

ЗАКРИТИЧЕСКОЕ СЖАТИЕ ГИБКОГО СТЕРЖНЯ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ПРОГИБЫ

КРИКУН А. Н.

В некоторых технических устройствах используются упругие весьма гибкие сжатые элементы, испытывающие продольный изгиб в условиях, когда прогибы по всей длине ограничены; примером такой системы может служить сжатый тонкий стержень, вставленный с зазором Δ в неподвижную жесткую трубу. Процесс закритического деформирования такого стержня, происходящий при монотонном возрастании сжимающей силы, в геометрически линейной постановке был описан В. И. Феодосьевым в следующем виде [1].

Непосредственно после потери устойчивости при $P = \pi^2 EJ/L^2$ (EJ — изгибная жесткость, L — длина стержня) изогнутый стержень касается ограничивающей поверхности в одной точке (фиг. 1, а). При дальнейшем возрастании сжимающей силы до значения $P = 4\pi^2 EJ/L^2$ продольный изгиб сначала развивается с сохранением той же общей схемы точечного касания посередине длины стержня, но при $P = 4\pi^2 EJ/L^2$ касание сменяется прилеганием на среднем прямолинейном участке конечной, постепенно возрастающей длины (фиг. 1, б). При $P = 16\pi^2 EJ/L^2$, когда длина этого участка становится достаточно большой, стержень теряет устойчивость и переходит к новой форме равновесия с касанием в трех точках (фиг. 1, в). Далее, при $16\pi^2 EJ/L^2 < P < 36\pi^2 EJ/L^2$ сохраняется схема касания в трех точках, но при $P = 36\pi^2 EJ/L^2$ касание в каждой из этих точек сменяется прилеганием (фиг. 1, г). При $P = 144\pi^2 EJ/L^2$ наступает новая форма равновесия с касанием в девяти точках и т. д. В этом процессе скачкообразно уменьшается длина отрезка упругой линии I , соответствующего типовому участку, расположенному между соседними точками перегиба на оси системы.

Такое описание процесса возникновения и развития новых, все более усложняющихся равновесных конфигураций приемлемо лишь до тех пор, пока отношение Δ/I остается настолько малым, чтобы можно было пользоваться линейным уравнением продольного изгиба (независимо от другого очевидного ограничения, связанного с возможным нарушением закона Гука при возрастании силы P).

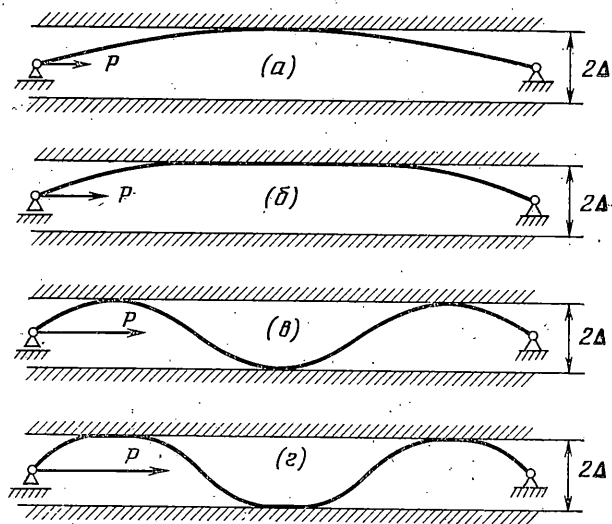
Дальше, после решения соответствующей нелинейной задачи, показано, что если после очередного увеличения числа зон контакта и соответствующего уменьшения длины I нарушится неравенство $\Delta/I < 0,1422$, то при дальнейшем возрастании сжимающей силы число зон контакта перестает увеличиваться и описание процесса, данное в [1], становится неверным. В этих условиях стержень оказывается подразделенным на некоторое неизменное число одинаковых участков, каждый из которых имеет фиксированную длину l . Деформирование такого типового участка сначала происходит в условиях точечного касания (фиг. 2, а), а затем развивается зона прилегания на участке BC длины l_3 , изменяющейся в процессе нагружения (фиг. 2, б).

Публикуемая статья посвящена изучению названного процесса деформирования на основе нелинейной теории изгиба тонких упругих стержней. Основное внимание уделено решению задачи для типового участка, показанного на фиг. 2, а, б; при этом предполагается, что $\Delta/I > 0,1422$ и потери устойчивости на участке прилегания не происходит.

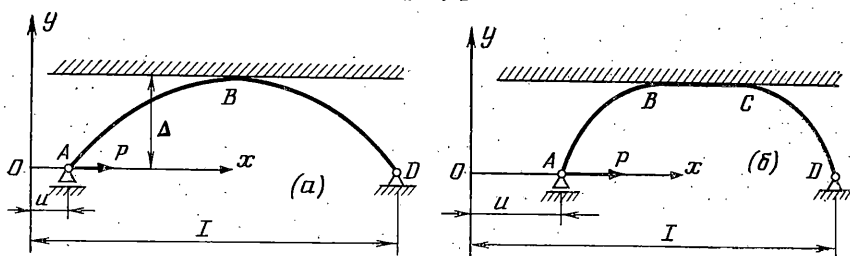
Также изучен процесс нагружения стержня при $\Delta/L < 0,1422$ и установлено, что в этом случае линейное решение оказывается достаточно точным в качественном и количественном отношении. Например, при $\Delta/L = 0,1$ найдено, что потеря устойчивости участка прилегания происходит при $P = 15,4\pi^2 EJ/L^2$, это лишь на 3,7% отличается от линейного решения.

1. При решении задачи будем исходить из известной схемы изгиба упругого стержня длины l_0 , который находится в равновесии под действием приложенных к его концам противоположно направленных сил одинаковой величины F и изгибающих моментов M_1 и M_2 ; во внутренних точках стержня внешние силы и моменты отсутствуют (фиг. 3). При этом упругая линия стержня описывается уравнением

$$d^2\zeta/ds^2 = -\beta^2 \sin \zeta, \quad 0 \leq s \leq l_0 \quad (1.1)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

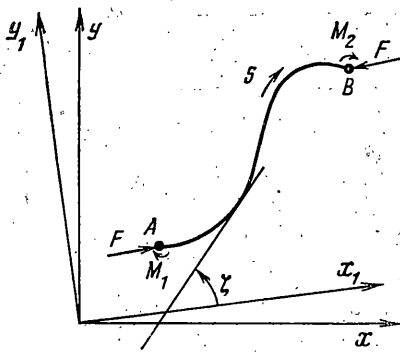
где $\xi(s)$ — угол между касательной к оси стержня в произвольной точке и осью x , параллельной линии действия силы F , s — дуговая координата произвольной точки упругой линии стержня, отсчитываемая от начала A , $\beta^2 = FL^2/(EI)$ — безразмерный силовой коэффициент.

Для решения уравнений (1.1) был использован метод, изложенный в [2]. Введение безразмерных упругих параметров, лежащее в основе этого метода, позволяет свести краевую задачу к системе трансцендентных уравнений, удобной для численного решения методом Ньютона — Канторовича. Выполненный в [2] качественный анализ упругих кривых дает возможность до решения задачи указать достаточно узкие интервалы, в которых находятся искомые переменные, что значительно облегчает нахождение решений системы.

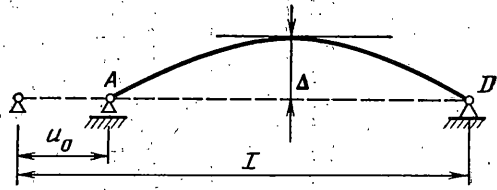
В качестве вспомогательной была решена задача о закритическом сжатии первоначально прямолинейного стержня длины I , закрепленного, как показано на фиг. 4. При этом были найдены значения u_0 и P_0 , соответствующие заданному прогибу Δ ; это позволило перейти к исследованию последующего процесса деформирования системы, показанной на фиг. 2. В результате решения вспомогательной задачи было также установлено, что при $\Delta/I > 0,4031$ контакт между стержнем и плоскостью не возникает.

Дальнейшие расчеты относились к основной задаче и были выполнены для различных значений Δ/I , удовлетворяющих неравенству $0,1422 < \Delta/I < 0,4031$. Рассматривались условия «жесткого» («прессового») нагружения, когда задаются последовательно возрастающие значения перемещения u опоры A , начиная со значения u_0 , а основной искомой величиной является сжимающая сила P . Приведем основные зависимости, описывающие деформирование участка AD на двух этапах — точечного касания и прилегания.

На этапе точечного касания возможна только симметричная форма равновесия, и поэтому достаточно записать уравнения для одного участка



Фиг. 3



Фиг. 4

AB. Они имеют вид

$$d^2\zeta_1/ds^2 = -\beta_1^2 \sin \zeta_1, \quad 0 \leq s \leq I_1, \quad I_1 = I/2 \quad (1.2)$$

$$x|_{s=I_1} - x|_{s=0} = (I-u)/2, \quad y|_{s=I_1} = \Delta, \quad M|_{s=0} = 0 \quad (1.3)$$

После того как первоначально неизвестное значение параметра β^2 найдено в результате решения системы уравнений (1.2)–(1.3), горизонтальная составляющая P силы F определялась из выражения

$$P = (4\beta^2 EJ/I^2) \cos \zeta_1|_{s=I_1} \quad (1.4)$$

Результаты решения системы уравнений (1.2)–(1.3) для $\Delta/I = 0,2$ приведены ниже. В первых двух строках содержатся последовательные безразмерные значения u/I и соответствующие им безразмерные значения P/P^* , где $P^* = \pi^2 EJ/I^2$ – эйлерова сила (неравномерность шага по u/I вызвана особенностями вычислительного процесса). В третьей строке приведены усредненные значения потенциальной энергии деформации Π/I :

u/I	0,1067	0,1080	0,1095	0,1114	0,1137	0,1168	0,1209	0,1264
P/P^*	1,2748	1,5119	1,7684	2,0446	2,3407	2,6565	2,9917	3,3458
Π/I	1,0835	1,1006	1,1252	1,1608	1,2114	1,2879	1,4014	1,5749

При исследовании этапа прилегания учтено, что при возрастании перемещения u длины I_1 и I_2 изогнутых участков постепенно изменяются, а также принята во внимание возможность существования несимметричной формы равновесия. При этом уравнение (1.1) записывается отдельно для участков AB и CD, которым соответствуют углы $\zeta_1(s_1)$ и $\zeta_2(s_2)$:

$$d^2\zeta_1/ds_1^2 = -\beta_1^2 \sin \zeta_1, \quad 0 \leq s_1 \leq I_1 \quad (1.5)$$

$$d^2\zeta_2/ds_2^2 = -\beta_2^2 \sin \zeta_2, \quad 0 \leq s_2 \leq I_2 \quad (1.6)$$

(отсчет дуговых координат ведется соответственно от точек A и C). Решения этих уравнений должны удовлетворять следующим условиям:

$$M|_{s_1=0} = 0, \quad M|_{s_2=I_2} = 0, \quad y|_{s_1=I_1} = \Delta, \quad y|_{s_2=0} = \Delta$$

$$u = I_1 + I_2 - (x|_{s_1=I_1} - x|_{s_1=0}) - (x|_{s_2=I_2} - x|_{s_2=0}) \quad (1.7)$$

а также условиям равенства нулю кривизн, а следовательно, и изгибающих моментов в граничных точках B и C:

$$M|_{s_1=I_1} = 0, \quad M|_{s_2=0} = 0 \quad (1.8)$$

Еще одно условие следует из равенства горизонтальных составляющих сил на участках AB и CD:

$$(\beta_1^2/I_1^2) \cos \zeta_1|_{s_1=I_1} = (\beta_2^2/I_2^2) \cos \zeta_2|_{s_2=0} \quad (1.9)$$

Вычисления показали, что до некоторого значения $(u/I)^*$ (зависящего от принятой величины Δ/I) система (1.5)–(1.9) имеет только одну ветвь решений, соответствующую симметричной форме равновесия. При даль-

u/I	P/P^*	Π/I	I_3/I
-------	---------	---------	---------

Симметричная форма

0,1343	3,7176	1,8528	0,0000
0,1500	4,3232	2,4749	0,0808
0,2000	5,9233	5,0286	0,2406
0,2500	6,8023	8,2005	0,3200
0,30	6,9497	11,6209	0,3591
0,40	5,8038	18,0377	0,3763
0,50	4,0125	22,8734	0,3515
0,60	2,4151	26,0142	0,3054
0,70	1,2286	27,7781	0,2465
0,80	0,4187	28,5637	0,1793
0,90	0,1086	28,6973	0,1062
1,00	0,4399	28,4134	0,0289

Несимметричная форма

0,2870	6,8498	10,7266	0,3464
0,290	6,5385	10,9248	0,3346
0,300	5,5952	11,5225	0,2932
0,310	4,7800	12,0337	0,2489
0,320	4,0731	12,4700	0,2011
0,330	3,4583	12,8411	0,1490
0,340	2,9222	13,1557	0,0919
0,350	2,4535	13,4207	0,0286

нейшем развитии процесса, начиная с указанного значения $(u/I)_*$, появляется еще одна ветвь решений, соответствующая несимметричной форме. Результаты вычислений представлены в таблице, в которой добавлены значения безразмерной длины участка прилегания I_3/I .

2. Из проведенных расчетов следует, что при $(u/I) > (u/I)_*$ значения силы P постепенно убывают и для симметричной, и для несимметричной форм. Таким образом, значение $P=P_*$, соответствующее $(u/I)_*$, представляет собой локальный максимум сжимающей силы, который определяется выражением

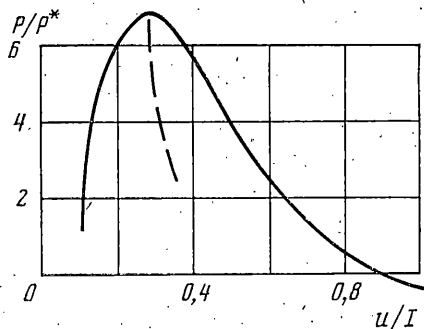
$$P_* = 2,7532EJ/\Delta^2 \quad (2.1)$$

т. е. не зависит от размера I (при выполнении условия $0,1422 < \Delta/I < 0,3991$ ¹). Независимость значения P_* от общей длины I следует также из принципа подобия упругих линий, сформулированного в [2]. Из этих расчетов получаем, что при $P=P_*$ отношение $\Delta/I_1 = 0,6163$. Это позволило найти указанное наименьшее значение отношения Δ/I , при котором прямолинейный участок прилегания не теряет устойчивости. Действительно, для сохранения устойчивости участка прилегания при $P=P_*$ должно быть $2,7532/\Delta^2 < 4\pi^2/(I-2I_1)^2$. Полагая здесь $I_1 = 0,6163\Delta$, находим $\Delta/I > 0,1422$.

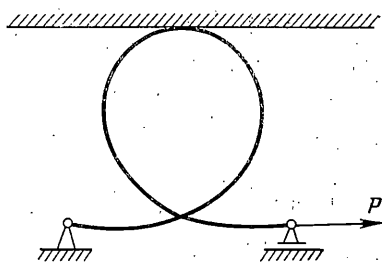
На фиг. 5 показан график зависимости P/P^* от u/I для $\Delta/I = 0,2$; штрихами показана ветвь, отвечающая несимметричной форме равновесия. Из графика видно, что при росте перемещения u/I сила P/P^* сначала возрастает и в этом процессе этап точечного касания сменяется последующим этапом прилегания. Затем, уже в условиях развитого прилегания, наступает в известном смысле критическое состояние, которому соответствует локальный максимум силы P . Этому состоянию соответствует разветвление форм равновесия — наряду с симметричной существует несимметричная форма равновесия. Действительное развитие процесса деформирования зависит от характера квазистатического нагружения.

Если задаются последовательно возрастающие перемещения u опоры A , то после достижения максимума сжимающей силы при $P=P_*$ происходит несимметричное деформирование стержня в соответствии с кривой, показанной на фиг. 5 штрихами (несимметричной форме соответствуют мень-

¹ Для верхней границы указано значение 0,3991, а не 0,4031, так как при значениях Δ/I , лежащих в узком интервале $0,3991 < \Delta/I < 0,4031$, касание не переходит в прилегание; в этом случае локального максимума сжимающей силы не существует.



Фиг. 5



Фиг. 6

шие значения потенциальной энергии деформации по сравнению с симметричной). Отметим, что «жесткому» нагружению в данном случае соответствует неединственная форма равновесия, что было бы невозможно для систем с одной степенью свободы.

Если же осуществляется «мягкое» нагружение, т. е. задается монотонное возрастание силы P , то при $P=P_*$ произойдет перескок стержня в положение, эскизно показанное на фиг. 6. Это положение равновесия характеризуется самопересечением упругой линии стержня и подробно не рассматривалось.

Деформирование бесконечно длинного упругого стержня в канале без трения рассмотрено [3], где указано, что критическое значение силы P не зависит от размера I , однако предложенное в [3] решение не содержит достаточно глубокого анализа процесса деформирования. В частности, не было рассмотрено возникновение и развитие процесса прилегания стержня к стенкам канала и возможность существования несимметричных форм равновесия. Исследовалось мягкое нагружение, поэтому из-за плохой обусловленности системы уравнений вблизи $P=P_*$ количественный результат для P_* получен с заметной неточностью (коэффициент в формуле (2.1) оказался равным 2,512). Кроме того, в [3] не указано, как применить полученное решение к стержню заданной конечной длины.

Сочетание результатов решения линейной задачи, выполненного В. И. Феодосьевым, и приведенного в данной статье решения нелинейной задачи позволяет рекомендовать следующую расчетную процедуру для стержней с большими значениями отношения L/Δ : пока выполняется условие $\Delta/I < 0,1422$, используется данное в [1] линейное решение, которому соответствует уменьшение длины I типового участка. При $\Delta/I > 0,1422$, когда устанавливается неизменная величина I , процесс деформирования описывается уравнениями (1.2)–(1.3) и (1.5)–(1.9), как это проиллюстрировано для конкретного значения Δ/I .

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьева В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1973, 400 с.
2. Попов Е. П. Нелинейные задачи статики тонких стержней. Л.; М.: Гостехиздат, 1948. 170 с.
3. D. P. Vaillette, G. G. Adams. The elastic beam contained in a frictionless channel. — Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1983, v. 50, N. 3, p. 693–694.

Ленинград

Поступила в редакцию
3.X.1985