МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1986

УДК 624.042.8

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВИБРАЦИЙ В КОРОТКОМ УПРУГОМ СТЕРЖНЕ ПРИ НАЛИЧИИ СУХОГО ТРЕНИЯ

КОЙБИН А. В.

Задача о вынужденных продольных колебаниях в упругом стержне при наличии сухого трения, изменяющегося по закону Кулона [1], решается с использованием приближенных методов разложения по малому параметру и гармонической линеаризации.

1. Рассмотрим стержень, прижатый к абсолютно жесткому основанию постоянным давлением и нагруженный на одном конце воздействием, изменяющимся по гармоническому закону с частотой ω.

Уравнение динамики такого стержня имеет вид

$$\rho Q u^{\cdot\cdot} - EQu'' = -q \operatorname{sign} u^{\cdot} \qquad (1.1)$$

Здесь $u(x, t)$ — смещение сечений стержня в направлении оси x, ρ — плотность материала, E — модуль упругости, t — время, Q — площадь поперечного сечения, q — сила трения, приходящаяся на единицу длины стержня. Штрихом и точкой обозначены частные производные соответственно по координате x и времени t.

Рассматривая стационарные колебания, решение уравнения (1.1) будем искать в виде

$$u(x, t) = a(x)\cos[\omega t + \varphi(x)] \qquad (1.2)$$

Предварительно, следуя методу гармонической линеаризации, нелинейную функцию в (1.1) заменим линейной

$$F(u^{\cdot}) = \operatorname{sign} u^{\cdot} = r/\omega, \quad r = 4/(\pi a) \qquad (1.3)$$

Коэффициент гармонической линеаризации вычислен по формуле [2]:

$$r = \frac{1}{\pi a}\int_0^{2\pi} F(-a\omega \sin\xi)\sin\xi \, d\xi \qquad (1.4)$$

После линеаризации уравнение (1.1) примет вид

$$u^{\cdot\cdot} - c^2 u'' = -4qu^{\cdot}/(\rho Q \pi\omega a), \quad c^2 = E/\rho \qquad (1.5)$$

Перейдем к комплексной форме записи, что возможно после линеаризации задачи: физический смысл имеет вещественная часть решения. Положим A_1 — комплексная амплитуда перемещений:

$$u(x, t) = A_1 \exp(i\omega t), \quad |A_1| = a \qquad (1.6)$$

Для общности и удобства вычислений перейдем к безразмерным величинам. Обозначим $\alpha x = y$, $A_1 = Kz$, $K = 4q/(\rho Q \pi \omega^2)$; $\alpha = \omega/c$. Тогда, после подстановки искомого решения (1.6) в линеаризованное уравнение (1.5) с учетом принятых обозначений, после разделения переменных получим нелинейное уравнение для безразмерной комплексной амплитуды перемещений

$$z'' + z = iz/|z| \qquad (1.7)$$

Штрихом в уравнении обозначены производные по координате y. Решение уравнения (1.7) построим методом вариации произвольных постоянных. За порождающее решение примем решение уравнения (1.7) без правой части

$$z=A\exp(i\xi_1)+B\exp(-i\xi_2)$$

$$\xi_1=y+\varphi_1,\quad \xi_2=y+\varphi_2 \tag{1.8}$$

где A, B, φ_1 и φ_2 — постоянные интегрирования. Полагая постоянные функциями координаты и накладывая дополнительные условия на производные (1.9):

$$A'\exp(i\xi_1)+B'\exp(-i\xi_2)+Ai\varphi_1'\exp(i\xi_1)-Bi\varphi_2'\exp(-i\xi_2)=0 \tag{1.9}$$

подставим искомое решение (1.8) в уравнение (1.7) и, разрешая систему совместно с условием (1.9), получим систему нелинейных уравнений для нахождения A, B, φ_1 и φ_2:

$$A'={}^1/_2[A+B\cos(\xi_1+\xi_2)]/R \tag{1.10}$$

$$B'=-{}^1/_2[B+A\cos(\xi_1+\xi_2)]/R$$

$$\varphi_1'=-{}^1/_2B\sin(\xi_1+\xi_2)/AR,\quad \varphi_2'={}^1/_2A\sin(\xi_1+\xi_2)/BR$$

$$R=[A^2+B^2+2AB\cos(\xi_1+\xi_2)]^{1/2} \tag{1.11}$$

Здесь $R=|z|$ — безразмерная амплитуда перемещений. Если воспользоваться обозначением (1.11), то можно уравнения (1.10) представить в виде

$$A'={}^1/_2\partial R/\partial A,\quad B'=-{}^1/_2\partial R/\partial B \tag{1.12}$$

$$\varphi_1'={}^1/_2A^{-2}\partial R/\partial\xi_1,\quad \varphi_2'=-{}^1/_2B^{-2}\partial R/\partial\xi_2$$

Непосредственно решение системы (1.12) в замкнутом виде найти не удается. Для разрешения системы воспользуемся методом усреднения. В [3] показано, что при слабом демпфировании в рассматриваемом случае колебания можно считать медленно меняющимися как по времени, так и по координате. Поэтому целесообразно в системе уравнений (1.12) провести усреднение в правых частях по быстрой переменной $\xi=\xi_1+\xi_2$, при этом предполагается медленное изменение величин A, B, φ_1 и φ_2.

Для проведения усреднения в системе (1.12) возьмем среднеквадратическое значение функции R:

$$\langle R\rangle=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}R^2\,d\xi\right)^{1/2}=\sqrt{A^2+B^2} \tag{1.13}$$

После подстановки значения $\langle R\rangle$ в систему (1.12) усредненную систему запишем в виде

$$A'={}^1/_2A/\sqrt{A^2+B^2},\quad B'=-{}^1/_2B/\sqrt{A^2+B^2}$$

$$\varphi_1'=0,\quad \varphi_2'=0 \tag{1.14}$$

Данная система имеет интегралы $\varphi_1=C_3$, $\varphi_2=C_4$, $AB=C_2$, $(A')^2+(B')^2={}^1/_4$.

Получить в явном виде зависимость A и B от y не удается, но можно проследить характер их изменения по длине стержня.

Запишем выражение для перемещения сечений стержня в исходных переменных в комплексной форме:

$$u(x,\ t)=Kz\exp(i\omega t)=KR\exp[i(\omega t+\varphi)] \tag{1.15}$$

$$K=4q/(\rho Q\pi\omega^2),\quad \operatorname{tg}\varphi=n/m$$

$$z=m+in,\quad R=\sqrt{n^2+m^2},\quad \alpha x=y$$

$$m=A\cos\xi_1+B\cos\xi_2,\quad n=A\sin\xi_1-B\sin\xi_2 \tag{1.16}$$

Для определения постоянных интегрирования зададим граничные условия. Один конец стержня при $x=l$ положим свободным, ненагруженным, а на другом конце стержня при $x=0$ зададим кинематическое возмущение, изменяющееся по гармоническому закону с амплитудой H и частотой ω. Предположим, что вибрации в стержне распространяются на всю длину стержня l. Параметры системы и внешнего воздействия, обеспечивающие выполнение этого условия, найдем после определения постоянных интегрирования. Граничные условия можно записать в комплексной форме

$$\partial u/\partial x=0 \quad (x=l)$$

$$u(0, t)=Kz(0)\exp(i\omega t)=H\exp(i\omega t) \tag{1.17}$$

где l — длина рассматриваемого стержня. Граничным условиям (1.17) соответствует система уравнений для отыскания постоянных интегрирования

$$A_l'\cos\gamma_1-A_l\sin\gamma_1+B_l'\cos\gamma_2-B_l\sin\gamma_2=0 \tag{1.18}$$

$$A_l'\sin\gamma_1+A_l\cos\gamma_1-B_l'\sin\gamma_2-B_l\cos\gamma_2=0$$

$$A_0\cos C_3+B_0\cos C_4=H_1, \quad H_1=H/K$$

$$A_0\sin C_3-B_0\sin C_4=0, \quad l_1=\alpha l \tag{1.19}$$

$$\gamma_1=l_1+C_3, \quad \gamma_2=l_1+C_4$$

Здесь A_l' и B_l' — производные по переменной y, определенные при $x=l$, A_0 и B_0 — значения A и B при $x=0$.

Из (1.18)—(1.19) имеем

$$C_3+C_4=-2l_1, \quad A_l=B_l \tag{1.20}$$

$$\operatorname{tg} C_3=-B_0\sin 2l_1/(A_0+B_0\cos 2l_1)$$

$$A_0^2+B_0^2+2A_0B_0\operatorname{con} 2l_1=H_1^2 \tag{1.21}$$

Зависимость (1.21) определяет равенство амплитуды, перемещений концевого сечения и амплитуды кинематического возмущения, т. е. равенство $R=H_1$, из которого необходимо найти постоянные интегрирования после определения функций A и B.

Как следует из интеграла системы (1.14) и граничных условий, зависимость между A и B определяется равнобочной гиперболой и при приложении возмущения на торце стержня реализуется одна из ветвей гиперболы. При этом отношение

$$\varepsilon=A/B=C_2/B^2 \tag{1.22}$$

будет изменяться от единицы при $x=l$, где $A_l=B_l$, $\xi_1+\xi_2=0$, и резко уменьшаться при изменении величин A и B, т. е. $1\geqslant\varepsilon>0$.

Если первые два уравнения системы (1.14) разложить по параметру ε и учесть слагаемые порядка не выше ε, придем к системе

$$B'=-{}^1/_2, \quad A'={}^1/_2A/B \tag{1.23}$$

Введенный параметр ε делает систему (1.23) близкой к системе (1.10). Действительно, при $\varepsilon=1$ уравнения (1.10) переходят в уравнения (1.23) и наоборот, а при малых ε — будут близкими (вследствие малости ε). Таким образом, параметр ε оказался универсальным и приближает исходную систему к усредненной на всем интервале своего изменения.

Система (1.23) имеет решение

$$B=C_1-{}^1/_2y, \quad A=C_2/(C_1-{}^1/_2y) \tag{1.24}$$

Подставляя полученное решение (1.24) для A и B в уравнения (1.20)—(1.21), при $y=0$ и $y=l_1$ найдем, что

$$C_2=(C_1-{}^1/_2l_1)^2 \tag{1.25}$$

$$\operatorname{tg} C_3=-C_1^2\sin 2l_1/(C_2+C_1^2\cos 2l_1)$$

$$(C_1-{}^1/_2l_1)^4/C_1^2+C_1^2+2(C_1-{}^1/_2l_1)^2\cos 2l_1=H_1^2$$

Это соотношение служит для отыскания постоянной C_1, которое можно заменить приближенным с учетом малости ε на возмущенном конце стержня

$$C_1+C_1^{-1}(C_1-{}^1/_2 l_1)^2\cos 2l_1=H_1,\quad C_1>0 \tag{1.26}$$

Запишем окончательное выражение для перемещения сечений стержня в исходных переменных в действительной форме (для R записано приближенное выражение):

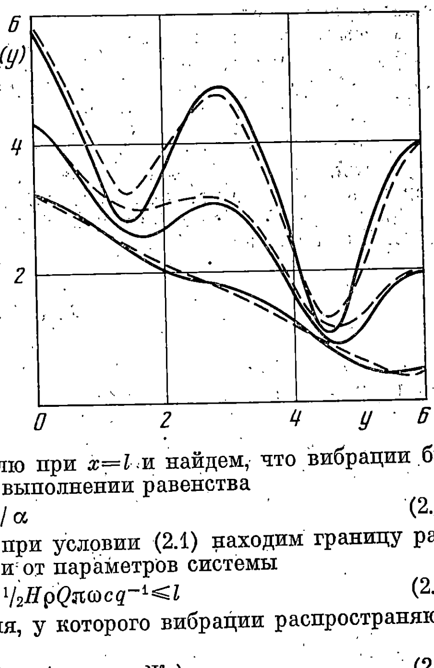
$$u(x,\ t)=KR(x)\cos\left[\omega t+\varphi(x)\right] \tag{1.27}$$

$$R=C_1-{}^1/_2 y+(C_1-{}^1/_2 l_1)^2/(C_1-{}^1/_2 y)\cos(2y-2l_1) \tag{1.28}$$

$$y=\alpha x,\quad \operatorname{tg}\varphi=n/m,\quad l_1=\alpha l,\quad \alpha=\omega/c$$

Полученное решение согласуется с результатами численного интегрирования исходного линеаризованного уравнения (1.7).

На фигуре представлены графические зависимости амплитуды перемещений $R(y)$ в безразмерной форме при $l_1=6$. Сплошной линией показаны зависимости, полученные в результате численного решения уравнения (1.7), штриховой — результат приближенного решения этого уравнения (1.28). Сравнение выполнено при одинаковых граничных условиях (1.17) для нескольких значений амплитуды H_1 кинематического возмущающего воздействия на конце стрежня.



2. Решение (1.27) справедливо для коротких стержней, у которых вибрации распространяются на всю длину стержня. Определим параметры внешнего воздействия и системы, обеспечивающие эти условия. Вибрации сечений стержня уменьшаются по мере удаления от возмущенного конца и при некотором значении H_1 не будут распространяться до конца стержня. Найдем длину стержня, у которого вибрации распространяются по всей длине. Для этого выражение для амплитуды перемещения сечений (1.28) приравняем нулю при $x=l$ и найдем, что вибрации будут распространяться до конца стержня при выполнении равенства

$$l=2C_1/\alpha \tag{2.1}$$

Далее из соотношения (1.25) или (1.28) при условии (2.1) находим границу распространения поля вибраций l_* в зависимости от параметров системы

$$C_1=H_1={}^1/_2\alpha l_*,\quad l_*={}^1/_2 H\rho Q\pi\omega c q^{-1}\leqslant l \tag{2.2}$$

Тогда для перемещения сечений стержня, у которого вибрации распространяются не на всю длину, можно записать

$$u(x,\ t)=K(C_1-{}^1/_2\alpha x)\cos(\omega t-\alpha x-\Psi_0) \tag{2.3}$$

Следует заметить, что решение (2.3) тождественно удовлетворяет линеаризованному уравнению (1.5). Постоянные интегрирования C_1 и Ψ_0 определяются из граничного условия на возмущенном конце стержня. Например, при кинематическом задании возмущения $u(0,\ t)=H\cos\omega t$. При этом постоянные интегрирования примут значения $KC_1=H$, $\Psi_0=0$, а зона распространения вибраций определится из условия положительности амплитуды

$$x_*=2C_1\alpha^{-1}={}^1/_2 H\pi\rho Q\omega c q^{-1} \tag{2.4}$$

При $q\to 0$ координата $x_*\to\infty$, что соответствует полному отсутствию демпфирования. При больших значениях q вибрации локализуются около возмущенного конца стержня.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пановко Я. Г.* Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Физматгиз, 1960. 193 с.
2. *Пальмов В. А.* Распространение вибраций в нелинейной диссипативной среде.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 4, с. 749–757.
3. *Миронов М. В.* О распространении в стержнях продольных колебаний с медленно меняющимися параметрами.— Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 4, с. 91–96.

Петрозаводск

Поступила в редакцию 23.V.1984