} J_0[\sqrt{1 - \gamma_1^2} \sqrt{\tau^2 - \xi^2}] \sigma \quad (7)$$

$$\sigma = 1 \quad (0 < |\xi| < \tau), \quad \sigma = 0 \quad (0 < \tau < |\xi|)$$

Подставляя (7) в (6) и учитывая, что $\theta_1(\tau) = \theta(v_1\tau, \tau)$, получаем интегральное уравнение относительно крутящего момента $M(\tau)$ (J_1 — безразмерный момент инерции груза):

$$\int_0^\tau \exp[-\gamma_1(\tau - \tau_1)] J_0[\beta(\tau - \tau_1)] M(\tau_1) d\tau_1 = \frac{1}{J_1} \int_0^\tau [M_0 - M(\tau_1)] (\tau - \tau_1) d\tau_1 \quad (8)$$

$$J_1 = 1/2 J / J_m \sqrt{k / (GJ_p)}, \quad \beta = \sqrt{(1 - \gamma_1^2)(1 - v_1^2)}$$

Интегральное уравнение Вольтерра первого рода, аналогичное (8), было получено для изгибных колебаний балки в [3, 5]. Применим к (8) преобразование Лапласа. Тогда изображение функции $M(\tau)$ запишется в виде

$$M(p) = M_0 \frac{\sqrt{(p + \gamma_1)^2 + \beta^2}}{p(J_1 p^2 + \sqrt{(p + \gamma_1)^2 + \beta^2})} \quad (9)$$

Оригинал определим с помощью формулы Меллина (α — положительное число):

$$M(\tau) = \frac{M_0}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{\exp(p\tau) \sqrt{(p + \gamma_1)^2 + \beta^2}}{p(J_1 p^2 + \sqrt{(p + \gamma_1)^2 + \beta^2})} dp \quad (10)$$

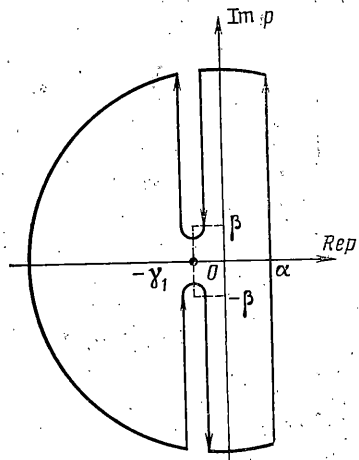
Сделаем разрезы в комплексной плоскости, идущие от точек ветвления $p = -\gamma_1 \pm i\beta$ параллельно мнимой оси к бесконечности (фиг. 1). Переходя в (10) к интегрированию в левой полуплоскости, представим крутящий момент в виде суммы $M(\tau) = M_0(S_0 + S_1)$, где S_0 — сумма вычетов подынтегральной функции в (10), S_1 — вклад от интегрирования по берегам разрезов.

Второе слагаемое S_1 после некоторых преобразований можно свести к интегралу по действительной оси

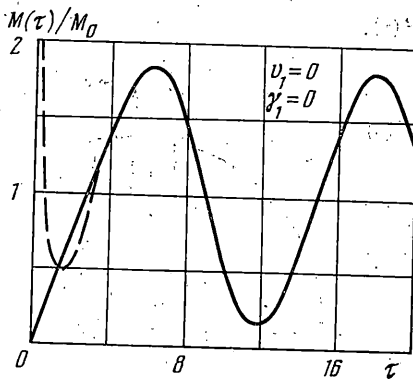
$$S_1 = \frac{-2J_1 \exp(-\gamma_1\tau)}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{\beta}^{\infty} \frac{\exp(iy\tau) (y + i\gamma_1) \sqrt{y^2 - \beta^2}}{J_1^2 (y + i\gamma_1)^4 + y^2 - \beta^2} dy \right\} \quad (11)$$

который эффективно определяется численно с помощью формулы Файлона. Характер его убывания при $\tau \rightarrow \infty$ виден из асимптотической формулы [6]:

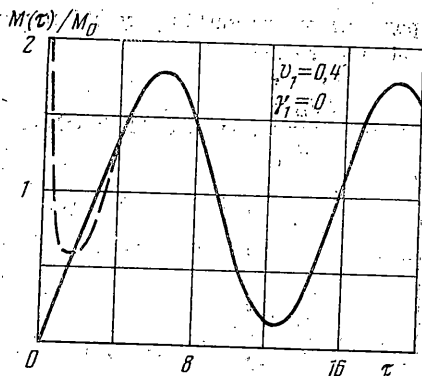
$$S_1 = e^{-\gamma_1\tau} \left\{ \sqrt{\frac{2\beta}{\pi}} \frac{\tau^{-3/2}}{J_1(\gamma_1^2 + \beta^2)^3} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \tau\beta\right) (\beta^3 - 3\gamma_1^2\beta) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \tau\beta\right) (\gamma_1^3 - 3\beta^2\gamma_1) \right] + O(\tau^{-5/2}) \right\} \quad (12)$$



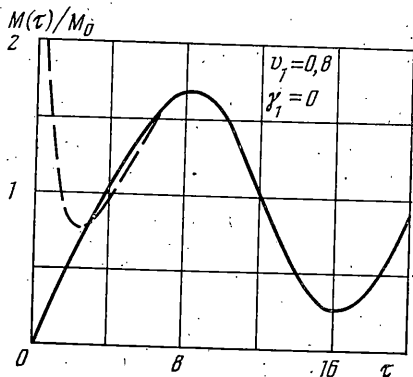
Фиг. 1



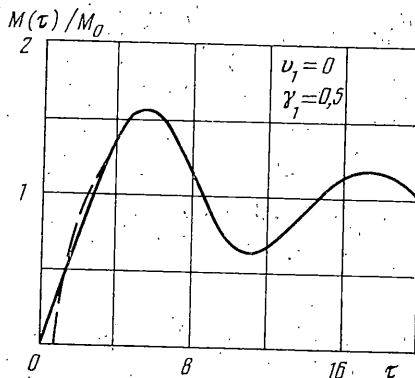
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Установим расположение в комплексной плоскости полюсов подынтегральной функции в (10). При всех значениях параметров J_1 , β , γ_1 подынтегральная функция имеет полюс $p=0$, вычет в котором дает стационарное значение $M(\tau)=M_0$.

В случае отсутствия демпфирования ($\gamma_1=0$) помимо $p=0$ имеются два полюса на мнимой оси:

$$p_{1,2} = \pm ir, \quad r = \{1/2[(1+4J_1^2\beta^2)^{1/2}-1]/J_1^2\}^{1/2} \quad (13)$$

При этом $S_0 = [1 - (1+4J_1^2\beta^2)^{-1/2}] \cos r\tau / (1+4J_1^2\beta^2)^{1/2} + 1$. При $\tau \rightarrow \infty$ крутящий момент $M(\tau)$ представляется слагаемым, содержащим S_0 . Происходят незатухающие колебания относительно постоянного значения M_0 , т. е. в идеально упругой системе при учете инерционных свойств нагрузки стационарный режим не устанавливается. Нагрузка в этом случае является своеобразным концентратором энергии, которая, как может показаться, должна распределиться по бесконечному стержню.

Исследуем теперь влияние демпфирования. Будем считать $\gamma_1 < 1$. В этом случае полюса $p_{1,2}$ смещаются с мнимой оси в левую полуплоскость и равны

$$p_{1,2} = \varepsilon \pm ir + O(\gamma_1^2), \quad \varepsilon = -\gamma_1 / (1+2r^2J_1^2) \quad (14)$$

С учетом этих соотношений (k можно положить равным нулю либо единице):

$$S_0 = 2e^{\varepsilon\tau} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\exp[(-1)^k i r \tau] p_{k+1}^3}{(p_{k+1} + \gamma_1) J_1^{-2} - 2p_{k+1}^3} \right\} + 1 \quad (15)$$

Формула (15) показывает, что при учете демпфирования S_0 экспоненциально убывает при $\tau \rightarrow \infty$ и стационарный режим устанавливается. Однако при больших значениях параметра J_1 имеем $\varepsilon \sim -\gamma_1 / (2J_1\beta)$ и переходный процесс затухает крайне медленно.

Отметим также, что показатель экспоненты в S_0 по модулю меньше, чем в S_1 ($|\varepsilon| < \gamma_1$), и при значительной инерционности нагрузки, начиная с некоторых значений τ , в формуле для $M(\tau)$ можно пренебрегать S_1 по сравнению с S_0 .

Некоторые результаты числовых расчетов представлены на фиг. 2-5. Приведены значения крутящего момента $M(\tau)$, отнесенные к M_0 ($J_1=3$). Фиг. 2-4 соответствуют отсутствию демпфирования ($\gamma_1=0$): $v_1=0; 0,4; 0,8$. Сплошной линией показаны результаты, полученные с использованием численного интегрирования в (11), штрихами — с привлечением асимптотической формулы (12). Как видно, изменение параметра v_1 оказывает незначительное влияние на амплитуду колебаний функции

$M(\tau)$ относительно M_0 . Фиг. 5 относится к случаю $\nu_1=0$, $\gamma_1=0.5$. Даже при большом демпфировании переходный процесс долгое время не затухает.

Полученные результаты показывают, что инерционные свойства подвижной нагрузки оказывают существенное влияние на колебательный процесс. Так, в идеально упругой конструкции стационарный режим не устанавливается, а при наличии в системе диссипации может устанавливаться крайне медленно из-за большой инерции подвижной нагрузки.

Автор выражает признательность Г. Б. Муравскому за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 384 с.
2. Римский Р. А. Динамика балки на упругом основании при подвижной нагрузке в виде сосредоточенного крутящего момента. — В кн.: Исследования по теории сооружений. М.: Стройиздат, 1977, вып. 22, с. 62—71.
3. Муравский Г. Б. Неустановившиеся колебания балки, лежащей на упругом основании при действии подвижной нагрузки. — Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1962, № 1, с. 91—97.
4. Корнев Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука, 1971. 287 с.
5. Муравский Г. Б. Колебания груза, движущегося по бесконечной балке, опирающейся на деформируемое основание. — В кн.: Инженерные проблемы строительной механики. М.: Изд-е Моск. инж.-строит. ин-та, 1980, с. 48—61.
6. Эрдейи А. Асимптотические разложения. М.: Физматгиз, 1959. 127 с.

Москва

Поступила в редакцию
11.III.1985

УДК 539.383

РАЗРУШЕНИЕ ЛЬДА ПРИ КОНТАКТНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ

ЭПИФАНОВ В. И.

Распределение напряжений по поверхности давления и в объеме при вдавливания сферы в плоскую поверхность вычислены только для упругих деформаций [1—3]. Динамическое взаимодействие сферы с упругопластическим основанием подробно не рассматривалось, хотя ведутся поиски подходящей модели с адекватными реальному объекту свойствами. Например, при построении теории образования скважины при высокоскоростном ударе использовалась гидродинамическая модель [4]. Применительно ко льду при меньших скоростях удара измерена результирующая сила P , с которой лед препятствует внедрению в него жесткого индентора, причем эта сила определена для любого времени t соударения [5]. Остался неопределенным вид функций, характеризующих распределение максимальных напряжений и деформаций на поверхности контакта и в объеме.

В публикуемой работе приводятся результаты исследований динамического взаимодействия жесткого индентора с ледяной пластиной. Объектом исследования при ударных взаимодействиях выбрана функция $P(X)$, где X — глубина внедрения индентора. Применен метод свободно падающего жесткого индентора, снабженного пьезоэлектрическим акселерометром [6], и метод регистрации сигналов акустической эмиссии. В режиме квазистатического вдавливания шара в лед рассматриваются зависимости усредненных по поверхности S напряжений $\sigma=P/S$ от глубины внедрения X , скорости внедрения X' и температуры t .

1. В [7, 8] утверждается, что все осциллограммы удара шара о лед имеют колоколообразную форму. Заключение основывалось на использовании в качестве чувствительного элемента тензометра, непригодного [9] для регистрации быстро протекающих процессов. Но и в тех случаях, когда в качестве чувствительного элемента применялся пьезоэлемент [10], форма осциллограммы в основном отражала переходные процессы в электрических цепях. После того как удалось устранить эти искажения, были получены осциллограммы, которые характеризуют процесс удара во всех его деталях.

На фиг. 1 показаны осциллограммы $U(\tau)$ удара шара массой 1,76 кг о ледяную пластину массой 1600 кг, примороженную к жесткому основанию. Высота падения шара изменялась от 0,012 (1) до 1 м (8). Масштаб по оси абсцисс $0,2 \cdot 10^{-3}$ с/деление, масштабы по оси ординат для (1—3) — 10, (4—6) — 20 и для (7, 8) — 50 мВ/деление. Температура льда -10°C . С увеличением высоты падения H возрастает амплитуда и меняется форма импульса. Вначале (1—3) ударный импульс имеет вид асимметричной полуволны. С увеличением H полуволна трансформируется в трапециевидную кривую с высокочастотными колебаниями на переднем фронте и площадкой в средней части. При напряжениях выше допустимых происходит локальное разрушение и смятие льда. Эти процессы сопровождаются сбросом давления на поверхности контакта, что на осциллограмме проявляется в виде «зазубрин». Многочисленные локальные разрушения воспринимаются как модулирующие возмущения. Задний фронт кривой и самое начало переднего фронта свободны от «модулирующих» возмущений.

Большая масса и жесткое крепление соответствуют условиям, при которых ледяная пластина может рассматриваться как полупространство. Толщина пластины